HAL open science

Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G.

Brigitte Grugeon

▶ To cite this version:

Brigitte Grugeon. Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G.. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université de Paris 7 Denis diderot, 1995. Français. NNT : . tel-01252058

HAL Id: tel-01252058
https://theses.hal.science/tel-01252058

Submitted on 7 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS VII

DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉE PAR BRIGITTE GRUGEON

SUJET DE LA THÈSE :

Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G.

Thèse soutenue le 14 Décembre 1995 devant la commission d'examen

JURY :

Yves CHEVALLARD	RAPPORTEUR
Régine DOUADY	EXAMINATEUR
Raymond DUVAL	EXAMINATEUR
Gérard VERGNAUD	RAPPORTEUR
Martial VIVET	EXAMINATEUR
Michèle ARTIGUE	DIRECTEURS DE
Bernard DUMONT	RECHERCHE

Edité par l'IREM Paris VII

UNIVERSITÉ DE PARIS VII

DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

PRÉSENTÉE PAR BRIGITTE GRUGEON

SUJET DE LA THÈSE :

Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G.

Thèse soutenue le 14 Décembre 1995 devant la commission d'examen

JURY :

Yves CHEVALLARD	RAPPORTEUR
Régine DOUADY	EXAMINATEUR
Raymond DUVAL	EXAMINATEUR
Gérard VERGNAUD	RAPPORTEUR
Martial VIVET	EXAMINATEUR
Michèle ARTIGUE	DIRECTEURS DE
Bernard DUMONT	RECHERCHE

Edité par l'IREM Paris VII

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Michèle Artigue pour la confiance qu'elle m'a accordée. Sans ses encouragements et ses qualités humaines, ce travail n'aurait pas existé. Je lui exprime ici ma gratitude pour m'avoir guidée dans les dédales de la recherche en didactique des mathématiques et pour m'avoir permis de structurer les idées confuses qui m'avaient conduite à ce travail.

Je tiens également à remercier Bernard Dumont pour m'avoir poussée à m'engager dans la recherche didactique, pour la confiance et les conseils éclairés qu'il a prodigués régulièrement à mon travail, dès le début de cette nouvelle recherche.

Je remercie vivement Régine Douady, Raymond Duval et Martial Vivet pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse et qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury. Je remercie tout particulièrement Yves Chevallard et Gérard Vergnaud d'avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Je remercie vivement Elisabeth Delozanne, qui à travers ses lectures critiques et son soutien, m'a permis de clarifier mes idées et de dépasser les moments difficiles. Il en est de même pour Corinne Castela, ses analyses apportées en fin de thèse m'ont été d'une aide précieuse. Sans oublier Jacqueline Belloc et Nicole Pernias qui ont su m'écouter et être disponibles.

Je rend un hommage appuyé aux élèves de mes classes de Première G : Christel, Delphine, Denis, Kahina, Karine, Nathalie, Nicolas, Nouara, Pascal, Sandrine F. et tous les autres, sans qui ce travail n'aurait pu voir le jour.

Ma reconnaissance va à l'équipe des jeunes chercheurs en didactique et plus particulièrement à Maha Abboud pour le soutien moral et intellectuel apporté à tout moment.

Je tiens à dire que sans le soutien de la structure de l'IREM de Paris 7, matériel et logistique, cette thèse n'aurait pas pu exister. J'exprime en particulier toute ma reconnaissance à Martine Lamy du secrétariat, à Odette Dieraert et Nadine Locufier du service de reprographie pour leur compétence et leur gentillesse.

Aujourd'hui, toutes mes pensées vont à mes jeunes enfants Josselin et Erwan qui ont su s'adapter au manque de disponibilité de leur maman et à la venue de leur petite soeur Auberie. Je porte une pensée particulière à leur père Loïc, compagnon de ces longues années de travail.

à Loïc

INTRODUCTION

Le travail que nous présentons ici concerne les problèmes de transition dans le système éducatif. Ces transitions sont toujours accompagnées de ruptures auxquelles les différents acteurs du système sont plus ou moins sensibles : les coutumes didactiques changent, les contrats didactiques aussi, les élèves découvrent brutalement qu'ils ne savent plus ce qu'ils pensaient savoir, les professeurs ont l'impression de ne pouvoir prendre appui sur rien de solide.

Ces ruptures apparaissent comme de l'ordre de la normalité didactique et le système n'y prête finalement qu'une attention modérée, s'en remettant le plus souvent aux capacités d'adaptation des uns et des autres.

En tant qu'enseignante, nous nous y sommes trouvée sensibilisée dans un cas particulier : celui de la transition entre les filières de BEP tertiaire et les filières tertiaires de l'enseignement général de lycée. Des classes spécifiques, celles de première G d'adaptation avaient pourtant, dans ce cas précis, été mises en place pour faciliter une transition supposée n'allant pas de soi. En dépit de ce dispositif, nous ne pouvions que constater des dysfonctionnements du système, dysfonctionnements qui conduisaient des élèves sélectionnés parmi les meilleurs de BEP, vivant ce changement d'institution comme une réussite, à des sentiments d'échec et de rejet.

Nous nous sommes lancée dans ce travail didactique avec l'ambition, utopique sans doute mais peut-être nécessaire, de trouver des moyens d'action pour contrer de façon efficace ce dysfonctionnement. Nous ressentions clairement les limites de ce que nous tentions, année après année, très empiriquement dans nos classes et le détour de l'analyse didactique nous apparaissait de plus en plus incontournable. Ce fut le début d'un long cheminement fait d'espoirs, d'avancées et de moments de découragement aussi.

C'est ce cheminement que nous décrivons dans ce manuscrit, avec bien sûr les réorganisations nécessaires.
Dans le chapitre I, nous décrivons la problématique et la méthodologie de ce travail, qui conjugue deux types d'approche didactique : une approche de nature anthropologique, se référant directement aux recherches menées ces dernières années autour d'Y. Chevallard et une approche didactique plus classique, de nature épistémologique et cognitive.
Dans le chapitre II, nous construisons la structure d'analyse multidimensionnelle qui constituera l'outil clef de la recherche, en servant de base à la fois à l'étude des rapports

institutionnels et des rapports personnels à l'algèbre élémentaire. L'algèbre élémentaire est en effet le domaine mathématique que nous avons choisi pour analyser les ruptures et difficultés de la transition institutionnelle, car c'est à travers lui que se joue essentiellement, dans ce cas précis, la réussite ou l'échec de la transition en mathématiques mais aussi au delà des seules mathématiques.
Dans le chapitre III, nous présentons un premier test de cette structure d'analyse réalisé en 1991-92 et les modifications qu'il nous a conduite à effectuer.
Dans le chapitre IV, nous en venons à l'opérationnalisation de la structure d'analyse pour l'étude des rapports des élèves à l'algèbre élémentaire, opérationnalisation qui va passer notamment par l'élaboration d'un ensemble de tâches diagnostic.
Dans le chapitre V, nous abordons le second volet de l'étude : celui des rapports institutionnels en BEP, Seconde et Première G d'adaptation, étude réalisée elle aussi en opérationnalisant de façon adéquate la structure multidimensionnelle d'analyse.
Dans le chapitre VI, nous introduisons une nouvelle notion : celle de profil d'élève, qui nous permet de synthétiser la masse des données recueillies à partir de la passation des tâches diagnostic, en mettant en évidence, via le recoupement des réponses aux différentes tâches, les cohérences locales dans le rapport des élèves à l'algèbre élémentaire que, dès le départ, il nous semblait essentiel de rechercher. C'est dans ce chapitre également que s'opère en un certain sens la jonction des deux dimensions de l'étude, les profils des différents élèves étant rapportés aux caractéristiques connues des enseignements antérieurement suivis.

Jusqu'au chapitre VI inclus, nous nous sommes centrée sur l'analyse du dysfonctionnement didactique, sur la recherche de ses raisons, sur sa compréhension. Dans les deux chapitres suivants, nous abordons l'autre facette de notre travail, celle des essais d'action sur le fonctionnement du système.
Dans le chapitre VII, nous étudions l'évolution au cours de l'année scolaire du rapport à l'algèbre élémentaire de nos élèves, via l'évolution de leurs profils. La mise en évidence de cohérences locales fortes dans leur fonctionnement au chapitre précédent nous a servi notamment à identifier, dans chaque cas, un certain nombre de germes mais aussi d'obstacles à l'entrée dans la pensée algébrique. Rétrospectivement, nous analysons nos interventions didactiques en fonction de ces connaissances nouvelles et y rapportons leurs effets constatés.
Dans le chapitre VIII, c'est vers les développements ultérieurs de cette recherche que nous nous tournons, en présentant l'état actuel de l'informatisation du diagnostic et les perspectives ouvertes par la collaboration que nous avons nouée avec l'équipe de chercheurs en EIAO du LIUM à l'université du Mans.

Aujourd'hui, quatre ans après le début de cette recherche, nous avons l'impression d'avoir compris un certain nombre de mécanismes du dysfonctionnement, d'avoir construit un instrument d'étude dont le champ de validité dépasse sans aucun doute le contexte précis qui lui a donné naissance, nous avons l'impression d'avoir acquis des armes pour aider plus efficacement nos propres élèves à affronter les ruptures nécessaires de la transition institutionnelle. Mais cette connaissance, que nous aimerions maintenant faire partager à d'autres, nous fait percevoir aussi, de façon plus réaliste qu'au début de notre travail, le prix à payer pour faire bouger les choses, nous fait mesurer ce qui sépare la compréhension de l'action efficace. Peut-être est-ce aussi malheureusement le lot commun de la recherche didactique.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE

Dans ce chapitre, nous allons présenter la problématique et la méthodologie de notre recherche, les questions et les objectifs dans le paragraphe I, les principaux choix méthodologiques dans le paragraphe II, à savoir : une approche symétrique côté enseignement et côté élève, le choix du domaine de l'algèbre élémentaire et une analyse basée sur une définition de la "compétence algébrique".

Dans les paragraphes III, IV et V, nous précisons ensuite comment nous opérationnalisons la structure d'analyse globale pour aborder les sous-questionnements de la recherche, à savoir l'étude des rapports institutionnels, celle des rapports personnels des élèves et enfin l'exploration de conditions d'action pour une évolution du système.

Pour terminer, nous rappelons les hypothèses de notre recherche.

I. QUESTIONS ET OBJECTIFS

I.1 PRÉSENTATION

Situons d'abord notre recherche. Le lycée dans lequel j'enseigne accueille depuis plusieurs années des élèves de BEP tertiaire[1] dans une classe passerelle de Première G d'adaptation[2] (classes organisées pour favoriser la poursuite des études en cycle long). Ces élèves sont recrutés parmi les meilleurs éléments de leur section. Leur bonne adaptation à la formation BEP manifeste certainement la construction d'un rapport aux mathématiques et plus globalement d'un rapport au savoir et à l'école adapté à l'institution "BEP tertiaire". Ce sont des élèves motivés, en réussite scolaire, qui effectuent une entrée positive dans le second cycle. Mais ils y rencontrent rapidement des difficultés et se retrouvent pour un grand nombre d'entre eux en échec scolaire, notamment en mathématiques. Ces élèves éprouvent plus de difficultés à s'adapter que des élèves, même faibles, issus de seconde indifférenciée. Un malentendu semble s'installer dans la classe.

---

[1] Il existe trois diplômes de BEP tertiaire :
• BEP CAS : communication administrative et secrétariat,
• BEP VAM : vente, action marchande,
• BEP ACC : comptabilité.

[2] Depuis Septembre 1993, le nouveau sigle correspondant à la classe de Première G d'adaptation est Première STT d'adaptation. Dans la suite, on conservera le sigle en vigueur à l'époque de l'étude : Première G.

I.2 QUESTION CENTRALE

On peut se demander si les difficultés rencontrées par les élèves issus de BEP ont uniquement pour source "leur niveau mathématique". C'est le point de vue le plus communément exprimé par les enseignants, cette conviction étant renforcée plus ou moins inconsciemment par le fait que les élèves qui vont en BEP y sont souvent orientés par l'échec au niveau collège. Mais il s'agit peut-être d'une rationalisation commode.

Les problèmes de niveau, même s'ils sont réels, ne sont-ils pas renforcés, voire exacerbés, par des décalages importants entre les rapports aux objets mathématiques et au savoir jugés adéquats[3] par les institutions organisant les enseignements en BEP ou en cycle long ?

Si c'est le cas, les enseignants peuvent se trouver incapables de repérer et d'exploiter les manifestations de connaissances de leurs élèves. Ils interprètent alors en termes d'ignorance l'absence de comportements attendus.

Si c'est le cas, les élèves peuvent se trouver incapables d'exploiter ce qu'ils savent déjà, de comprendre quel jeu on joue et ce que l'on attend d'eux.

Si nous envisageons ce problème sous cet angle, nous sommes amenée à nous interroger sur les connaissances mathématiques réellement construites par les élèves en BEP. En quoi ne sont-elles plus conformes à celles attendues en Première G ? Quels types d'activités peuvent rendre disponibles, efficaces et valides ces connaissances ? Nous sommes aussi amenée à nous interroger de façon plus globale sur les décalages qui existent entre les rapports aux mathématiques vivant en BEP et ceux attendus à l'entrée en Première G ?

Dans cette recherche, nous faisons l'hypothèse que :

1) les décalages existent et jouent un rôle certain dans l'installation de l'échec,

2) leur prise en compte est nécessaire pour rendre possible une évolution positive.

Schématisons cette situation par la figure suivante :

[3]Nous pensons à la notion d'idonéité introduite par Y. Chevallard "Vous pourrez douter, en revanche, que le rapport officiellement imposé se révèle bien adapté ou, nous dirons, idoine, à certains emplois effectifs que vous avez en tête." [Chevallard, 1989]

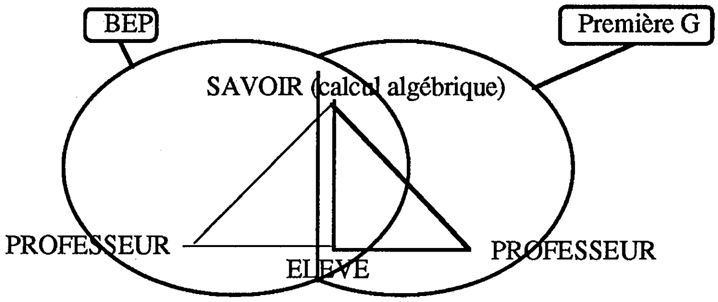


Figure 1 : Savoir, élève, professeurs et transition entre deux cycles

I.3 OBJECTIFS

Dans cette recherche nous étudions donc le système complexe ci-dessus pour :

• d'abord comprendre son fonctionnement à travers ses différentes composantes en inter-relations et tester le questionnement formulé au départ,

• ensuite essayer de préciser des conditions nécessaires à une évolution positive.

II. LES PRINCIPAUX CHOIX MÉTHODOLOGIQUES

Nous avons besoin d'étudier simultanément les différents éléments du système représenté ci-dessus. Des choix sont nécessaires pour déterminer une approche à la fois cohérente, non abusivement réductrice et également accessible à un travail de thèse. Ce sont ces choix que nous allons présenter ci-après.

II. 1 UNE APPROCHE SYMÉTRIQUE CÔTÉ ENSEIGNEMENT ET CÔTÉ ÉLÈVE

La compréhension du système passe par la reconnaissance et la mise en évidence de cohérences plus ou moins globales au niveau du fonctionnement des élèves et au niveau des enseignements puis par leur mise en relation. Nous avons donc choisi d'articuler notre travail didactique de la façon la plus *symétrique* possible selon ces deux entrées : l'enseignement et les élèves. L'*élève*, situé à l'interface des deux institutions, est le maillon central de notre méthodologie et permet cette double entrée[4].

Plaçons-nous dans l'approche anthropologique développée par Y. Chevallard [Chevallard, 1992] et considérons l'élève à la fois comme *sujet cognitif* et comme *sujet institutionnel.*

• D'un point de vue institutionnel, l'élève est un pourvoyeur d'informations à la fois comme ancien élève de BEP tertiaire et comme élève de Première G. Il donne accès

[4]Nous n'avons pas choisi d'analyser l'enseignement à partir d'entretiens avec les professeurs. En effet, en tant que professeur en classe de Première G d'adaptation, il nous était facile d'accéder aux données concernant les élèves (par exemple, cahiers de cours de BEP, productions d'élèves en Première G, questionnaires sur leur scolarité, ...).

de façon indirecte mais fine au fonctionnement des systèmes d'enseignement dans lesquels il est plongé.

Ainsi, pour avoir accès aux rapports institutionnels en BEP tertiaire, nous avons commencé par étudier classiquement programmes et instructions, épreuves d'examens. Mais l'analyse des cahiers de cours des élèves de BEP s'est révélée ensuite essentielle pour valider les premiers résultats ainsi obtenus et mettre en évidence, au delà des régularités du système, des variations d'un enseignant à l'autre subtiles et pourtant déterminantes en ce qui concerne les capacités d'adaptation en première G.

• D'un point de vue cognitif, nous étudions le fonctionnement des connaissances des élèves et plus particulièrement ce qui, dans les connaissances mathématiques réellement construites peut freiner ou faciliter l'apprentissage et la dynamique d'une mise en fonctionnement efficace en Première G d'adaptation.

Pour ceci, nous analysons des productions écrites des élèves à l'entrée en Première G d'adaptation pour déterminer leurs rapports personnels initiaux à certains objets de savoir, puis sur le long terme, tout au long de l'année scolaire, pour étudier l'évolution de ces rapports.

Nous organisons donc, dans ce chapitre, la présentation de notre recherche en trois parties qui concernent respectivement l'étude des rapports institutionnels à des objets communs de savoir en BEP et en Première G, celle des connaissances effectivement construites par les élèves et celle de leur condition d'évolution en Première G. Elles nécessitent des approches distinctes qui croisent des cadres théoriques et des méthodologies différentes.

II.2 UN DOMAINE MATHÉMATIQUE :L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Pour réduire la complexité du problème, nous avons d'abord restreint le domaine mathématique d'étude. Nous avons choisi *l'algèbre élémentaire comme domaine mathématique privilégié*. Trois raisons essentielles ont guidé ce choix :

• L'activité mathématique en deuxième année de BEP tertiaire est articulée autour des thèmes principaux suivants : calcul numérique et calcul algébrique, fonctions numériques, équations numériques et systèmes d'équations linéaires, statistique descriptive, calculs commerciaux. Un changement important est intervenu par rapport à l'enseignement des mathématiques en collège. A partir de la classe de quatrième, le monde des mathématiques est symbolisé à la fois par la démonstration en géométrie et le calcul algébrique. Or la géométrie et plus spécificiquement la démonstration en géométrie ont "disparu" des programmes en première année de BEP tertiaire. Ainsi, le rapport aux mathématiques des élèves à la sortie du BEP se fait essentiellement via des objets liés à l'arithmétique et à l'algèbre élémentaire.

• L'étude des fonctions, cœur du programme de Première et Terminale G, s'appuie essentiellement sur des connaissances algébriques. Donc, le rapport à l'algèbre élémentaire reste en Première G d'adaptation une composante déterminante du rapport aux mathématiques et de la réussite institutionnelle. Nous rejoignons en ce sens le point de vue de Mercier [Mercier, 1995] et cherchons à mettre en relation les difficultés des élèves venant de BEP avec les pratiques algébriques que spécifie la classe de Première, même si leurs manifestations semblent différentes.

• L'algèbre élémentaire est un domaine mathématique bien étudié en didactique des mathématiques. De nombreux travaux utilisant des approches différentes, épistémologique, cognitive, anthropologique peuvent nous donner des points d'appui pour étudier les ruptures possibles, les difficultés d'apprentissage et d'enseignement.

En résumé, pour répondre aux questions posées nous devons analyser à la fois :

• le fonctionnement cognitif des élèves et leurs rapports personnels à l'algèbre élémentaire,

• les rapports institutionnels à l'algèbre en BEP tertiaire et en Première G.

II.3 UNE ANALYSE BASÉE SUR UNE DÉFINITION DE LA "COMPÉTENCE ALGÉBRIQUE"

Pour situer les rapports personnels et institutionnels à l'algèbre en BEP et en Première G, il nous a semblé nécessaire de définir une sorte de référence, indépendante des institutions concernées, tout en se situant dans leur champ d'action. Cette référence passe par une définition a priori de la compétence algébrique adaptée à notre propos.

Un point crucial de notre recherche réside donc dans la construction d'une structure d'analyse basée sur une définition de la "compétence" algébrique qui permette une double analyse, à la fois du côté élève et du côté enseignement. Deux éléments essentiels ont guidé la construction de cette structure d'analyse :

• La compétence algébrique doit être approchée de façon multidimensionnelle pour rendre compte de la diversité de l'activité algébrique même élémentaire ;

• La structure doit permettre de repérer des cohérences plus ou moins locales dans les rapports personnels et institutionnels à l'algèbre et de les mettre en relation, au moins partiellement.

Cette approche nous a donc conduit à revenir à des principes cognitifs. Ici, ce sont les dimensions cognitive et épistémologique qui sont privilégiées. Nous pensons trouver dans l'étude du développement de l'algèbre et dans celle des difficultés liées à l'apprentissage de l'algèbre des raisons pour lesquelles les connaissances algébriques des élèves peuvent vivre et fonctionner en BEP tertiaire alors que cela ne semble plus être le cas en Première G.

Notre définition de la "compétence" algébrique s'appuie donc sur les résultats obtenus dans les travaux didactiques sur l'algèbre élémentaire menés dans des cadres théoriques divers et sur notre expérience personnelle d'enseignement. Concernant ces travaux didactiques, nous exploitons en particulier les éléments suivants :

• L'algèbre est à la fois :

- un outil pour résoudre des problèmes,

- un ensemble d'objets comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable, d'identité et d'indéterminée, ... auxquels sont associés plusieurs types de signifiants : écritures algébriques, graphes, notations fonctionnelles, ... Nous reprenons ici la distinction de R. Douady entre les dimensions *outil* et *objet* des concepts mathématiques [Douady, 1984]. Pour chacune de ces deux dimensions : outil et objet, des types de traitement algébrique partiellement hiérarchisés peuvent être mis en jeu dans des types de tâches distincts.

• Sur le plan outil, il nous semble nécessaire d'évaluer la capacité à interpréter et à construire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution liés aux différents types de tâche (recherche de solutions ou preuve) [Chevallard, 1989a], [Douady, 1994], [Kieran, 1994].

• Sur le plan objet, il nous semble nécessaire de prendre en compte le statut accordé aux objets de l'algèbre ainsi que le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques [Arzarello, 1993], [Drouhard, 1992], [Duval, 1988].

• L'entrée dans l'algèbre suppose également une rupture épistémologique avec l'arithmétique [Vergnaud, 1987] et une capacité d'adaptation dans l'interprétation des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et structural [Sfard, 1991a].

• Enfin, l'acquisition d'une compétence algébrique est liée à un certain niveau de rationalité mathématique, en particulier à la reconnaissance du rôle de l'algèbre pour exprimer des solutions générales et prouver des propriétés numériques [Harper, 1987], [Lee, 1987].

Nous développons ces différents points dans le chapitre 2 pour introduire notre définition de la compétence algébrique.

II.4 OPÉRATIONNALISATION DE LA STRUCTURE D'ANALYSE

De ce fait, nous organisons la structure d'analyse globale autour de six composantes. Nous indiquons brièvement ici le rôle de chacune des composantes et les analyses du côté élève et du côté enseignement qu'elles permettent de mener.

• La composante *traitement algébrique* a pour rôle de cerner "dans ses grandes lignes" une compétence algébrique. Nous y définissons différents types de traitement algébrique. Ces types ne sont que partiellement hiérarchisés et prennent en compte les différents aspects *outil* et *objet* de l'algèbre élémentaire et les différentes tâches algébriques.

Cette composante d'analyse permet :

- d'évaluer en termes de réussite/échec la compétence algébrique des élèves, cette évaluation se faisant dans chaque cas par rapport à un ou des types de traitement algébrique attendus,

- de déterminer et de comparer les rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans les deux enseignements à travers l'identification des types de traitement algébrique privilégiés dans les problèmes proposés.

Les autres composantes ont pour fonction de repérer et de décrire des caractéristiques, des cohérences de fonctionnement. Pour décrire ces cohérences, nous avons été obligée de prendre en compte des éléments qui ne sont pas complètement internes à l'algèbre.

• La composante "*rapport arithmétique/algèbre*" a pour rôle de positionner l'activité en algèbre par rapport à celle en arithmétique. Nous cherchons les indices d'une rupture dans les rapports entretenus entre l'arithmétique et l'algèbre à partir de l'analyse des continuités apparentes et des discontinuités.

Cette composante d'analyse permet :

- de caractériser la signification accordée par les élèves à la démarche algébrique et DE la situer par rapport à la démarche arithmétique,

- d'identifier si l'enseignement permet de faire vivre une rupture à l'arithmétique, éventuellement non consommée.

• Les deux composantes *gestion dans le registre algébrique*[5] et *articulation entre le registre algébrique et d'autres registres* prennent en compte les aspects sémiotiques de l'algèbre.

La composante *gestion dans le registre algébrique* vise à étudier la gestion des expressions algébriques tandis que la composante *articulation entre le registre algébrique et d'autres registres* a pour objectif d'étudier la gestion des expressions algébriques en

[5]registre algébrique est une abréviation pour registre des écritures algébriques.

articulation avec d'autres registres sémiotiques. Dans les trois cas, les aspects syntaxique et sémantique sont pris en compte. Cette composante d'analyse permet :

- du côté élève, de décrire des régularités dans la gestion des expressions symboliques, algébriques en particulier,
- du côté enseignement, de chercher à identifier les formes de gestion et les articulations privilégiées entre registres.

• La composante *fonction de l'algèbre* a pour rôle de pointer, via différentes formes de l'activité algébrique, différents rapports institutionnels et personnels à l'algèbre.

• On ne peut enfin pas nier le rôle de l'algèbre comme outil de généralisation et de preuve, même si ce rôle est restreint à ce niveau scolaire. La composante *rationalité algébrique* a pour rôle de cerner le niveau de rationalité mis en jeu dans l'activité algébrique, dans les preuves et dans les moyens de justification, aussi bien du côté élève que du côté enseignement.

Dans le but d'opérationnaliser l'analyse, nous associerons à chaque composante des critères auxquels nous associons des valeurs comportementales du côté élève ou descriptives du côté enseignement. Nous présenterons l'étude bibliographique réalisée à cette fin dans le chapitre 2.

Nous avons présenté la méthodologie globale qui structure notre recherche à la fois du côté élève et du côté enseignement. Maintenant, nous réintroduisons les sous-questionnements qui guident notre étude en prenant en compte les outils précédemment introduits. Nous étudierons successivement dans les paragraphes III, IV et V les sous-questionnements relatifs aux rapports institutionnels, aux rapports personnels à l'algèbre et aux conditions d'évolution de ces rapports personnels compte tenu d'un enseignement donné.

III. ETUDE DES RAPPORTS INSTITUTIONNELS À L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Dans le questionnement initial, nous avons émis l'hypothèse que les rapports aux objets mathématiques jugés adaptés par chacune des institutions concernées ici pourraient comporter des différences profondes. Ceci nous a conduite à comparer la façon dont sont enseignés les mêmes objets de l'algèbre, à des niveaux analogues, dans des institutions différentes.

III.1 RÉFÉRENCE THÉORIQUE

Nous situons cette approche par rapport à la théorisation de Y. Chevallard en termes d'institutions et de rapport au savoir [Chevallard, 1992]. L'élève apprend dans une institution donnée et le savoir est transmis à l'intérieur de celle-ci. A chaque institution est associé un ensemble d'objets d'enseignement vis à vis desquels l'institution crée un *rapport institutionnel.*

Rappelons les principaux éléments qui façonnent les rapports institutionnels à des objets de savoir mathématique :

- les "savoirs officiels" tels qu'ils sont écrits dans les programmes, les manuels et cahiers de cours ;
- les savoir-faire relatifs aux objets de savoir en jeu que l'on retrouve aussi dans les exercices proposés dans les manuels et cahiers d'élèves ;
- les outils mathématiques utilisés et d'autres éléments qui participent à l'activité mathématique, comme les notions d'équation, de mise en équation, de démonstration, de démarche arithmétique ou algébrique. Ces éléments recouvrent les notions paramathématiques telles que les a définies Y. Chevallard [Chevallard, 1985] ;
- les savoirs relatifs aux conditions et aux contextes d'utilisation de ces savoirs, par exemple, on demandera de reconnaître une mise en équation avec production de la relation entre données et inconnues ou une mise en équation s'appuyant sur l'utilisation d'une formule financière. Y. Chevallard a qualifié ces savoirs de protomathématiques. Ils sont d'autant plus importants ici, que les objectifs des mathématiques dans la formation sont différents, ce qui ne va pas être sans retentissement sur les rapports institutionnels à l'algèbre.

Ces différents savoirs vont profondément modeler les *rapports personnels* des élèves aux différents objets d'enseignement, ici ceux de l'algèbre élémentaire. C'est à travers eux et à travers les situations dans lesquelles ils les mobilisent que les élèves vont donner une signification à la fois aux concepts de l'algèbre et à l'activité algébrique.

Ce sont aussi ces savoirs qui organisent le *contrat didactique* dans la classe. Ils "déterminent - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre responsable devant l'autre" [Brousseau, 1986]. Ils vont aussi servir à définir les *performances des élèves attendues par les professeurs* dans chaque classe, la forme des problèmes ainsi que les capacités exigibles aux examens.

Ce sont parmi ces savoirs et plus particulièrement ceux des deux derniers types, plus exactement dans leurs disparités, que nous devons rechercher les causes de *rupture de contrat* qui semblent intervenir à l'entrée en Première G d'adaptation.

III.2 RETOUR SUR LE QUESTIONNEMENT ASSOCIÉ

Nous voulons comparer des "mêmes" objets d'enseignement enseignés aux élèves à des niveaux analogues dans des institutions différentes. Outre la comparaison BEP, Première G, il nous a semblé nécessaire de positionner l'enseignement des mathématiques en BEP tertiaire par rapport à celui donné à un niveau comparable, en seconde indifférenciée. Ce sont en effet les deux classes où sont essentiellement recrutés les élèves qui continuent leurs études vers un baccalauréat technologique G.

Les deux programmes contiennent des notions mathématiques communes dans les deux rubriques qui concernent notre recherche : les *problèmes numériques et algébriques* et les *fonctions* et des objets mathématiques distincts dans ces rubriques comme dans d'autres rubriques. En particulier, des exemples d'application du calcul littéral, numérique et algébrique dans le secteur tertiaire complètent, dans ce domaine mathématique, le programme des sections de BEP tertiaire. Une lecture superficielle des textes de programmes[6] en BEP tertiaire et en seconde indifférenciée ne fait pas apparaître de différences majeures au niveau des objets mathématiques communs. Nous pouvons nous demander si cette apparente similarité ne fonctionne pas au sein du système, à la fois pour les enseignants et pour les élèves, comme une sorte de piège.

En effet, une lecture plus fine des programmes laisse apparaître sur des points essentiels des différences de formulation et d'approches profondes. Les élèves de BEP tertiaire font-ils référence aux mêmes objets et outils mathématiques, aux mêmes démarches de résolution, aux mêmes emplois de l'algèbre, aux mêmes contextes d'utilisation, que les professeurs du second cycle lorsqu'ils utilisent les mêmes termes ? Des intitulés voisins du texte des programmes de BEP tertiaire et de seconde indifférenciée ne désignent-ils pas, au contraire, selon les deux institutions des objets d'enseignement profondément différents ? En particulier, des notions et outils mathématiques telles, les fonctions affines, les équations, les équations de droite, le calcul algébrique, la mise en équation sont donnés par des étiquettes qui *font sens* dans la communauté des enseignants d'un même niveau du cursus scolaire. Est-ce le même "sens" dans les deux institutions ?

Allons plus loin dans notre questionnement. Au début des instructions du programme de BEP, on peut lire : "Conformément au texte définissant les objectifs du cycle de détermination de BEP, la perspective est celle d'une formation permettant aussi bien

[6]Nous nous appuyons sur deux versions des programmes de B.E.P. tertiaire : une première version qui était officiellement en cours en 1988-1989 mais qui n'était pas appliquée dans les classes, les professeurs basant leur enseignement sur les contenus des manuels scolaires et une version parue en 1991 qui a correspondu effectivement aux contenus des manuels scolaires utilisés.

l'entrée dans la vie professionnelle à l'issue de BEP, tout en veillant aux capacités d'adaptation à l'évolution scientifique et technique, que la poursuite d'études" [Horaires/Objectifs/Programmes/Instructions, 1992]

Le rapport aux objets de l'algèbre jugé adéquat par l'institution BEP se révèle-t-il idoine aux emplois effectifs de l'algèbre en Première G (mise en équation de problèmes, calcul de fonction dérivée, factorisation et étude du signe de fonction dérivée, ...) ? Nous pouvons transposer à notre étude ce qu'énonce Y. Chevallard à propos de l'arrivée d'objets de savoir à enseigner allogènes.

"Elle [l'arrivée] y provoque nécessairement des remaniements, des réajustements, au moins partiels, du contrat didactique, vécus par les enseignés comme des *ruptures de contrat*, dans la mesure où le rapport institutionnel à certains objets institutionnels antérieurement introduits apparaît brusquement comme non idoine au rapport officiel en voie d'émergence" [Chevallard, 1989b]

III. 3 La structure d'analyse globale élaborée pour comparer les objets d'enseignement

Pour comparer les objets d'enseignement communs que se donnent les institutions BEP et Première G, il nous semble donc important de *rechercher des différences cachées derrière les apparentes similarités du programme*. Pour ceci, nous utilisons une méthodologie externe. Elle consiste en l'analyse :

- des programmes de mathématiques en BEP tertiaire, en seconde indifférenciée et en Première G,
- de sujets d'examens donnés en BEP tertiaire et de problèmes de l'EVAPM des nouveaux programmes de seconde indifférenciée[7].

Pour ceci, nous utilisons la structure d'analyse globale que nous opérationalisons de façon adéquate.

L'analyse des programmes de BEP tertiaire, de seconde indifférenciée et de Première G, celle des évaluations, permettent une comparaison dans les grandes lignes des rapports institutionnels à l'algèbre en BEP et en début de second cycle long. Comme nous l'avons dit plus haut, il nous a semblé important de croiser cette analyse avec celle des cahiers d'élèves de BEP auxquels nous avions accès. Ceci rejoint en un sens la démarche mise en œuvre par J.C. Rauscher [Rauscher, 1993]. Etudiant l'enseignement de la géométrie au collège, il a montré que les enseignants tout en suivant le même programme, peuvent se donner des objets d'enseignement différents et que ceci n'est pas sans effet sur les apprentissages mathématiques des élèves.

[7]Exercices donnés lors de l'évaluation du programme de Mathématiques en fin de Seconde 1991 organisée par des enseignants de l'APMEP, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

L'analyse de sept cahiers d'élèves de BEP va ici mettre en lumière des pratiques de classe et des cohérences locales dans les rapports institutionnels à l'algèbre qui ne seront pas sans influence sur l'adaptabilité des élèves en Première G. Nous présentons cette partie du travail au chapitre 5.

IV. ETUDE DES RAPPORTS PERSONNELS À L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE DES ÉLÈVES

Dans le questionnement initial, nous avons émis l'hypothèse que, d'une part, les connaissances mathématiques des élèves pourraient ne pas être repérées et exploitées par le professeur et que, d'autre part, les élèves pourraient ne pas savoir comment mobiliser et exploiter leurs connaissances pour résoudre les problèmes qui leur sont proposés. Une entrée dans notre recherche consiste donc à analyser et à décrire les connaissances des élèves et à étudier la façon dont ils les exploitent.

IV.1 HYPOTHÈSES RETENUES SUR L'APPRENTISSAGE

Les hypothèses retenues sur l'apprentissage sont en un certain sens classiques et nous nous limiterons ici à une brève présentation.

Notre approche est globalement une approche constructiviste de l'apprentissage inspirée des théories d'équilibration et d'accommodation de Piaget [Piaget 1975]. Mais il nous semble nécessaire de prendre en compte également les hypothèses faites par des chercheurs comme Vygotsky concernant le rôle du langage et de la formalisation dans la construction et le développement des concepts. La prise en compte de cette dimension langagière nous paraît d'autant plus incontournable que le domaine étudié ici est celui de l'algèbre.

Dans notre recherche, l'accent est mis sur décalages et ruptures. Il est donc aussi naturel que nous nous référions à la notion d'obstacle épistémologique introduite en didactique par G. Brousseau. Un obstacle se manifeste par des erreurs qui ne sont pas dues au hasard : "elles sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une connaissance ancienne qui a réussi dans tout un domaine d'actions" [Brousseau, 1983]. "La connaissance obstacle a son domaine de validité et d'efficacité et aussi un domaine où elle est a priori pertinente et où elle se révèle fausse, inefficace, source d'erreurs" [Brousseau, 1983]. Ainsi en algèbre, la conception du signe d'égalité avec un statut d'annonce de résultat peut faire obstacle à celle du signe d'égalité avec un statut de relation d'équivalence [Vergnaud,1987]. Nous retiendrons aussi de G.Brousseau le fait que les obstacles épistémologiques se conjuguent le plus souvent avec des obstacles didactiques, liés aux efforts inadaptés du système pour éviter les premiers.

La notion d'obstacle épistémologique est une notion très forte. Elle ne nous semble pas suffisante à elle seule pour rendre compte efficacement de l'ensemble des ruptures, des erreurs résistantes rencontrées. C'est pourquoi, nous nous référons également à la notion de "connaissances locales" introduite par F. Léonard et C. Sackur [Léonard et Sackur, 1991]. L'élève placé devant une tâche nouvelle pour lui, problème à résoudre ou connaissance à apprendre, va organiser ses connaissances qui proviennent d'activités mathématiques antérieures en essayant de retrouver des contextes analogues à ceux rencontrés avant. Ces organisations plus ou moins pertinentes mais nécessaires au fonctionnement cognitif constituent des connaissances locales. "Les connaissances locales sont (...) des connaissances limitées. Au titre de connaissances elles sont *valides, cohérentes* et *efficaces*, mais, *limitées*, elles possèdent chacune de ces propriétés dans certaines limites que l'utilisateur ignore" [Léonard et Sackur, 1991]. Nous prenons en compte la localité des savoirs enseignés qui constitue un instrument important pour reconnaître et anticiper les difficultés que peuvent rencontrer les élèves dans de nouveaux apprentissages. En particulier, comme nous l'avons vu dans le paragraphe III de ce chapitre, "la *transposition didactique* [Chevallard, 1985] peut rendre compte de la détermination d'une localité de connaissances enseignées par des contraintes de contenu mathématique et de déterminants sociaux de différents niveaux" [Léonard et Sackur, 1991].

Les problèmes d'adaptation et d'apprentissage que nous étudions ici sont des problèmes qu'on ne peut espérer résoudre dans le court ou moyen terme, ni aborder de façon isolée. Nous rejoignons l'hypothèse de G. Vergnaud concernant l'apprentissage des concepts : "Il est nécessaire pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des champs conceptuels[8]. Etudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens" [Vergnaud, 1990]. Nous la prenons en compte, d'une part, pour construire des moyens opératoires afin d'étudier le fonctionnement cognitif des élèves en algèbre élémentaire et d'autre part, pour découper les contenus de connaissance en algèbre élémentaire en objets d'étude.

Ce qui précède pourrait laisser croire que nous voyons dans l'élève un pur sujet cognitif. Comme le paragraphe précédent le laissait supposer, il n'en est rien : le cognitif est ici une dimension essentielle et un appui pour étudier des phénomènes qui le transcendent en un certain sens. Nous renvoyons ici à l'approche anthropologique de Chevallard [Chevallard, 1992] : un élève ne se réduit pas à un sujet cognitif mais émerge en tant que personne de ses différents assujettissements institutionnels.

---

[8]Nous faisons référence à la notion de champ conceptuel définie par G. Vergnaud. Un champ conceptuel peut être défini comme un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion.

IV.2 PROFILS D'ÉLÈVES

Nous cherchons à comprendre et à décrire globalement le fonctionnement des élèves en algèbre. Il est important ici, vu la problématique adoptée, de ne pas positionner l'étude du fonctionnement des élèves par rapport à celui d'un expert potentiel, à un moment donné. Nous n'envisageons pas une analyse de type négatif, en termes de manques, de lacunes, d'erreurs. La compréhension de leur fonctionnement passe par la reconnaissance de *cohérences* plus ou moins globales, conformes ou non à notre attente d'enseignant de Première G.

Chaque élève a rencontré des contextes d'apprentissage divers. Il s'est construit une identité intellectuelle singulière en algèbre élémentaire, des connaissances et des pratiques personnelles, une logique propre de fonctionnement. En effet, chaque élève utilise les objets et outils de l'algèbre élémentaire depuis au moins quatre ans. Certains aspects de cet apprentissage ont été revus, peut-être en des termes différents, en BEP. Certaines connaissances algébriques initiales et locales ont peut-être trouvé dans le contexte spécifique de l'enseignement en BEP tertiaire des conditions pour être efficaces, valides et cohérentes. Dans le contexte d'enseignement en Première G, ces connaissances deviendront peut-être erronées. Ce sont tous ces éléments qui contribuent à la création des *rapports personnels* des élèves aux objets de l'algèbre, à la construction d'une fonction apparente de l'algèbre que nous voulons décrire. En particulier, nous étudions les comportements erronés comme l'une des composantes du fonctionnement global de l'élève participant à la cohérence du fonctionnement. Cette approche rencontre les préoccupations d'autres chercheurs tels que B. Charlot et E. Bautier [Charlot, Bautier et al, 1992 a], M.J. Perrin [Perrin, 1992], F. Léonard et C. Sackur [Léonard et Sackur, 1991].

Nous appelons "profil de l'élève" relativement à l'algèbre élémentaire une description des principaux traits de son comportement qui donnent un modèle intelligible des régularités et cohérences de fonctionnement et du rapport personnel de l'élève à l'algèbre, compte tenu des différentes formes du savoir algébrique.

IV.3 CONSTRUCTION DES PROFILS

Nous utilisons la structure d'analyse globale pour construire des moyens opératoires de diagnostic.

Pour ceci, nous construisons un ensemble de problèmes appelés tâches diagnostic mettant en jeu des tâches qui nous semblent caractéristiques du domaine de l'algèbre élémentaire [Vergnaud, 1987]. A chaque tâche sont associés un ou plusieurs types de traitement algébrique. Elles constituent les instruments de diagnostic.

Nous construisons une grille d'analyse de chaque activité algébrique pour décrire les productions des élèves selon les diverses composantes d'analyse. Nous présentons cette partie du travail dans les chapitre 3 et 4. Parallèlement, un logiciel dédié à la détermination des profils d'élèves, réalisé par des étudiants dans le cadre d'un projet de maîtrise, est en cours d'achèvement. Nous présentons le cahier des charges du logiciel dans le chapitre 8.

Cette partie du travail s'est avérée une phase cruciale de notre recherche. En effet, nous avons mis en évidence la nécessité de déterminer des valeurs locales de critères qui rendent compte des procédures personnelles de résolution des élèves en fonction des spécificités des tâches. L'analyse ne s'arrête pas là. Par regroupement de valeurs locales voisines nous pouvons définir a priori, composante par composante, des modalités qui décrivent des cohérences de fonctionnement des élèves en algèbre élémentaire.

A partir d'une analyse transversale des productions effectives sur l'ensemble des tâches diagnostic, nous définissons le profil de chaque élève dans le domaine de l'algèbre élémentaire, à son entrée en Première G. La description choisie est constituée :

- de deux indicateurs de la compétence algébrique dans ses dimensions objet et outil,
- des modalités relatives aux cinq composantes de caractérisation et aux classes de tâches qui décrivent, dans les grandes lignes, des cohérences locales ou globales conformes ou non au rapport institutionnel en Première G.

De plus, cette analyse transversale permet, pour un élève donné, de mettre en évidence les cadres de fonctionnement privilégiés et de les mettre en relation avec l'enseignement suivi antérieurement. Nous présentons cette partie dans le chapitre 6.

V. ETUDE DES CONDITIONS D'ACTION POUR UNE ÉVOLUTION DU SYSTEME.

En fait, la recherche menée autour de la construction d'une structure globale d'analyse ne s'y réduit pas. Nous cherchons, de façon exploratoire, à identifier des conditions d'action sur l'enseignement pour étudier les évolutions possibles des élèves.

V.1 UNE NÉCESSAIRE PRISE EN COMPTE DE L'HISTOIRE PERSONNELLE DE L'ÉLÈVE

Jusqu'à présent, nous avions décrit le comportement de l'élève à partir de son seul rapport personnel à l'algèbre. Ce n'est pas suffisant. Les élèves que nous étudions ont tous été à un moment de leur scolarité en difficulté, voire en échec scolaire. Notre expérience d'enseignante nous a montré la nécessité de prendre en compte des éléments plus généraux qui relèvent de façon plus globale du rapport au savoir et à l'école. Nous devons cerner quel sens ils donnent à ce qu'ils apprennent et aux façons d'apprendre. Ces éléments représentatifs des comportements d'élèves sont reliés à leur histoire scolaire.

Pour ceci, nous faisons référence à différents points de vue théoriques développés en didactique, notamment :

• au concept de "représentation métacognitive" introduit par A. Robert et J. Robinet, c'est-à-dire aux représentations des élèves sur ce que sont les mathématiques, la manière de les apprendre [A. Robert et J. Robinet, 1989] ;

• aux concepts de "rapport au savoir" (respectivement de "rapport à l'école") définis par B. Charlot, E. Bautier et J. Y. Rochex comme "une relation de sens, et donc de valeur, entre un individu (...) et les processus ou produits du savoir" (respectivement comme "une relation de sens, et donc de valeur, entre un individu (...) et l'école comme lieu, ensemble de situations et de personnes") [Charlot, Bautier et Rochex, 1992] ;

• au concept de "rapport au savoir" introduit par Y. Chevallard, en termes de rapports personnels à des objets institutionnels, ici des objets mathématiques conditionnés par les rapports qu'ils entretiennent avec d'autres objets liés à l'enseignement, en particulier, l'objet "école", l'objet "professeur", l'objet "activité mathématique", l'objet "métier d'élève".

Nous avons choisi de retracer, dans les grandes lignes, l'histoire personnelle des élèves venant de BEP. Pour ceci, nous avons exploité a posteriori les informations obtenues dans des entretiens et des questionnaires de début et de fin d'année scolaire, réalisés dans le cadre de leur suivi scolaire. C'est une description en termes positifs que nous faisons de leur réalité scolaire. Nous abordons en particulier la difficulté scolaire, "non pas comme une absence de réussite, mais comme expérience, événement spécifique, ayant une forme de rationalité. L'échec scolaire est événement, ou série d'événements, dans une histoire personnelle qui doit être pensée dans son contenu propre." [Charlot et al, 1992].

V.2 ETUDE EXPLORATOIRE DE CONDITIONS D'ÉVOLUTION DES PROFILS D'ÉLÈVES

La dernière partie de notre recherche consiste en une étude, tout à fait exploratoire, de conditions d'évolution des profils initiaux des élèves à l'entrée en Première G, au moins sur le moyen terme. L'évolution dépend du rapport personnel des élèves à l'algèbre, de leur rapport au savoir et à l'école mais aussi de l'enseignement global dispensé dans cette classe. Aussi, nous essayons d'en cerner certaines conditions d'évolution sur quelques situations particulières proposées au cours de l'année scolaire lors de séances-repères.

Pratiquement, nous analysons l'évolution d'un profil par l'étude des variations de l'ensemble des modalités le décrivant après chaque séance-repère. Ces séances-repères suivent la progression du programme mais doivent aussi donner aux élèves l'occasion de reconstruire des connaissances non encore complètement installées. Elles sont construites a priori autour de trois objectifs principaux :

• ménager des ruptures du contrat didactique qui soient négociables[9],

• essayer de faire bouger des connaissances ou des modes de fonctionnement pouvant entraver le processus d'adaptation au cycle long de l'élève,

• rechercher les résistances puis tester et mesurer le degré de résistance à l'évolution.

Pour construire les situations d'enseignement, nous avons retenu plusieurs approches :

• A partir des travaux de didactique des mathématiques développés autour de la théorie des situations de G. Brousseau [Brousseau, 1986] et de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres de R. Douady [Douady, 1984], nous avons conçu des situations-problèmes adaptées aux connaissances algébriques visées, laissant une large place dans leur gestion à des phases a-didactiques, pour permettre aux élèves de reconstruire diverses formes de compétence algébrique dans les dimensions outil et objet, dans des domaines d'emploi aussi diversifiés que possible (cf chapitre 7).

• Des études didactiques [Artigue, 1993], [Dagher, 1993], [Monnet, 1992] et [Schoenfeld 1990] ont montré qu'un environnement informatique (calculatrice ou calculateur formel pour les expressions algébriques, traceurs de courbes pour les fonctions, etc..) permet de favoriser l'apprentissage de certaines notions ou outils mathématiques. Nous les prenons en compte pour construire des situations d'enseignement susceptibles de provoquer une évolution des profils d'élèves. Cet argument sera repris dans le chapitre 7.

VI RETOUR SUR LES HYPOTHÈSES

En conclusion, compte tenu du questionnement initial, nous pensons qu'il y a un dysfonctionnement du système didactique et qu'il est possible d'en éclairer quelques noeuds en particulier :

• en identifiant des caractéristiques d'enseignement en BEP tertiaire qui participent aux difficultés d'adaptation des élèves,

• en concevant des moyens de diagnostic opératoires pour établir des profils d'élèves dans le domaine de l'algèbre élémentaire à leur entrée en Première G d'adaptation,

• en cernant de façon exploratoire des conditions d'évolution de ces profils sur le moyen terme dans le cadre d'un enseignement donné.

---

[9]En particulier, nous montrerons le rôle important joué par le professeur pour accompagner et aider les élèves à surmonter les difficultés liées aux nécessaires ruptures.

CHAPITRE 2

UNE STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE POUR L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Dans ce chapitre, nous définissons a priori une structure d'analyse multidimensionnelle pour l'algèbre élémentaire. Pour ceci, nous réalisons une synthèse non exhaustive des travaux de didactique dans le domaine algébrique en recherchant ce que les chercheurs entendent par compétence en algèbre élémentaire selon le domaine de problèmes algébriques abordés.

Dans le paragraphe I, nous présentons les fondements théoriques de la structure d'analyse en organisant la synthèse bibliographique selon deux axes principaux :

- la prise en compte du double statut *objet* et *outil* des objets mathématiques pour mettre en évidence les différentes formes de la compétence algébrique en fonction des différents domaines d'emploi et des différents types de tâche mis en jeu dans les problèmes à résoudre,
- la mise en relation du développement de la pensée algébrique, d'une part, avec une nécessaire rupture avec la pensée arithmétique, et d'autre part, avec le double caractère procédural et structural des concepts mathématiques.

Nous concluons ce paragraphe par une définition de la compétence algébrique qui nous semble adaptée à notre recherche.

Dans le paragraphe II, nous présentons les six composantes qui constituent la structure d'analyse multidimensionnelle pour l'algèbre élémentaire :

- *traitement algébrique*,
- *rapport arithmétique/algèbre*,
- *gestion du registre algébrique* et *articulation entre registre algébrique et les autres registres*,
- *fonction de l'algèbre dans l'activité mathématique* et *rationalité algébrique*.

Elles doivent permettre de réaliser à la fois une *analyse du côté enseignement et du côté élève*. Nous définissons la notion de critère associé à une composante d'analyse.

Dans les paragraphes III, IV, V et VI nous reprenons l'étude théorique pour définir les critères relatifs aux composantes et nous définissons l'ensemble des valeurs globales associées aux critères. Pour conclure, nous donnons une vue globale de la structure d'analyse.

I. LES FONDEMENTS THÉORIQUES DE LA STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE POUR L'ALGÈBRE

Nous essayons de définir a priori une structure du savoir algébrique élémentaire qui soit tout spécialement adaptée à notre recherche. Pour ceci, nous nous référons aux recherches didactiques relatives au domaine algébrique mais aussi à notre expérience d'enseignement.

Premièrement nous prenons en compte la distinction générale introduite par R. Douady [Douady, 1984] entre le double aspect *outil* et *objet* des concepts mathématiques. L'aspect *outil* est mis en jeu quand on utilise un concept pour résoudre un problème. C'est l'aspect *objet* qui permet de considérer un concept comme un objet culturel faisant partie de l'édifice des connaissances mathématiques d'un domaine en relation avec d'autres concepts.

Cette distinction nous mène à structurer le savoir algébrique autour de deux dimensions principales, naturellement non indépendantes :

• une *dimension outil* : l'algèbre est alors considéré comme un outil pour résoudre des problèmes émergeant dans des contextes internes ou externes aux mathématiques,

• une *dimension objet* : l'algèbre est alors considéré comme un ensemble structuré d'objets : inconnues, variables, paramètres, équations, inéquations, fonctions, ..., dotés de propriétés, de modes de traitement en particulier de nature formelle, de modes de représentation permettant ces traitements : écritures algébriques, graphes, notations fonctionnelles, ... Le savoir algébrique s'exprime alors en termes de statut d'objets algébriques, de compétences à les manipuler et à articuler leurs attributs syntaxiques et sémantiques.

Il est clair que notre présentation des dimensions outil et objet de l'algèbre se situe ici volontairement à un niveau élémentaire. En particulier, nous n'incluons pas dans la dimension objet les structures algébriques qui jouent un rôle essentiel à d'autres niveaux d'enseignement.

Le cadre historique de développement de l'algèbre confirme cette double dimension de l'algèbre, l'imbrication des développements de l'objet et de l'outil et permet de montrer que "l'outil n'acquiert et n'accroît son rendement qu'à faire lui-même l'objet d'une étude approfondie" [Chevallard, 1987].

Nous cherchons donc à définir des éléments caractéristiques de la pensée algébrique en resituant l'activité algébrique dans les deux dimensions *outil* et *objet*. Ce travail prend appui sur une synthèse des travaux de didactique réalisés dans le domaine algébrique. Nous ne chercherons pas à les présenter ici de façon détaillée, mais plutôt à pointer de la façon la plus synthétique possible, les éléments de ces travaux qui ont nourri le plus directement l'élaboration de la structure d'analyse.

Insistons sur le fait que, les regroupements de travaux réalisés suivant les deux dimensions résultent de notre reconstruction et sont effectués pour aider à structurer la diversité évidente des approches. En effet, les divers travaux de didactique conjuguent inévitablement les deux dimensions, même si les approches retenues relevant de cadres théoriques distincts, la façon dont s'y imbriquent ces deux dimensions peut revêtir des formes très diverses. Nous essaierons de le montrer avant, pour terminer de prendre en compte un élément essentiel transversal à ces deux dimensions : la rupture arithmétique/algèbre.

I.1. LA DIMENSION *OUTIL* DE L'ALGÈBRE

De nombreux auteurs ont souligné que l'algèbre intervient comme outil de résolution de problèmes dans des champs d'intervention divers, et ce, même au niveau de l'algèbre élémentaire. Nous voudrions mettre en évidence dans ce paragraphe, à la fois, les différents domaines de problèmes et les différents types de tâches couvrant les divers traitements algébriques que l'on peut rencontrer à ce niveau scolaire. Nous nous appuyons en particulier sur les travaux de G. Vergnaud et al [Vergnaud et al, 1987], Y. Chevallard [Chevallard, 1985, 1989], J. Gascon [Gascon, 1994], E. Harper [Harper 1987], Lee [Lee et Wheeler, 1987].

I.1.1 Le champ des "problèmes arithmétiques"

Historiquement, l'algèbre a émergé pour traiter des "problèmes arithmétiques" complexes mais isolés. Les problèmes les plus anciens remontent aux babyloniens[1]. En voici deux exemples, un problème babylonien (1700 av J.C) puis un problème résolu par Diophante :

"Un problème babylonien : "Mon côté, de la surface j'ai soustrait, 14.30 ; 1 l'unité tu poses. la moitié de 1 tu fractionnes 30 et 30, tu multiples 15 à 14.30, tu ajoutes 14.30.15 ; 29.30 est la racine carrée 30 que tu as multiplié, à 29.30 tu ajoutes 30 le côté du carré."
Ce problème est extrait de "Mathématiques au fil des âges", Gauthier-Villars Paris 1987.

Les babyloniens calculent en base 10 et 60, en langage moderne on écrirait donc $x^2-x=(14*60)+30$

Un problème de Diophante : "Diviser un nombre donné en deux nombres ayant une différence donnée". En langage moderne, on traduirait la démonstration de Diophante en : $x+x+40=100$ *équivaut à* $2x+40=100$ *équivaut à* $2x-+40-40=100-40$ *équivaut à* $2x=60$ *équivaut à* $x=30$.

[1] Sur ces premiers éléments d'algèbre, vient s'établir l'algèbre des mathématiciens arabes qui entraîne un important remaniement du domaine numérique avec l'introduction des nombres négatifs et des nombres décimaux (liés à la théorie des polynômes) puis celle des algébristes italiens qui conduit aux nombres imaginaires à partir de l'étude des équations algébriques.

Ici, les problèmes étudiés ont pour but la recherche d'un ou plusieurs nombres inconnus vérifiant les relations indiquées dans un énoncé en langue naturelle.

Cette entrée reste souvent privilégiée par l'enseignement. On propose aux élèves des "problèmes arithmétiques" dont la résolution algébrique est réalisée à partir d'une mise en équation. La résolution algébrique d'un problème passe alors par un *détour formel* qui requiert l'écriture de relations explicites entre données et inconnues puis la mobilisation de procédures de traitement quasi-automatiques pour trouver la solution. Cette entrée n'est pas sans poser de nombreuses difficultés soulignées par les différents chercheurs.

En effet, si les problèmes utilisés dans ces approches sont des problèmes compatibles avec une résolution arithmétique, cette résolution est alors privilégiée par les élèves du fait de leur familiarité avec ce domaine. Dans ces conditions, le détour algébrique ne s'impose plus comme une nécessité du contrat didactique, comme une exigence du "milieu". Mettre en évidence la valeur d'outil de l'algèbre suppose de résoudre des problèmes que les élèves ne parviennent pas à résoudre par des moyens purement arithmétiques.

Cette condition impose des problèmes relativement complexes, dès qu'on se limite à faire intervenir une inconnue, ce qui est souvent le choix effectué dans les débuts de l'algèbre. La structure linguistique de tels problèmes est elle-même complexe et de nombreuses recherches montrent l'inaccessibilité de la mise en équation aux débutants qui traduisent directement les énoncés sans se préoccuper des phénomènes de non-congruence sémantique [Chaiklin 1989], [Duval 1988].

G. Vergnaud a bien souligné le phénomène, d'une part en pointant que c'est seulement dans des situations représentables par des équations du type $ax+b=cx+d$ que la résolution algébrique apparaît plus opératoire que la résolution arithmétique, d'autre part en précisant un espace de problèmes, qui selon lui, sans être trop complexes, nécessitent le passage à l'algèbre : "ce sont les situations dans lesquelles il faut traiter plusieurs inconnues à la fois, comme c'est le cas dans les situations de partage inégal, lorsqu'une partie est exprimée en fonction de l'autre partie ou en fonction du tout" [Vergnaud 1987]. Soulignons que ces problèmes conduisent à la résolution de systèmes d'équations linéaires.

I.1.2 Le champ des problèmes numériques nécessitant une généralisation

1. Y. Chevallard voit en l'algèbre une généralisation de l'arithmétique, dans le sens où l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques. Le langage algébrique permet de mémoriser la genèse d'une expression numérique pour en déduire ses propriétés. L'algèbre s'oppose ainsi à l'arithmétique où une loi de simplification impose l'achèvement des calculs. Le calcul algébrique constitue un outil privilégié pour prouver des propriétés sur les nombres. Par exemple, on prouve à l'aide

des expressions 4p et $(p+1)^2 - (p-1)^2$ que la somme $(2p+1) + (2p-1)$ des deux nombres consécutifs impairs est d'une part un multiple de 4 et d'autre part une différence de deux carrés. De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique.

Exemple de problème : Prend trois nombres. Maintenant, calcule le carré du deuxième et soustrais lui le produit du premier et du troisième nombre. Maintenant fais le avec trois autres nombres consécutifs. Peux-tu l'expliquer avec d'autres nombres ? Peux-tu l'expliquer en utilisant l'algèbre ?

Chevallard et Conne [Chevallard et Conne 1984] proposent des problèmes de ce type à des élèves de fin de collège pour décrire l'utilisation qu'ils font du symbolisme algébrique comme outil pour prouver des propriétés numériques. Ils notent une inhabituelle facilité chez un des élèves à s'appuyer sur des représentations structurales et à les utiliser comme outils de pensée. Mais ils soulignent également que la plupart des élèves ont peu réussi à utiliser le symbolisme algébrique pour exprimer des propriétés générales.

Cette difficulté à exprimer des propriétés générales est aussi mise en évidence par d'autres chercheurs. En dépit de son intérêt mathématique indéniable, une telle entrée dans le champ algébrique ne va pas de soi.

2. Harper [Harper, 1987] utilise le développement historique du symbolisme algébrique comme cadre théorique pour analyser les différences qualitatives dans les capacités des élèves à généraliser des relations numériques. Rappelons brièvement ces trois étapes :

• Le premier stade celui de l'algèbre rhétorique (avant Diophante, 250 av J.C.) : on utilise le langage ordinaire pour résoudre des types particuliers de problèmes sans utiliser de symboles ou de signes spéciaux pour représenter les inconnues ;

• Le deuxième stade celui de l'algèbre syncopée (à partir de Diophante et jusqu'à Viète, 16$^{\text{ième}}$ siècle) : Diophante introduit des abréviations et des lettres pour désigner des inconnues pour résoudre des problèmes. Les lettres ne sont pas utilisées pour exprimer des propriétés générales.

• Le troisième stade celui de l'algèbre symbolique (à partir de Viète, 16$^{\text{ième}}$ siècle) : Viète utilise des lettres pour désigner des données. Il devient possible d'exprimer des solutions générales et d'utiliser l'algèbre comme outil pour prouver des propriétés numériques.

Harper établit un parallèle entre l'évolution historique de l'algèbre et le développement conceptuel de la pensée algébrique. A partir de l'étude des solutions des élèves relatives au problème de Diophante énoncé plus haut et transcrit en :

Si vous avez la somme et la différence de deux nombres quelconques, montrez que vous pouvez toujours trouver ces deux nombres.

Harper met en évidence trois types de solutions qui correspondent respectivement à la méthode rhétorique, à la méthode de Diophante et à celle de Viète :

• Méthode rhétorique : l'élève n'utilise pas le symbolisme algébrique mais propose une procédure générale de résolution.

• Méthode de Diophante : L'élève utilise des lettres qui ont le statut d'inconnue pour résoudre le problème dans un cas particulier, en spécifiant que cette méthode peut être utilisée pour n'importe quels nombres. Par exemple, x-y = 2 et x+y = 8

• Méthode de Viète : L'élève utilise des lettres à la fois pour des inconnues et des nombres donnés :

Soient deux nombres x et y
m somme de x et y
n différence de x et y
Equations générales : $m = x + y$
$n = x - y$

Sa recherche montre que la majorité des élèves de "high school" ne voit pas encore en l'algèbre un outil pour généraliser et pour prouver.

3. Ces résultats rejoignent ceux de Lee et Wheeler qui ont réalisé une étude des conceptions de la généralisation et de la justification des élèves portant sur 354 élèves de secondaire. Cette étude montre que la majorité des élèves de "high school" ne voient pas l'algèbre comme un outil pour généraliser et prouver [Lee et Wheeler, 1987].

En voici une illustration sur un des problèmes posés :

> Une fille multiplie un nombre par 5 et lui ajoute 12. Elle soustrait alors le nombre initial et divise le résultat par 4. Elle remarque que le résultat obtenu est supérieur de 3 au nombre initial. Elle dit : "je pense qu'il se passera la même chose quel que soit le nombre initial". En utilisant l'algèbre, prouver qu'elle a raison.

Pour ce problème, seuls 9 parmi les 118 élèves qui l'ont résolu ont adopté une formulation du type $(5x + 12 - x)/4$ et après calcul ont obtenu $x + 3$. Quatre de ces neuf élèves ont eu besoin pour se convaincre de substituer des valeurs numériques à x. Trente quatre élèves sont arrivés à $(5x + 12 - x)/4 = x + 3$ et ont simplifié le membre de gauche mais leurs conclusions ne reposent pas sur un travail algébrique.

De nombreux élèves formulent algébriquement de tels problèmes (peut-être pour des raisons de contrat comme évoqué plus haut) mais n'utilisent pas l'algèbre pour conclure ou bien reviennent dans le cadre numérique et se réfugient alors dans une preuve pragmatique. Ils n'ont visiblement pas "confiance" en une preuve réalisée dans le cadre algébrique.

I.1.3 Le champ des problèmes nécessitant une généralisation du patron Analyse/Synthèse

En se situant dans la perspective anthropologique développée par Y. Chevallard [Chevallard, 1992], Gascon [Gascon, 1994] interprète l'algèbre élémentaire comme un type particulier de "pratique mathématique" et la décrit à partir du développement de certaines techniques mathématiques, de types de problèmes qu'engendre le développement de ces techniques, et de "l'environnement technologico-théorique" qui permet de poser les problèmes.

Par une étude épistémologique approfondie, Gascon met en évidence la dimension incontournable de l'algèbre dans la résolution des problèmes arithmétiques, mais aussi dans les problèmes de construction géométrique, ceux de "dénombrement simple", de "lignes de niveau", et relie cette "incontournabilité" aux cas où le patron d'Analyse/Synthèse ne permet pas d'accéder au résultat[2].

Selon lui, les limitations du patron d'A/S comme technique mathématique tiennent à deux raisons essentielles :

(i) Le patron d'A/S s'avère inopérant pour résoudre tous les problèmes "isomorphes" à un problème donné, c'est à dire les problèmes que l'on obtient en permutant dans l'énoncé original certaines grandeurs données par des inconnues, sans changer la structure profonde du problème, c'est-à-dire, la symbolisation globale des conditions du problème.

(ii) Même s'il permet de chercher et de construire l'objet inconnu, il ne permet pas d'en trouver les *conditions d'existence*, ni de *construire d'autres objets* différents de celui demandé. En ce sens le patron d'A/S sépare le processus de recherche de celui de preuve. [Gascon, 1994]

Gascon le montre d'abord à partir d'un exemple typique de problème de construction géométrique. Le patron d'analyse/synthèse permet de résoudre le problème suivant[3] par construction de deux lieux géométriques [Gascon, 1994] :

(1) Construire à la règle et au compas un triangle ABC étant donné un côté c=AB, la hauteur h_c et la médiane m_c issues de C.

Gascon donne deux exemples de problèmes dans les cas géométrique et arithmétique qui ne peuvent être résolus avec le schéma A/S. Pour le problème (1), ce sont :

---

[2]Le patron d'analyse /synthèse, décrit par Pappus, comporte deux étapes : "un *raisonnement régressif* ou analyse qui part de l'objet inconnu d'un problème et aboutit aux données du problème ; et *un raisonnement progressif* ou *synthèse* qui fait le chemin inverse" [Gascon, 1995].

[3]Voici un autre exemple dans le cas d'un problème "arithmétique" (2) :

(2) Un homme met 5 heures et demie pour faire un trajet de 32 km. Il commence par marcher sur un terrain plat puis il monte une pente à la vitesse de 4 km/h. Il fait alors demi-tour et retourne au point de départ par le même chemin qu'à l'aller. Nous savons qu'il a marché pendant 4 heures (2 à l'aller et 2 au retour) sur le terrain plat et que la montée de la pente lui prend le double du temps de la descente. Calculer la largeur de la partie plate du trajet.

(1') Construire à la règle et au compas un triangle ABC étant donné le côté c=AB, la hauteur h_C issue de C et la médiane m_A issue de A (construction dans un cas donné).

(1") Déterminer un triangle ABC étant donné un côté AB, la hauteur h_C issue de C et la médiane m_A issue de A (détermination des conditions de constructibilité)

Pour les résoudre, il faut faire subir des variations au patron d'A/S : le "patron reformulé" pour (1') et, dans le cas général pour (1"), la "modélisation algébrique" [Gascon 1994].

Pour (1'), le point recherché n'apparaît plus comme l'intersection de lieux géométriques constructibles directement à partir des données du problème et il est nécessaire de recourir à une analyse auxiliaire qui permet de donner *l'expression symbolique des conditions du problème* pour un triangle donné. Il est possible alors de calculer l'inconnue, mais non de connaître *les conditions de son existence.*

Pour (1"), il est demandé de rechercher les conditions de possibilité de la détermination du triangle. Grâce aux travaux de Viète et de Descartes, l'introduction systématique de la représentation littérale permet de désigner aussi bien les quantités inconnues que les quantités connues et par la suite "de traiter des cas généraux et de pouvoir s'intéresser à la structure des problèmes, et non seulement à la simple obtention de l'inconnue" [Gascon, 1994]. La modification des énoncés fait alors apparaître les données comme des paramètres et amène à définir un *modèle algébrique* du système étudié.

C'est l'activité mathématique qui utilise des modèles algébriques en tant qu'outil d'étude de systèmes (mathématiques ou extra-mathématiques) qui est alors appelée par J. Gascon "algèbre élémentaire". L'algèbre s'impose selon lui comme un moyen de résolution de problèmes et possède les propriétés suivantes :

• Elle "consiste en l'étude d'un champ de problèmes qui contient, non seulement les problèmes "arithmétiques" (...), mais encore les problèmes de "construction géométrique", les problèmes de "dénombrement simple", de "lignes de niveau", etc" [Gascon, 1994].

• La méthode algébrique fournit une symbolisation globale de la relation entre les données et les inconnues d'un problème.

• Les lettres peuvent prendre des statuts différents (inconnue, nombre généralisé, variable). L'usage de paramètres dans des formules contribue à leur faire jouer un rôle de modèles algébriques du système sous-jacent au problème.

Gascon s'élève donc contre la vision de l'algèbre élémentaire comme une seule arithmétique généralisée. Dans le cadre de ce nouveau modèle qualifié d'"alternatif", Gascon explique l'une des raisons à son avis qui amène souvent à réduire l'"algèbre élémentaire" à cette "arithmétique généralisée" : l'identification de l'algèbre élémentaire à tort avec un des instruments ostensifs écrits[4] que met en jeu cette activité, en l'occurrence, le langage algébrique.

I.1.4 Le champ des problèmes extra-mathématiques

• Le travail de Gascon prolonge en un certain sens celui de Chevallard qui a posé lui aussi de façon plus globale la question de la fonctionnalité de l'algèbre à travers l'étude de ses domaines d'emploi [Chevallard, 1989a]. Il pointe deux domaines d'emploi privilégié de l'algèbre élémentaire : l'étude de domaines intra-mathématiques tels les systèmes de nombres (cité dans I.1.2.2) et l'étude mathématique des problèmes extra-mathématiques auquel il réserve le nom de *modélisation mathématique* (phénomènes physiques : le pendule simple [Chevallard, 1989a][5].

Il distingue deux registres d'entités : un système, mathématique ou non, comme registre du mathématisé et un modèle de ce système comme registre du mathématique. Le mathématisé fait alors fonction d'objet d'étude, le mathématique étant l'outil d'étude. Le travail du modèle permet de produire de nouvelles connaissances, ce processus pouvant être réversible et récurrent.

A partir de nombreux exemples, Chevallard montre comment "la notion de modélisation permet de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université" et il met en évidence des éléments essentiels à ses yeux de l'activité algébrique : l'activité de symbolisation et l'usage réglé de systèmes de signes à travers une pluralité coordonnée de registres sémiotiques. Chevallard indique que l'algèbre fournit un moyen plus puissant que l'arithmétique traditionnelle pour résoudre des problèmes, essentiellement lié :

- à l'usage des lettres pour désigner des quantités inconnues et à la possibilité de calculer sur les expressions littérales qu'elle conduit à former, au recours aux équations qui permettent de traduire des relations puis de résoudre,

- mais aussi à l'usage de lettres pour désigner des paramètres, variables du système étudié dont les valeurs sont supposées connues, afin d'étudier des solutions générales.

En résumé, "la fonctionnalité du calcul algébrique (...) suppose ainsi, précocement, l'emploi des paramètres ; suscite la réappropriation de la notion de formule (en mettant en avant autant leur production que leur mise en œuvre) ; et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant, avec la notion de fonction".

---

[4]C'est par l'expression d'instrument ostensif que Y. Chevallard désignent les objets écrits, oraux, gestuels ou matériels qui sont manipulés lors d'une activité mathématique. L'activité algébrique mobilise des instruments ostensifs essentiellement écrits par opposition à l'arithmétique qui elle mobilise de façon privilégiée des objets essentiellement discursifs [Chevallard 1989a].

[5]Nous distinguerons par la suite au chapitre 5 la modélisation de phénomènes physiques basés sur l'observation de la nature, de celle de phénomènes financiers décrits par des conventions qui régissent les rapports entre l'argent et le temps.

On retrouve des préoccupations analogues chez G. Vergnaud [Vergnaud, 1986], pour lequel l'introduction de l'algèbre comme outil de résolution de problème conduit aussi inévitablement, à partir de situations dites réalistes", à la question de la modélisation. Il regrette en particulier que l'enseignement n'accorde que peu de place à la modélisation et à la lecture des formules (formules de géométrie, de physique) en termes de relations entre variables.

I.1.5 Le champ des problèmes du cadre fonctionnel

Dans le contexte de l'enseignement secondaire, l'algèbre est l'un des outils essentiels qui entre en jeu dans la résolution des problèmes du cadre fonctionnel. Nous voulons montrer le rôle du déficit de l'algébrique dans le développement de la pensée algébrique, importance bien soulignée par A. Mercier dans sa thèse [Mercier, 1993]. Dans le paragraphe suivant, nous reviendrons en particulier sur deux éléments importants, le passage d'une conception des lettres comme inconnues à celle comme variables, la nécessaire rupture de la symétrie des formules.

I.2 LA DIMENSION *OBJET* DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Nous étudions maintenant les objets de l'algèbre élémentaire pour eux-mêmes et les besoins du développement interne de la théorie, même si celle-ci reste très limitée au niveau auquel nous nous situons. Dans l'enseignement actuel, il n'existe plus en particulier de théorisation en termes de structures algébriques qui permettrait de retravailler les ensembles de nombres à un autre niveau[6].

La dimension *objet* est donc organisée, d'une part, autour de la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes linéaires, et d'autre part, autour de l'approche du cadre fonctionnel. Nous abordons cette dimension sous deux angles :

• à partir des problèmes de statut de ces nouveaux objets, ce qui a donné lieu à de nombreuses recherches portant par exemple sur le statut des lettres [Kücheman, 1981], [Booth, 1984], [Kieran, 1994] ou bien menant à des analyses en termes de processus/objet [Sfard, 1991a]. Nous verrons que ces études mettent souvent en parallèle le développement de la pensée algébrique chez l'élève et le développement historique de l'algèbre.

• à partir de la dualité des expressions algébriques dotés à la fois d'une sémantique et d'une syntaxe, dualité qui joue un rôle essentiel dans la manipulation formelle. Dans cette

[6] Amorcée en Terminale sous les réformes des années 60, fortement renforcée en lycée, cette dimension structurelle a disparu dans les contre-réformes qui ont suivi.

approche, nous nous appuyons sur des travaux développés en EIAO[7] par J.F. Nicaud [Nicaud, 1993, 1994], sur ceux de J.P. Drouhard [Drouhard, 1992] et enfin sur ceux de F. Arzarello et son équipe [Arzarello, 1993].

I.2.1 Du côté du statut des objets de l'algèbre

I.2.1.1 Le statut des lettres

Dans les premiers travaux menés en didactique de l'algèbre, une attention particulière a été portée au statut des "lettres".

En arithmétique, les lettres sont déjà présentes. Elles désignent des unités de mesure ou des objets, par exemple $12m$ peut désigner 12 mètres ou bien 12 motos (la lettre m est alors utilisée comme étiquette). L'entrée dans l'algèbre s'accompagne d'un élargissement des significations : les lettres désignent maintenant des nombres, $12m$ signifiera aussi 12 fois le nombre de mètres, m désignant un nombre, et sont à ce titre engagés dans des calculs [cf. Booth 1984, Kieran 1991]. Le statut d'une lettre dépend donc du contexte et n'est pas réductible à celui d'étiquette. Ce changement de statut n'a rien d'évident pour les élèves, d'autant plus qu'il est marqué par la continuité des écritures ainsi que par des moyens pédagogiques discursifs usuels comme : pour faire comprendre que $2x+3x =5x$ on suggère de penser à x comme à des pommes, ce qui aplatit les nombres sur des étiquettes. Le passage d'une conception à l'autre peut donc constituer un obstacle important pour les élèves.

L'étude du problème "students-and-professors"[8] le met bien en évidence, via la fréquence observée des traductions non opératoires ou de type sténographique obtenues en dehors d'une réelle démarche algébrique [Kieran, 1992]. Nous reviendrons sur cette difficulté dans le paragraphe concernant la composante *articulation entre le registre des écritures algébriques et les autres registres*, à partir des travaux de Duval [Duval, 1988], et nous nous limitons ici à citer la recherche de Küchemann [Küchemann, 1981] qui fournit une synthèse des interprétations possibles associées aux lettres par les élèves :

- lettre évaluée : à la lettre est assignée une valeur numérique,
- lettre non considérée : la lettre est ignorée,
- objet concret : la lettre est considérée comme une étiquette,
- inconnue spécifique : la lettre désigne un nombre inconnu à rechercher,

[7]EIAO : Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur

[8] Ce problème "students-and-professors" a été posé par l'équipe de Clement [Clement, 1982] pour étudier ce phénomène. En voici l'énoncé :
Write an equation using the variables S and P to represent the following statement : "There are six times as many students as professors at this university." Use S for the number of students and P for the number of professors.

- nombre généralisé : la lettre peut prendre plusieurs valeurs,
- variable : la lettre est utilisée dans un contexte fonctionnel.

I.2.1.2 Le statut des objets nouveaux de l'algèbre

L'algèbre introduit de nouveaux objets tels que les expressions algébriques, les équations, les fonctions. Dans l'enseignement actuel, passée la phase d'initiation, le travail sur les équations puis sur les fonctions constitue celui où se développe le travail algébrique et où s'opère la maturation des objets. Les travaux de didactique se sont attachés aussi à l'étude des difficultés rencontrées par des élèves dans l'appréhension de ces nouveaux objets.

a. Les expressions algébriques

En arithmétique, les enchaînements opératoires ne sont pas traités comme des objets mais comme des processus de calcul permettant d'obtenir un résultat. Par exemple, 2(3+5) est un processus conduisant au nombre 16. Contrairement à l'arithmétique, l'algèbre ne permet pas généralement une distinction claire entre le processus de calcul et son résultat. Une expression algébrique ayant le statut de résultat peut conserver un signe opératoire et rester non évaluée, par exemple ce peut-être $x+3$. Pour certains élèves, cette rupture avec les pratiques arithmétiques constitue un obstacle durable : ils refusent d'accepter qu'une expression algébrique ayant statut de résultat, donc d'objet, conserve un signe opératoire : on peut trouver alors l'expression $x+3$ transformée en $3x$. Cette difficulté, identifiée par de nombreux chercheurs, est nommée le dilemme *process-product* par Davis [Davis, 1975] ou bien *acceptance of lack of closure* par Collis [Collis, 1974].

b. les équations

De nombreuses recherches ont pointé les décalages importants de réussite existant entre les différents types d'équation du premier degré. C'est particulièrement le cas entre les équations où l'inconnue est présente d'un seul côté et celles où l'inconnue est présente des deux côtés du signe d'égalité. Encore une fois, ces décalages ont été interprétés en liaison avec les pratiques arithmétiques.

En effet, pour résoudre des équations de la forme $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$, les élèves peuvent faire appel à des méthodes arithmétiques, même si des méthodes algébriques sont attendues.

En revanche, la résolution d'équations de la forme $ax + b = cx + d$ repose sur la conservation de l'égalité et ne peut plus mettre en jeu les seules méthodes arithmétiques. Il se produit alors une rupture pour les élèves appelée par Filloy et Rojano *didactical cut* [Filloy et Rojano, 1984].

c. Réification des objets

Il nous semble possible de relire ces difficultés de façon globale en nous appuyant sur le point de vue développé par A. Sfard.

Anna Sfard propose en effet un modèle de développement conceptuel aboutissant à une réification des expressions symboliques [Sfard, 1991a] qui s'appuie fondamentalement sur une distinction entre les dimensions structurale et opérationnelle des concepts mathématiques. Dans cette approche, concepts et conceptions sont différenciés, les conceptions étant définies comme des représentations, des associations évoquant des notions mathématiques abstraites. Les notions mathématiques abstraites peuvent être conçues de deux façons différentes, soit structuralement comme des objets, soit opérationnellement comme des processus. Plusieurs représentations reposant, soit sur une conception opérationnelle, soit sur une conception structurale, peuvent être associées à un même concept selon le contexte considéré. En particulier, une même expression algébrique peut avoir comme interprétations un ou plusieurs objets ou processus opératoires.

Considérons par exemple l'expression $3x+1$. Selon les contextes, $3x+1$ peut être interprétée de différentes façons :

• comme <u>un processus opératoire</u> : prendre un multiple de 3 et lui additionner 1;

• comme <u>l'expression générique</u> d'un nombre congru à 1 modulo 3 ;

• comme <u>le nombre résultat du processus opératoire</u> calculé à partir du nombre inconnu x ;

• comme <u>image de x par la fonction de la variable x</u>, qui à x associe $3x+1$;

• comme <u>chaîne de symboles ne représentant rien</u>, mais que l'on peut combiner à d'autres expressions en utilisant des règles bien définies.

Le même type d'analyse peut être fait pour les équations ou les fonctions [Sfard et al, 1991, 1992]. A. Sfard essaie de montrer que ces deux approches sont complémentaires et que *les processus d'apprentissage et de résolution de problèmes consistent en un jeu complexe entre les conceptions opérationnelle et structurale des concepts en jeu.* En particulier, la compétence en algèbre élémentaire est conçue comme une fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions et comme une capacité d'en faire des usages variés.

A. Sfard montre que dans le développement cognitif de l'élève comme dans le développement des concepts, en général, les conceptions opérationnelles précèdent les conceptions structurales, le passage des uns aux autres constituant un saut qualitatif exprimable en termes d'encapsulation et de réification. Les études expérimentales menées dans le domaine de l'algèbre et des fonctions l'amènent aussi à faire l'hypothèse que des approches sructurales trop précoces dans l'enseignement conduisent au développement de conceptions qu'elle qualifie de "pseudo-structurales". La flexibilité requise entre processus et objet par le travail mathématique est alors absente : les objets étant de pseudo-objets ne permettent pas par désencapsulation de remonter aux processus à leur source.

En algèbre, ces conceptions pseudo-structurales conduisent les élèves à percevoir les expressions algébriques comme des chaînes de symboles indécomposables et à priver de sens les manipulations formelles qui les régissent.

I.2.2 Du côté du traitement des expressions algébriques

I.2.2.1 Les trois niveaux sémantiques (J.F. Nicaud)

Dans le cadre du développement du système EIAO nommé APLUSIX dans le domaine de l'algèbre, J. F. Nicaud et al étudient un domaine algébrique de problèmes comprenant des problèmes de développement, factorisation ou réduction d'expressions polynomiales. Nicaud et al considèrent que l'activité mathématique nécessaire à la résolution de tels problèmes met en jeu à la fois un niveau syntaxique et trois niveaux sémantiques [Nicaud 1994]. L'étude de ces trois niveaux sémantiques permet d'analyser l'évolution du sens du calcul algébrique. Pour J. M. Gélis [Gélis, 1993], les objets mathématiques que représentent les expressions algébriques appartiennent à des modèles sémantiques partiels où l'on peut soit effectuer des calculs, soit justifier et valider des transformations opérées sur des expressions formelles, c'est-à-dire rendre signifiant le calcul algébrique.

Explicitons ce que J. F. Nicaud entend par niveaux sémantiques.

J. F. Nicaud définit un *domaine algébrique de problèmes* comme la donnée d'un ensemble d'objets D appelé le *domaine*, de fonctions de D^k dans D, ainsi que d'un ensemble de formes symboliques appelées expressions ou termes, servant à représenter les objets.

• Les expressions constituent la *composante syntaxique*. Les termes construits à partir de symboles de constantes, de symboles de variables et de symboles de fonctions répondent aux règles de formation et de transformation des expressions algébriques.

• Pour donner du sens à une expression algébrique, on peut donner des valeurs aux variables et calculer l'élément de D correspondant : D constitue le *premier niveau sémantique*.

• Ensuite, pour développer ou factoriser une expression algébrique, on transforme une expression algébrique en une expression référentiellement équivalente c'est-à-dire représentant le même objet mathématique, ici la même fonction de D^k dans D. Les étapes successives des transformations sont décrites par des égalités universellement quantifiées. La validation du résultat repose sur la recherche de la valeur de vérité des égalités successives. J. F. Nicaud parle du sens des inférences (*remplacement d'égaux*) qui permet de conserver les objets mathématiques, ici les fonctions D^k dans D représentées par les expressions. Cela définit le *deuxième niveau sémantique*. Donnons deux exemples :

Exemple 1 :
On demande de factoriser $x^2 - (2x - 1)^2$. Le terme $x^2 - (2x - 1)^2$ s'apparie au membre droit de l'identité[9] $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec la substitution {a —> x , b —> $2x$ -1} (cf. Nicaud, 1993). Le terme peut être remplacé par $[x + (2x - 1)][x - (2x - 1)]$.
L'égalité $x^2 - (2x - 1)^2 = [x + (2x - 1)][x - (2x - 1)]$ est vraie sur R.

Exemple 2 :
Résoudre dans R l'équation $x^2 - x = 2$, c'est rechercher les valeurs de x qui vérifient l'égalité. Nicaud considère "l'équation $x^2 - x = 2$ sur R (...) comme la représentation d'une fonction f de R dans {faux, vrai} telle que
f(-1) = vrai, f(0) = faux, f(1) = faux, f(2) = vrai,..." [Nicaud, 1993]

• Enfin, pour transformer des expressions, on a besoin d'utiliser des connaissances stratégiques de type "métarègle"[10], par exemple des classes de règles de transformation syntaxique, des plans de résolution. Ces connaissances permettent d'organiser les étapes d'un raisonnement stratégique et rendent significatif le calcul algébrique. Cela définit le *troisième niveau sémantique*.

Comme l'indique J. F. Nicaud, "on effectue un réel travail d'algèbre lorsqu'une partie significative de l'activité se situe à ce niveau (troisième niveau sémantique). Sans cela, l'algèbre est utilisée comme une simple notation." [Nicaud, 1993]

[9]L'identité correspond à l'égalité universellement quantifiée sur R, c'est-à-dire, pour tous réels a, b, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ [Nicaud, 1993]
[10]Nous utilisons le préfixe méta devant les mots règle (resp. connaissances mathématiques) pour désigner des éléments d'information ou de connaissances sur les règles (resp. sur les mathématiques), leur utilisation ou leur fonctionnement.

I.2.2.2 "Com-prendre" les écritures symboliques (J.P. Drouhard)

J. P. Drouhard développe un point de vue initialement introduit par D. Lacombe[11] et défend la thèse que "Com-prendre" les ESA (c'est-à-dire les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire), c'est prendre en compte ensemble leur *syntaxe*, leur *dénotation*, leur *sens* et leur *interprétation* [Drouhard, 1992]. J. P. Drouhard reprend les travaux de Frege [Frege, 1971] pour définir les concepts de *dénotation*, de *sens*, d'*interprétation* et de *connotation.*

• *Syntaxe d'une expression algébrique*

J. P. Drouhard construit un modèle de type *linguistique* pour décrire les expressions symboliques de l'algèbre élémentaire et les transformations formelles de réécriture. Il défend l'idée qu'on ne peut pas parler de la signification des expressions algébriques en faisant l'impasse sur leur syntaxe, comme si celle-ci allait de soi. Pour manipuler correctement des expressions algébriques, il est nécessaire, d'une part, de définir avec soin les conventions voire les implicites liées à l'écriture des expressions algébriques, par exemple, les trois fonctions du point multiplicatif[12], le rôle des parenthèses, le rôle implicite de la barre de fraction, la non présence de la constante multiplicative 1 et, d'autre part, d'étudier les transformations formelles portant sur les signifiants (expressions bien formées) associées aux règles algébriques portant sur les signifiés (nombres).

• *Dénotation, sens et interprétation d'une expression algébrique*

La notion de *dénotation* (c'est-à-dire référence) s'appuie sur la distinction établie par G. Frege entre sens (*Sinn*) et dénotation (*Bedeutung*). Par exemple, le nombre 2 a plusieurs écritures 4/2, (1+1), $\sqrt{4}$. Ces expressions réfèrent un même nombre, leur unique dénotation.

En revanche, les expressions n'ont pas le même *sens* puisqu'elles ne relèvent pas du même domaine de description ou du même point de vue. Le choix des transformations et procédures applicables à ces expressions en fonction de la tâche à réaliser dépend de leur sens. Les connaissances mises en jeu sont de niveau "méta".
Par exemple, les expressions $(x - 1)^2$ et $x^2 - 2x + 1$ ont la même dénotation. Par contre, les informations données par les écritures sont différentes et en particulier les transformations formelles qui leur sont applicables sont distinctes. Pour de nombreux

---

[11] D. Lacombe parle de "perte de sens" pour de nombreux élèves utilisant l'algèbre : "ils opèrent sur des écritures, ce qui les a privés du sens initial, et ils opèrent non pas d'après de véritables règles formelles, mais d'après des pseudo-règles de type juridique. Bien entendu, dans la mesure où le sens est coupé, il n'y a pas de sémantique approfondie et par conséquent la notion de vrai et de faux leur échappe."[Lacombe, 1988]

[12] Les trois fonctions du point multiplicatif sont : lever l'ambiguïté dans l'écriture d'un produit, agréger des facteurs ou marquer l'aspect interne de la multiplication.

élèves, la substitution de x^2-2x +1 par (x - 1)^2 est difficilement mise en oeuvre pour résoudre l'équation x^2+2x +1 = 0. Nous reprenons ce point de vue avec les travaux de F. Arzarello [Arzarello, 1993] dans le paragraphe suivant de ce chapitre et avec ceux de R. Duval [Duval 1992] dans le paragraphe V.1 de ce chapitre.

Une expression a pour *interprétation* dans un cadre[13] donné tout objet qui "correspond" à la dénotation de cette expression dans ce cadre. Considérons par exemple l'expression 2x - 3. Dans le cadre des fonctions de R dans R, 2x - 3 a pour interprétation la fonction : x —> 2x - 3.

• *Connotation*

En dernier lieu, J.P. Drouhard se place du point de vue de l'élève. Tout élève perçoit et interprète une expression algébrique d'une manière personnelle, qui dépend de son expérience scolaire, des situations au cours desquelles il a manipulé cette expression ou d'autres expressions. La notion de *connotation* désigne cette perception et cette interprétation subjectives.

Pour J. P. Drouhard, "l'"automathe formel[14]" est un élève qui ne tient pas compte, lorsqu'il manipule les expressions algébriques de l'algèbre élémentaire, de leur dénotation. Dans ce cas, la question de la validation du résultat ne se pose pas en terme de valeur de vérité de l'écriture obtenue, mais d'abord et avant tout en termes de conformité à des règles et à des procédures."

Il précise "*que ce n'est pas aider l'élève à "comprendre" les écritures qu'il manipule que d'exiger de lui qu'il revienne à tout bout de champ à cette sémantique*[15]*. S'il est indispensable, au début de justifier par les opérations sur les dénotations les transformations des écritures, c'est au contraire par la suite un facteur de confusion que d'"écraser" les niveaux en réduisant tout discours sur les signifiants à des discours sur les signifiés.*

(...) Les élèves doivent certes pouvoir donner, ***à chaque fois qu'ils le désirent****, une dénotation, un sens, une interprétation aux écritures qu'ils manipulent. Mais ce recours à la signification doit demeurer optionnel. L'algébriste compétent cesse à certains moments d'interpréter ces calculs, et c'est cette "suspension du sémantique" qui fait précisément la force de l'algèbre. (..) Il faut donc que l'élève, certaines fois, puisse* ***ne pas*** *interpréter les écritures, et donc les considérer d'un point de vue purement syntaxique."*

---

[13]Le mot "cadre" est utilisé dans l'acception que lui donne R. Douady [Douady, 1984]
[14]Le terme "automathe" est emprunté à Stella Baruk [Baruk, 1985]
[15]La sémantique des expressions : dénotation, sens, interprétation.

Ces concepts définis dans une perspective linguistique sont aussi utilisées par R. Duval [Duval, 1988] pour étudier la gestion des représentations symboliques. Nous étudions son point de vue au paragraphe V.1 de ce chapitre.

I.2.2.3 L'algèbre comme un jeu d'interprétations (F. Arzarello, 1993)

F. Arzarello et al[16] [Arzarello, 1993] utilisent un point de vue analogue à J.P. Drouhard et définissent un cadre théorique pour analyser les processus cognitifs mis en jeu dans la résolution de problèmes d'algèbre. Pour eux, l'approche épistémologique [A. Sfard, 1991] est trop large pour expliquer complètement la dynamique des processus de pensée en algèbre. Il est nécessaire d'intégrer les notions de *dénotation* et de *sens* introduites par Frege pour analyser localement l'activité algébrique. Arzarello définit la notion de "*frame*"[17] qui opérationnalise localement les notions de dénotation et de sens à la résolution de problèmes. Contrairement à la définition donnée par J.P. Drouhard, la *dénotation* d'une expression algébrique est liée à un cadre et correspond à un objet du cadre c'est-à-dire à une *interprétation* d'une expression algébrique dans l'acception de Drouhard.

Un *frame* est un cadre de travail associé à une *structure de données* à l'intérieur duquel le sens et la dénotation appropriés des expressions algébriques sont activés par les élèves pour en donner des représentations stéréotypées mais adaptées au contexte de résolution. Donnons en une illustration à partir de l'analyse de la solution du problème ci-dessous donnée par un élève : Bob.

Enoncé du problème :
Rechercher si parmi les rectangles d'aire donnée, il y en a un dont le périmètre est minimum. Justifier vos assertions.

Bob a écrit la formule $S = bh$ puis a donné plusieurs valeurs numériques de b et h pour une aire donnée ; après avoir écrit la formule $S = xy$, il a exprimé le demi-périmètre comme $x+S/x$ et a calculé la dérivée pour trouver le minimum.

Dans cette résolution, diverses formes de changement de structures de données sont utilisées :

- après avoir effectué des calculs numériques, c'est-à-dire après avoir conçu l'expression en extension, Bob passe d'une formule dans le cadre numérique à une formule dans le cadre fonctionnel,

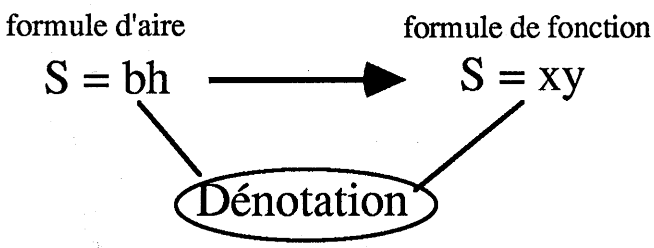
- Bob remarque que dans cette écriture y peut s'exprimer en fonction de x, ce qui lui permet d'exprimer la relation du demi-périmètre en fonction de x.

---

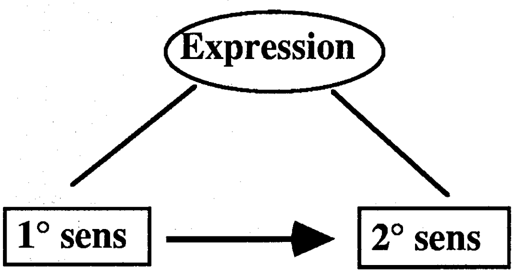
[16]L'équipe de recherche est constitué de F. Arzarello (Département de Mathématiques, université de Turin), de G. Chiappini (IMA, CNR Genova) et de Luciana Bazzini (Département de Mathématiques, université de Pavia)

[17]Le terme *frame* est repris du même terme en IA.

La réécriture de la formule réalisée par Bob marque un changement de *frame* à savoir celui des formules à celui des formules fonctionnelles. Le sens change dès que la dénotation de la formule change à cause du changement de *frame*.



(approche en extension par valeurs numériques)



Un "*frame*" peut donc être considéré comme une sorte d'histoire condensée qui a ses scripts et où l'élève peut déclencher un algorithme de résolution.

L'activité algébrique est conçue comme un *jeu d'interprétation* à l'intérieur d'un *frame* ou pour passer d'un *frame* à un autre ce qui rend disponibles (ou inhibe) les transformations algébriques appropriées pour transformer les expressions algébriques ; "Une fois qu'un *frame* est activé, l'élève produit un texte (raisonnement et expression) comme résultat de son interprétation et le processus de résolution du problème consiste en la production de nouveaux textes selon les *frames* qui ont été successivement activés" [Arzarello, 1993]. La notion de *connotation* correspond à la façon dont l'élève mène l'activité d'interprétation. Cet aspect de l'activité algébrique est crucial pour activer les frames et mettre en œuvre les processus de résolution (anticipation et contrôle) ainsi que les procédures de traduction algébrique

F. Arzarello montre que ces concepts sont des outils assez souples pour décrire la dynamique de la pensée algébrique et constituent un moyen d'accéder au système sémiotique construit par l'élève, au statut des lettres (qui constitue implicitement une forme de prédication) mais aussi à d'autres éléments du langage privé de l'élève (statut attribué au signe d'égalité, ...).

I.3 LA PRISE EN COMPTE DES DEUX DIMENSIONS

En fait, si quelques travaux sont plus spécifiques de telle ou telle approche, par exemple la dimension *objet* avec les travaux de Nicaud ou de Drouhard, la dimension *outil* dans les premiers travaux de Chevallard, l'évolution des travaux semble conduire inévitablement à conjuguer les deux dimensions, même si les cadres théoriques dans lesquels se situent les travaux ne les amènent pas à s'exprimer en ces termes. Donnons en quelques exemples :

• Les dimensions outil et objet sont bien sûr au centre des travaux de R. Douady s'exprimant en termes de dialectique outil/objet et de jeux de cadres [Douady, 1994].

L'algèbre est considérée d'abord comme un outil de modélisation pour des problèmes situés dans d'autres domaines. La traduction algébrique des problèmes fournit alors des problèmes algébriques qui prennent leur sens dans le domaine d'origine. Dans ce cas "les situations ou les problèmes dans lesquels évoluent des notions mathématiques sont générateurs de sens pour ces notions d'un certain point de vue que nous appellerons sémantique"[18].

Le cadre algébrique est défini comme un domaine scientifique autonome. Dans cette deuxième perspective, il génère des problèmes dans lesquels la dialectique outil/objet interne au cadre algébrique ou en interaction avec d'autres cadres mathématiques permet de développer des objets de l'algèbre. Ce travail nécessite "de respecter un ensemble de règles internes aux mathématiques et différents modes d'expressions. Il s'agit d'une autre composante de sens que nous appellerons syntaxique".

La compétence algébrique s'évalue dans la capacité à traduire algébriquement un problème dans le ou les cadres mis en jeu puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à la résolution. Les outils sont mobilisés dans des *fenêtres conceptuelles*, c'est-à-dire, dans "l'ensemble des parties de cadres qu'un élève fait interagir ou combine pour étudier le problème qui lui est soumis" [Douady, 1994]. Le travail de modélisation algébrique est une occasion particulièrement favorable pour permettre aux élèves d'associer une signification aux objets de l'algèbre et à leurs représentations symboliques.

R. Douady insiste beaucoup sur l'importance accordée à la construction du sens des notions mathématiques chez les élèves pour qu'elles soient disponibles lors de la résolution d'un problème. Mais pour l'algèbre, le sens ne suffit pas. "On a besoin de prendre en compte l'influence du sens dans l'élaboration d'algorithmes et en même temps de travailler à s'en détacher. C'est en terme d'équilibre entre la construction du sens et la familiarité technique avec des algorithmes "que se conçoit" conçoit l'apprentissage de l'algèbre" [Douady, 1994]. Pour R. Douady, les erreurs persistentes et récurrentes des

[18]Cette composante de sens est externe : on ne doit pas la confondre avec la sémantique interne aux expressions algébriques au sens de J.P. Drouhard [Drouhard 1992].

élèves seraient liées, en général, à un travail sur des écritures coupées des problèmes qui en font l'intérêt et qui leur donnent du sens [Douady, 1994].

• Arzarello et al, comme nous l'avons décrit ci-dessus, conçoivent l'activité algébrique comme un *jeu d'interprétation* à l'intérieur d'un *frame* ou pour passer d'un *frame* à un autre, cette notion de frame présentant sans doute des parentés avec celle de fenêtre conceptuelle de R. Douady. A l'intérieur du *frame,* le sens et la dénotation appropriés des expressions algébriques sont activés par les élèves, ce qui rend disponibles (ou inhibe) les transformations algébriques appropriées pour traiter les expressions algébriques.

• Vergnaud reprend l'idée que l'algèbre est un outil pour résoudre et traiter des situations, ainsi qu'un ensemble d'objets nouveaux (équations et inconnues, fonctions et variables, ...). En s'appuyant sur la théorie des champs conceptuels, il développe l'idée que dans une phase d'introduction à l'algèbre, il faut utiliser des situations qui conduisent l'élève à comprendre et à respecter le caractère symétrique et transitif du signe d'égalité, tout en introduisant les règles élémentaires de manipulation des équations qui conservent l'égalité. La notion de script-algorithme, qui est un schème particulier, renvoie ici à la fois, à la forme et au sens des procédures de manipulation des équations.

• Chevallard, Mercier et Gascon développent une approche de l'algèbre en termes d'ostensifs (écrits, gestes, discours) pilotés par des non-ostensifs, dans une approche plus globale en termes de tâches/techniques, technologie et théorie.

Dans ce contexte, la fonctionnalité de l'algèbre apparaît à travers les types de tâches répertoriées comme faisant partie du domaine de l'algèbre (cf. Gascon I.1.3), le caractère objet apparaissant à un premier niveau à travers les techniques développées pour résoudre les types de tâches, ces techniques étant relayées à des niveaux supérieurs par la technologie et la théorie (ici, au niveau élémentaire, l'algèbre semble devoir plus être considéré comme technologie que comme théorie).

I.4 LA RUPTURE ÉPISTÉMOLOGIQUE ENTRE L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE

De nombreux chercheurs, nous l'avons vu, ont été amenés à partir de l'étude des difficultés résistantes rencontrées par les élèves ou à partir d'études épistémologiques à poser la question des rapports entre l'arithmétique et l'algèbre. Ils ont mis en évidence que la pensée algébrique se construit sur le support de la pensée arithmétique mais aussi en rupture avec cette dernière. Ceci intervient aussi bien dans l'analyse en termes d'outil : opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à la résolution algébrique (détour algébrique), que dans l'analyse en termes d'objet : opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres), des modes de contrôle dans la transformation des écritures.

Nous voudrions pour terminer cette synthèse revenir sur cette rupture.

1. G. Vergnaud [Vergnaud, 1987] évoque une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre :

"*d'une part l'introduction d'un détour formel dans le traitement des problèmes habituellement traités intuitivement, d'autre part, l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable, ...*" [Vergnaud, 1987].

En ce qui concerne l'opposition entre la démarche de résolution arithmétique et la démarche de résolution algébrique, les principales ruptures identifiées par les chercheurs sont les suivantes :

• la démarche de résolution arithmétique consiste *à rechercher puis à calculer les inconnues intermédiaires dans un ordre convenable* par des stratégies souvent attachées au contexte ;

• la démarche de *résolution algébrique* consiste à *représenter formellement* le problème (relations entre les inconnues et données) puis à utiliser des procédures de traitement formel pour trouver la solution. Dans ce cas, il faut accepter, à certains moments, un contrôle formel et non un contrôle par le sens et garder la confiance que la solution trouvée est interprétable et juste.

"Lorsqu'on fait un raisonnement arithmétique, on part du connu pour aller vers l'inconnu. (...) Lorsqu'on fait de l'algèbre, on inverse la démarche : en désignant le nombre inconnu par une lettre, on le manipule comme s'il était connu et on transpose l'énoncé sous une forme accessible à un traitement algébrique" [G.R.E.M, 1988]. En particulier, la mise en équation d'un problème nécessite les opérations inverses de celles utilisées en arithmétique.

Par exemple, pour l'énoncé suivant :

"Quand 5 est additionné à 2 fois un certain nombre, la somme est 35."

• <u>Résolution arithmétique :</u> On *soustrait* 5 à 35 puis on *divise* le résultat par 2.

• <u>Résolution algébrique :</u> On recherche un nombre x vérifiant la relation $2x+5 = 35$. Ici, la mise en équation nécessite l'*addition* et la *multiplication*, opérations inverses de la soustraction et de la division.

En ce qui concerne les nouveaux objets ou le changement de statut d'objets anciens, le statut du signe d'égalité pose un problème de rupture essentiel :

Le signe d'égalité peut en effet avoir un double statut. Il peut désigner soit l'annonce d'un résultat, soit une relation d'équivalence.

En arithmétique, le signe d'égalité est d'abord utilisé comme signe d'annonce de résultat. Son rôle dominant est un rôle de production même s'il ne peut être réduit à ce rôle (puisque par exemple, on trouvera à côté d'écritures $4 + 3 = 7$ où le signe = est vu comme signe de production des écritures comme $4 + 3 = 6 + 1$ où le signe = est vu comme relation).

En revanche, quand on travaille sur les objets de l'algèbre, une grande partie des tâches repose sur des transformations d'égalités à dénotation fixe mobilisées en faisant varier le sens des expressions. C'est le cas dans la résolution des équations ou dans la recherche d'identités. Le signe d'égalité traduit alors nécessairement une relation d'équivalence.

Or après le début de l'enseignement de l'algèbre, pour certains élèves, le signe d'égalité se limite souvent au sens initial dominant en arithmétique [Vergnaud, 1987], [Cortès 1992]. "The equal sign is read as "it gives" that is a left-to-right directional sign" [Kieran and al, 1991].

Ce statut peut conduire à des écritures incorrectes par rapport au signe d'égalité, par exemple, 50-24=26+12=38 : la symétrie et la transitivité du signe d'égalité se trouvent alors violées.

Ce statut peut surtout constituer un obstacle pour l'acquisition des nouvelles démarches algébriques. En particulier, penser que le membre droit d'une égalité doit indiquer un résultat, peut permettre aux élèves de donner du sens aux équations telles que $2x + 3 = 7$, mais non aux équations telles que $2x + 3 = x + 4$ [Kieran and al, 1991]. Dans ce dernier cas, les transformations d'égalités doivent reposer sur la conservation de l'égalité.

2. On retrouve une analyse de même type chez C. Kieran [Kieran 1992, 1994] qui reprend le même point de vue et présente les difficultés des élèves en algèbre comme une conséquence de son introduction comme une *généralisation* de l'arithmétique. Elle développe ensuite les continuités et discontinuités entre arithmétique et algèbre.

Les fausses continuités résident dans :

• le partage des mêmes symboles et signes (signes d'égalité et d'opérations) n'ayant pas la même interprétation,

• la présence de lettres n'ayant plus la même signification selon le contexte.

Les discontinuités sont à relier :

• à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes (cf. Vergnaud),

• à l'utilisation de nouveaux objets, voire la mise en jeu de conceptions d'ordre structural et non plus procédural des objets (mémorisation d'un calcul et non plus effectuation du calcul, process-product dilemna de Davis, 1975),

• à la représentation formelle des problèmes par des équations et à l'utilisation de procédures formelles nouvelles pour les résoudre (didactical cut de Filloy et Rojano, 1984).

I.5 SYNTHÈSE : LA COMPÉTENCE ALGÉBRIQUE

L'étude théorique précédemment développée met bien en évidence *la structure multidimensionnelle de la connaissance algébrique.* Une définition de la compétence algébrique doit pouvoir décrire des capacités hétérogènes qui ne peuvent être saisies que dans une *analyse qualitative et multidimensionnelle.* Dans le cadre de notre recherche, nous définissons les différentes formes de la compétence algébrique comme suit :

• Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet* :

- sur le plan *outil,* la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution. Différents contextes, différents domaines d'emploi mettent en jeu la dimension *outil* de l'algèbre aussi bien dans des tâches de résolution que de preuve, l'"arithmétique traditionnelle" n'en étant qu'un parmi d'autres. Un intérêt tout particulier est porté aux capacités à utiliser l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques.

- sur le plan *objet,* il est nécessaire de prendre en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. La signification d'une expression algébrique réside à la fois dans sa syntaxe, sa dénotation, son interprétation en liaison avec les cadres mathématiques en jeu et ses sens. La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.

A ce niveau scolaire, nous devons prendre en compte deux autres éléments pour évaluer la compétence algébrique :

• L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique [Vergnaud, 1987], [Kieran, 1992].

• L'efficacité algébrique requiert une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et structural et à développer une nécessaire fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions pour en faire des usages variés [Sfard, 1992], [Harper, 1987], [Vergnaud, 1986].

II.LA STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE

A partir des éléments théoriques présentés ci-dessus, nous avons construit une structure d'analyse multidimensionnelle des connaissances algébriques.

II.1 LES COMPOSANTES

Cette structure est organisée autour de six composantes qui doivent permettre à la fois de réaliser une *analyse du côté enseignement et du côté élève.*

II.1.1 Une composante d'identification/évaluation

La première composante appelée *traitement algébrique* joue un rôle préalable aux cinq autres. Elle a pour objectif :

• de situer et de comparer les différents types de tâches algébriques privilégiés dans chaque institution, à la fois d'un point de vue *outil* et *objet*, et leurs degrés respectifs de complexité,

• d'évaluer les productions des élèves en termes de réussite/échec, dans les grandes lignes, selon chaque type de tâche proposée, en fonction de la solution attendue dans une institution donnée.

II.1.2 Cinq composantes de caractérisation

Les cinq autres composantes ont pour fonction d'identifier et de décrire des caractéristiques importantes, des cohérences locales aussi bien dans les rapports institutionnels à l'algèbre que dans le fonctionnement cognitif et les rapports personnels que les élèves développent vis à vis de l'algèbre. Pour décrire ces cohérences, nous avons été obligée de prendre en compte des éléments qui ne sont pas complètement internes à l'algèbre.

• La composante *rapport arithmétique/algèbre* vise à positionner l'activité algébrique par rapport à celle en arithmétique.

• Les composantes *gestion dans le registre des écritures algébriques* et *articulation entre registre des écritures algébriques*[19] *et les autres registres* prennent en compte les aspects sémiotiques de l'algèbre. En effet, faire de l'algèbre nécessite, selon le type de tâche, de savoir manipuler formellement les représentations symboliques des objets dans le registre algébrique, d'interpréter ou de produire des expressions ou des relations algébriques dans l'articulation avec d'autres registres sémiotiques. Les composantes *gestion dans le registre algébrique* et *articulation entre le registre algébrique et d'autres*

---

[19]Par abus d'écriture nous écrirons dorénavant registre algébrique à la place de registre des écritures algébriques.

registres sémiotiques visent respectivement à étudier la gestion des expressions dans le registre des écritures algébriques et la gestion des représentations symboliques dans l'articulation entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres.

• La composante *fonction de l'algèbre* a pour rôle de pointer différentes formes d'activité algébrique, différents rapports institutionnels ou personnels à l'algèbre.

• La composante *rationalité algébrique* a pour rôle de cerner le niveau de rationalité mis en jeu dans l'activité algébrique aussi bien du côté élève que du côté enseignement.

II.2 DÉFINITION DES CRITÈRES

Pour opérationnaliser la structure d'analyse multidimensionnelle, nous associons à chaque composante un ensemble de critères. Leur choix est essentiel pour permettre d'analyser de façon pertinente

• les rapports institutionnels à l'algèbre dans les classes de BEP et de Première G d'adaptation,

• les comportements des élèves et leur sens.

Nous avons choisi les mêmes critères (ou des critères jouant un rôle symétrique) pour atteindre ces deux objectifs. Leur choix est fondé sur des hypothèses qui seront validées ou non dans la confrontation entre les analyses a priori et a posteriori réalisées dans le cadre des expérimentations respectives.

II.2.1 Valeurs globales des critères

A chaque *critère* est associé *un ensemble de valeurs possibles* fixées a priori à partir de l'étude bibliographique. Ce sont les valeurs *globales* des critères. Ces valeurs peuvent être différentes selon les objectifs d'analyse, du côté enseignement ou du côté élève.

Voici une représentation de l'arborescence de la structure d'analyse :

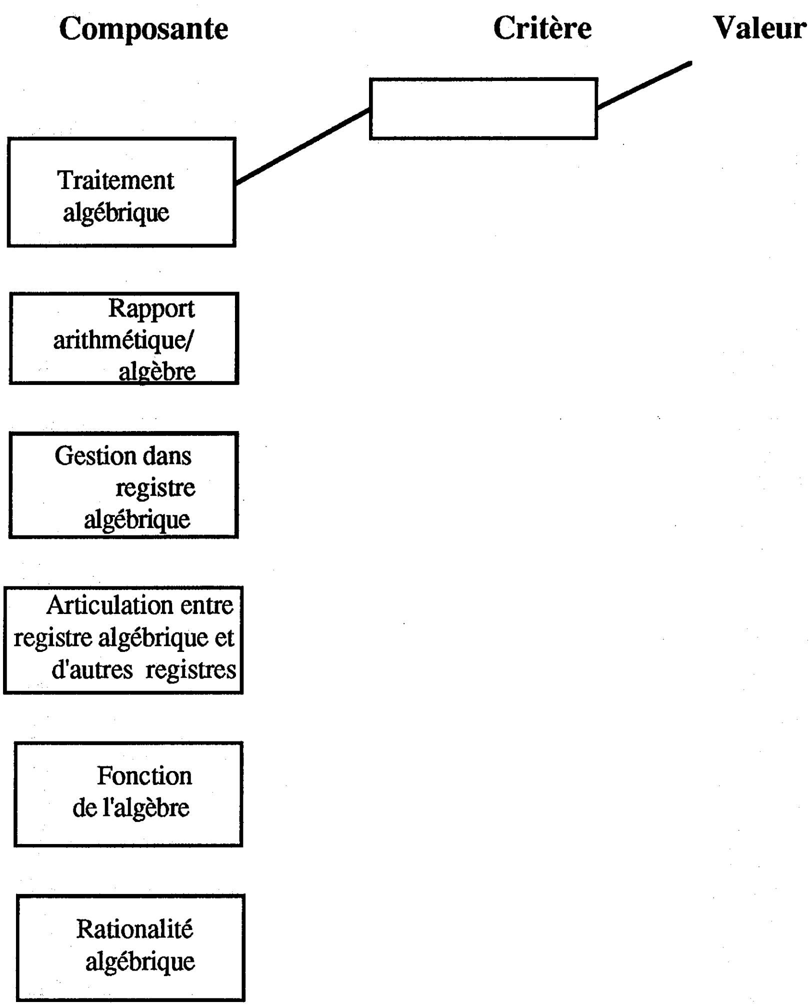


Schéma n°1 : Représentation arborescente décrivant l'organisation de l'analyse

Nous définissons les critères associés à chaque composante et les valeurs globales respectives dans les paragraphes III (*traitement algébrique*), IV (*gestion dans registre algébrique* et *articulation entre registre algébrique et les autres registres*) et V (*fonction de l'algèbre* et *rationalité algébrique*) de ce chapitre.

Illustrons l'organisation de l'analyse pour la composante *rapport arithmétique/algèbre*.

• Les quatre *critères* d'analyse pour la composante *rapport arithmétique/algèbre*[20] sont les suivants :

- la démarche de résolution,
- le statut du signe d'égalité,
- le statut des lettres,
- les objets algébriques et leur statut.

• Le tableau ci-après résume l'ensemble des *valeurs globales* que peut prendre chacun des critères. Ce sont les mêmes valeurs dans les deux contextes d'analyse.

[20] Ce choix sera explicité dans le paragraphe II.2.4

Critères	Valeurs
Démarche de résolution	Démarche arithmétique Démarche algébrique
Statut du signe d'égalité	Signe d'annonce de résultat Signe de relation d'équivalence
Statut des lettres	Objet (abréviation, lettre, mesure, ...) Nombre (inconnue, nombre généralisé, variable, ...)
Objet et statut	Structural (voir paragraphe II.2.4) Procédural Pseudo-structural

II.2.2 Valeurs locales des critères

Cette structure d'analyse multidimensionnelle a été utilisée dans deux contextes :

• pour déterminer les rapports institutionnels à l'algèbre correspondant aux classes de BEP, de seconde indifférenciée et de Première G d'adaptation, nous avons analysé plusieurs types de données, les textes officiels des programmes mais aussi les cahiers de cours, d'exercices des élèves, les sujets de BEP tertiaire et les problèmes de l'EVAPM de seconde indifférenciée ;

• pour élaborer des moyens de diagnostic, en l'occurrence, un ensemble de dix-neuf tâches diagnostic et une grille d'analyse des productions d'élèves.

La conception des tâches diagnostic, l'analyse a priori de ces tâches, l'analyse a posteriori des productions d'élèves ont montré la nécessité d'ajouter aux valeurs globales définies a priori des valeurs appelées *locales*. En effet, les valeurs globales définissent des catégories qui, dans certains cas, s'avéreront trop larges pour saisir, avec la finesse requise, tant les caractéristiques des tâches que les procédures de résolution effectivement mises en jeu par les élèves. Ces valeurs locales joueront en particulier un rôle essentiel dans la mise en évidence de cohérences locales sur les plans institutionnels et cognitifs. En particulier, après un travail long et minutieux, voire fastidieux, nous regrouperons des valeurs locales voisines pour définir, composante par composante, des modalités de fonctionnement qui décrivent, de façon plus synthétique, des cohérences de fonctionnement relatives à l'algèbre élémentaire (cf. chapitre 6). Ces modalités permettront de définir les profils d'élèves.

Ainsi à chaque tâche, nous associons une grille descriptive, tableau résumant les composantes de la structure d'analyse nécessairement ou potentiellement mises en jeu dans la tâche, les critères correspondants ainsi que leurs valeurs possibles globales ou locales.

De même, nous rendons compte du fonctionnement d'un élève dans une tâche donnée par un tableau résumant les valeurs globales ou locales des critères associés à l'ensemble des composantes.

Nous définissons maintenant les critères associés à chaque composante ainsi que l'ensemble de leurs valeurs globales, composante par composante, en nous appuyant sur une étude bibliographique des travaux de didactique des mathématiques concernant les différents composantes.

III. LA COMPOSANTE *TRAITEMENT ALGÉBRIQUE*

Pour comparer l'activité algébrique privilégiée dans chaque institution et évaluer les productions des élèves en termes de réussite/échec en fonction d'une solution algébrique a priori, nous avons catégorisé différents types de tâches algébriques en liaison avec différents types de traitement algébrique.

Nous appelons *type de traitement algébrique* un traitement algébrique, attendu à un niveau scolaire donné, qui caractérise la résolution d'une tâche algébrique donnée. Pour un même type de traitement algébrique, nous envisageons différents niveaux de traitement possibles. A chaque tâche algébrique peuvent être associés un ou plusieurs types de traitement algébrique.

Nous catégorisons donc différents types de tâches algébriques en fonction du ou des types de traitement associés. Les types de tâches recouvrent diverses formes d'activité algébrique dans les dimensions *objet* et *outil*. Insistons sur le fait que l'ensemble des types de tâches algébriques n'est que partiellement ordonné.

Nous sommes consciente de l'aspect artificiel de cette organisation. Nous ne visons aucunement l'exhaustivité. Nous avons retenu ces types de tâches algébriques et les types de traitement algébriques associés pour deux raisons essentielles :

• d'une part, ils nous semblent couvrir l'activité algébrique proposée en Seconde indifférenciée et en BEP tertiaire et permettre la comparaison de l'enseignement de l'algèbre privilégié dans les deux institutions,

• d'autre part, ils permettent d'évaluer la compétence algébrique des élèves par rapport à un traitement algébrique attendu dans les différents types de tâches en jeu.

Cette structure multidimensionnelle permet d'avoir une première vision globale du fonctionnement algébrique des élèves (équilibre ou non entre les dimensions *outil* et *objet* de l'algèbre, acquisition des aspects syntaxiques et sémantiques des expressions algébriques).

III.1 LES TYPES DE TRAITEMENT ALGÉBRIQUE VIA LE TYPE DE TÂCHE

Nous présentons les types de traitement algébrique via le type de tâche en allant du côté *objet* vers le côté *outil*, en tenant compte bien évidemment de l'analyse bibliographique réalisée. Certains types de traitement algébrique associés à des types de tâche ont été retenus en liaison avec notre expérience professionnelle : pour que notre structure d'analyse soit opérationnelle, nous devons absolument tenir compte des pratiques en lycée et en BEP tertiaire. Cette structuration est reprise pour *différencier les tâches diagnostic* .

Les types de tâches sont organisés comme suit :

- des tâches "techniques" dans le registre algébrique ou dans l'articulation du registre algébrique vers le registre numérique mettant en jeu des capacités techniques d'ordre syntaxique ou sémantique ;
- des tâches de "reconnaissance" mettant en jeu différents modes d'activité interprétative dans des contextes ou cadres différents ;
- des tâches de "mathématisation" mettant en jeu l'utilisation de l'algèbre comme outil de résolution ou de preuve ;

• du côté objet

Les deux premiers types de traitement algébrique *reproduction de tâches d'ordre numérique* et *reproduction de tâches algébriques non finalisées* caractérisent des tâches "techniques".

—> ***Reproduction de tâches d'ordre numérique*** : ce type de traitement algébrique correspond à l'effectuation d'un calcul numérique ou à la substitution de valeurs numériques dans une expression algébrique (cf. premier niveau sémantique de Nicaud)

Exercice :
Soit $V = x^2 + 3xy^3$. Calculer V pour $x = -3, y =-1$.

Ce type de traitement algébrique met en jeu le registre numérique ou l'articulation du registre algébrique vers le registre numérique.

—> ***Reproduction de tâches formelles non finalisées*** : le type de traitement algébrique met en jeu la manipulation formelle d'expressions algébriques
Deux niveaux de traitement sont envisagés (nous explicitons dans le paragraphe V des raisons de ce choix) :

• **<u>niveau 1</u>** : la manipulation formelle correspond à un travail algébrique algorithmisé simple c'est-à-dire à l'application directe de savoir-faire de base (cf. le niveau syntaxique et implicitement le deuxième niveau sémantique de Nicaud)

<u>Exemples d'exercices</u> :

- exercices de développement ou de factorisation par application directe de savoir-faire :

<u>Exercice 2</u> : Développer et réduire chacune des expressions :

$(3x+2y)^2 =$

$3(x-2yx) - 2x(x^2-3y) =$

<u>Exercice 3</u> : Factoriser $9t^2 - 30t + 25$

- exercices mettant en jeu la résolution "directe" d'équations du premier ou du second degré se ramenant au premier degré

<u>Exercice 4</u> : Résoudre dans R l'équation $(3x+5)(x-2) - (x+4)(x-2) = 0$

• **<u>niveau 2</u>** : la manipulation formelle met en jeu des calculs soumis à des contraintes, à un raisonnement stratégique ou à un implicite que l'on doit contrôler (cf. le niveau syntaxique et les deux derniers niveaux sémantiques de Nicaud)

Le calcul algébrique est mis en œuvre dans des exercices plus complexes, de factorisation, de transformation de formules, de résolution d'équations du second degré se ramenant au premier degré, de substitution d'une lettre par une expression algébrique. Le choix des transformations algébriques applicables à une expression en fonction de la tâche à réaliser dépend du *sens* (dans l'acception que donnent à ce terme J.P. Drouhard, F. Arzarello) qui leur est attribué. L'aspect sémantique des expressions intervient de façon plus déterminante pour organiser le calcul ou la résolution mais l'activité d'interprétation reste implicite.

<u>Exercice 5</u> : Factoriser $(x+1)^3 + 1 - x^2$

<u>Exercice 6</u> : Résoudre l'équation suivante : $4x^3 - x = 0$

<u>Exercice 7</u> : $y = -2x$ et $z = y^2 - 3y$. Exprimer z en fonction de x

• <u>du côté outil</u>

Le type de traitement *interprétation d'une expression algébrique en liaison avec un cadre ou avec un contexte* intervient dans toutes les types de tâches algébriques. Il est mis en jeu explicitement dans <u>les tâches de "reconnaissance"</u>.

—> ***Interprétation d'une expression algébrique en liaison avec un cadre ou avec un contexte*** (cf Drouhard, Duval)

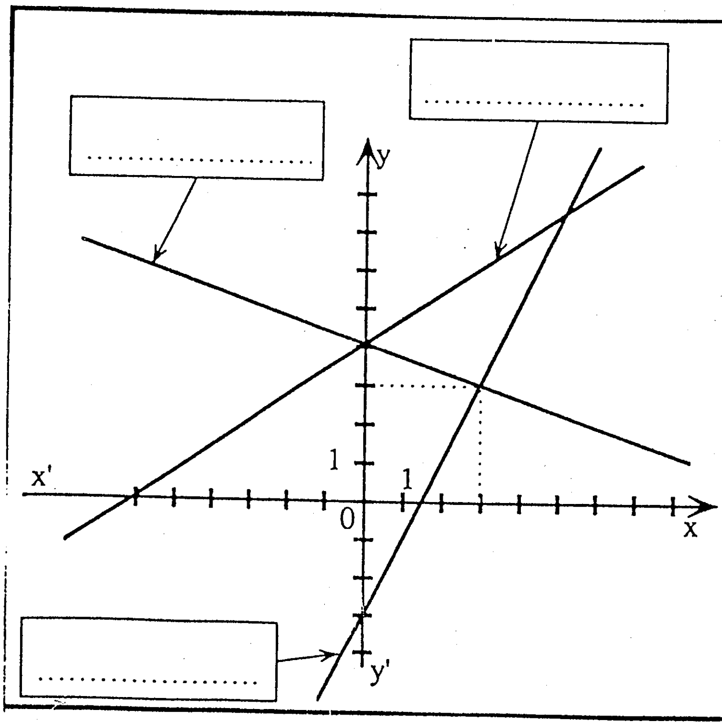
Ce type de traitement algébrique met en jeu un travail d'interprétation, par exemple, dans des situations de reconnaissance d'expressions (soit pour associer des expressions dans le registre algébrique ou dans des registres différents, soit pour rechercher la valeur de vérité d'une égalité dans le cadre algébrique)

Ce sont les aspects syntaxiques et sémantiques des expressions qui sont mis en jeu dans le cadre algébrique ou dans l'articulation entre le cadre algébrique et d'autres cadres, mais aussi des concepts tels que le statut des lettres et du signe d'égalité, ...

Exercice 8 :

L'expression $(x+2)(x-3)(x+4)$ où x désigne un nombre réel quelconque, peut aussi s'écrire :				
a	$x^2 - 2x - 24$	Oui	Non	Jnsp
b	$x^3 - x^2 - 2x - 24$	Oui	Non	Jnsp
c	$x^3 -+ 3x^2 - 10x - 24$	Oui	Non	Jnsp
d	$x^3 - 24$	Oui	Non	Jnsp

Exercice 8 bis : cf EVAPM 2/91 E23-25



Retrouver, parmi les équations ci-dessous, celles qui correspondent aux droites du graphique.

$2x - y - 3 = 0$; $3x - y - 4 = 0$;
$x - 2y + 8 = 0$; $2x - 3y + 12 = 0$;
$x + 3y - 12 = 0$

Ecrire ces équations dans les cadres correspondants.

Calculs si nécessaires

—> ***Utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner d'autres notions mathématiques*** : ce type de traitement est particulièrement mis en jeu, en seconde et surtout en Première, pour étudier d'autres notions mathématiques et des propriétés fonctionnelles (signe, parité, sens de variation d'une fonction, recherche d'un extremum,...). L'outil algébrique intervient pour résoudre des <u>tâches algébriques dans le cadre fonctionnel</u>.

Exercice 9 : Montrer que, pour tous réels x, $x^2 - 3x + 10 > 0$

—> ***Utilisation de l'outil algébrique pour traduire une situation intra ou extra-mathématique*** : ce type de traitement algébrique met en jeu la production d'une expression ou d'une relation algébrique pour traduire algébriquement une situation mathématique et conduit à la mise en équation d'un problème. L'outil algébrique est un outil de résolution.

Trois niveaux de traitement sont envisagés :

• **<u>niveau 0 : branchement sur une formule</u>**

Dans ce cas, on recherche la formule associée à un contexte donné et on instancie les variables par les données et inconnues du problème. La production d'une expression ou d'une relation algébrique traduisant une situation donnée n'est pas à la charge de l'élève.

<u>Exercice 10</u> :

A quel taux est escompté un effet dont la valeur actuelle est 4295F et dont la valeur nominale dans 30 jours sera 5000F.

<u>Exercice 11</u> :

Quelle est la longueur d'un des côtés d'un carré dont l'aire est 20 cm^2.

• **<u>niveau 1 : production guidée d'une expression ou d'une relation algébrique</u>**

Ce niveau englobe plusieurs cas : soit certains indices de l'énoncé facilitent la traduction (donnée des variables du problème et traduction directe, soit la traduction est effectuée suite à l'application d'un théorème portant sur une configuration connue (en particulier en géométrie) en instanciant les données et inconnues du problème dans la relation obtenue). Le contexte du problème peut être familier ou non familier[21].

<u>Exercice 12</u> : (donnée des inconnues et traduction directe dans un contexte familier)

Un magasin solde des chemises et des pantalons. Toutes les chemises sont au même prix unitaire. Tous les pantalons sont au même prix unitaire.
Jean a payé 570F pour 7 chemises et 3 pantalons. Sophie a payé 730F pour 3 chemises et 7 pantalons.
On désigne par x le nombre de chemises et par y le nombre de pantalons. Calculer le prix d'une chemise et d'un pantalon.

[21] La familiarité du contexte dépend de la classe.

Exercice 13:

Reconnaissance d'une situation de Thalès et application du théorème dans un contexte non familier[22]) :

> Dans le trapèze $ABCD$, AB=3, AD=2 et DC=4. Soit M un point de [AD] tel que $AM=x$ et N le point de [AB] tel que (MN) est parallèle à (DB). (Si M est en A, alors N est en A)
> Déterminer AN en fonction de x.
> En déduire x pour que l'aire du triangle AMN soit égale à 1/12.

• **niveau 2 : production d'une expression ou d'une relation algébrique pour traduire une situation** (cf. Chevallard, Douady)

La production est entièrement à la charge de l'élève. Ce type de traitement algébrique met en jeu l'articulation d'un registre autre que le registre algébrique vers le registre algébrique. La traduction peut s'obtenir directement ou nécessiter une reformulation de l'énoncé. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe V de ce chapitre. Comme dans le cas d'une production guidée, le contexte du problème peut être familier ou non familier.

Exercice 14 : (Traduction directe)

> Un magasin solde des chemises et des pantalons.
> Toutes les chemises sont au même prix unitaire. Tous les pantalons sont au même prix unitaire.
> Jean a payé 570F pour 7 chemises et 3 pantalons.
> Sophie a payé 730F pour 3 chemises et 7 pantalons.
> Calculer le prix d'une chemise et d'un pantalon.

Exercice 15 : (Reformulation nécessaire)

> Un père a deux fois l'âge de son fils. Dans quinze ans, l'âge du père sera le double de celui de son fils. Quels sont les âges respectifs du père et du fils.

D'autres exercices peuvent mettent en jeu des propriétés mathématiques sur les nombres et font appel à l'écriture générique d'un nombre

Exercice 16: (Ecriture générique de trois entiers consécutifs)

> Trouver trois entiers consécutifs dont la somme est égale à 54.

Pour ne pas augmenter indéfiniment les niveaux de traitement, nous tiendrons compte des différences de traitement envisageables dans la composante *articulation entre le registre algébrique et d'autres registres.*

—> ***Utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve*** (cf. Chevallard, Harper, Lee and Wheeler, Sfard).

---

[22]Le changement de cadres induit une situation non familière pour les élèves, même si ce type de problème est fréquemment traité.

Ce type de traitement algébrique est mobilisé, par exemple, dans des exercices de mathématisation conduisant à prouver une conjecture sur des propriétés numériques. Les niveaux de traitement précédemment cités se retrouvent de façon analogue.

<u>Exercice 15</u> : Le prestidigitateur

> Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
> "Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7"
> L'affirmation est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

<u>Exercice 16</u> :

> Soient trois nombres consécutifs. Exprimer algébriquement la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez-le.

III.2 LES CRITÈRES ET VALEURS ASSOCIÉES DE LA COMPOSANTE *TRAITEMENT ALGÉBRIQUE*

Les types de traitement algébrique constituent les critères d'analyse de la composante *traitement algébrique.* Récapitulons les types *de traitement algébrique* définis ci-dessus :

• <u>Réalisation de tâches d'ordre numérique</u> : effectuation de calcul ou substitution de nombres dans une formule,

• <u>Reproduction de tâches formelles non finalisées</u> :

- <u>niveau 1</u> (résolution algorithmisée simple),
- <u>niveau 2</u> (calculs soumis à des contraintes, à un raisonnement ou à un implicite que l'on doit contrôler),

• <u>Interprétation d'une expression algébrique nécessitant l'articulation avec un cadre ou un contexte.</u>

• <u>Utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner d'autres notions mathématiques</u>

• <u>Utilisation de l'outil algébrique pour traduire une situation intra ou extra-mathématique</u>

- <u>branchement formule</u>
- <u>Production guidée (dans un contexte familier/non familier)</u>
- <u>Production non guidée (dans un contexte familier/non familier)</u>

• <u>Utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve.</u>

Du côté enseignement, ces critères permettent d'indiquer les types de traitement algébriques mis en jeu par une tâche. Chaque critère prend donc comme valeurs <u>oui</u> ou <u>non</u>. Lorsque le type de traitement est mis en jeu par la tâche, on peut attribuer au critère une valeur qui spécifie la tâche. Par exemple, pour une tâche "technique" le critère *reproduction de tâches algébriques non finalisées niveau 1* peut prendre pour valeurs :

développement d'expressions algébriques, factorisation d'expressions algébriques, résolution d'équations, inéquations, ...

En conclusion, la structure d'analyse de la composante *traitement algébrique* peut être représentée par le schéma arborescent suivant du côté enseignement :

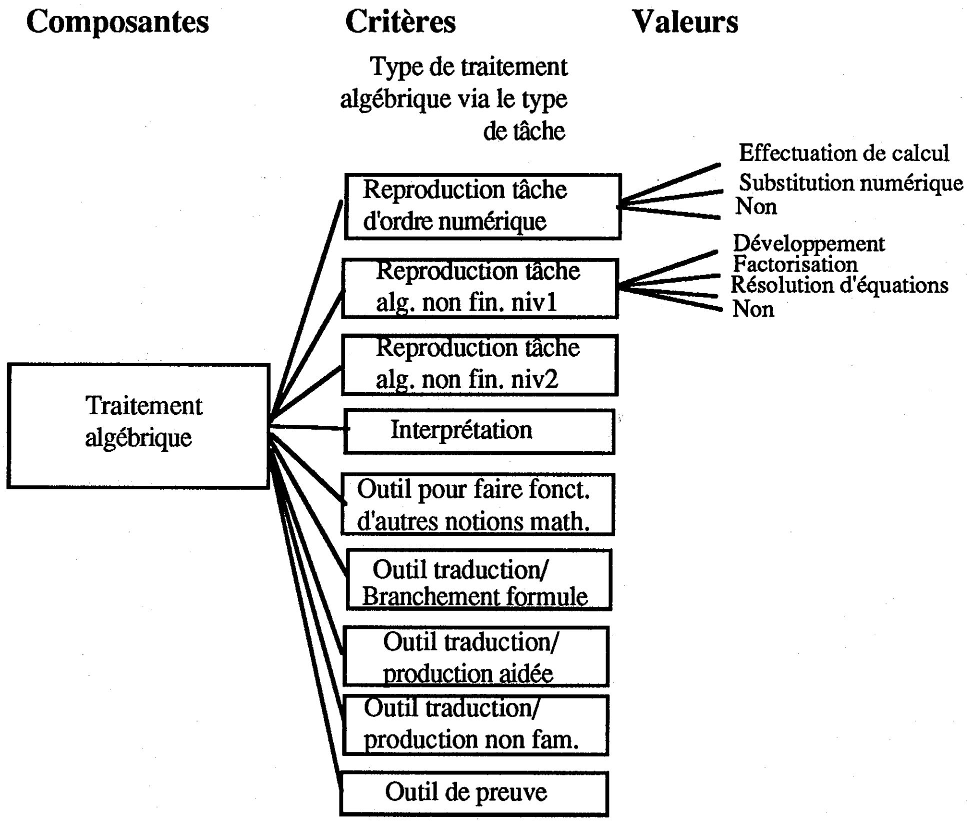


Schéma n°2 : Composante *traitement algébrique* du côté enseignement

Nous ne préciserons ici les valeurs que pour les deux premières catégories pour ne pas surcharger le schéma.

Du côté élève, chaque critère mis en jeu par la tâche prend comme valeurs correct, incorrect ou non traité selon que la solution correspond au niveau attendu et est correcte, correspond au niveau attendu et est incorrecte, que le niveau de traitement attendu n'est pas mis en œuvre.

En conclusion, la structure d'analyse de la composante *traitement algébrique* peut être représentée par le schéma arborescent suivant du côté élève :

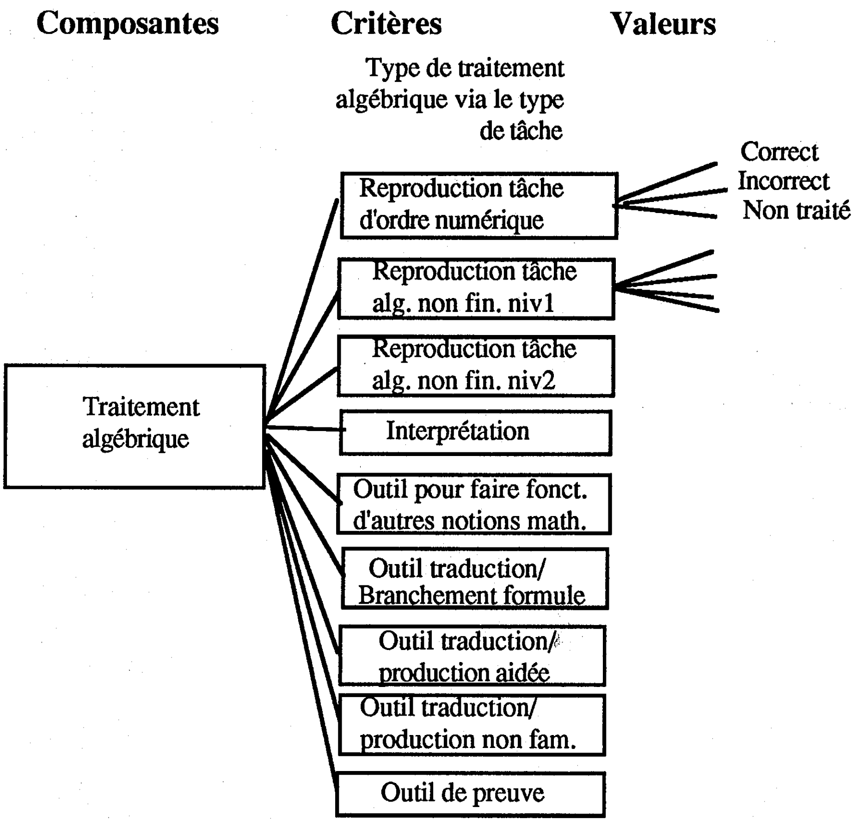


Schéma n°3 : Organisation du diagnostic pour la composante *traitement algébrique*

Toutes les arborescences valeurs sont ici identiques à la première.

IV LA COMPOSANTE RAPPORT ARITHMÉTIQUE / ALGÈBRE

Nous avons vu dans le paragraphe précédent I.4 que la compétence algébrique est liée au rapport entretenu entre l'algèbre et l'arithmétique. La composante *rapport arithmétique/algèbre* a pour objectif :

• d'identifier si un enseignement donné permet de faire vivre une rupture à l'arithmétique, éventuellement non consommée,

• de caractériser la signification accordée par les élèves à la démarche algébrique et de la situer par rapport à la démarche arithmétique.

Dans les deux cas, nous cherchons les indices d'une rupture éventuelle dans les rapports entretenus entre l'arithmétique et l'algèbre à partir de l'analyse des continuités apparentes et des discontinuités [Vergnaud 1987, Kieran et al 1994].

Le choix des quatre critères d'analyse s'appuie sur l'étude, soit des continuités apparentes entre l'arithmétique et l'algèbre pour *le statut du signe d'égalité* et *le statut des lettres*, soit des discontinuités entre l'arithmétique et l'algèbre pour *la démarche de résolution* et *les objets (nouveaux de l'algèbre) et leur statut.*

Ils constituent des marqueurs importants pour situer un élève dans sa rupture arithmétique / algèbre. De même, l'étude des tâches permet de déterminer, à partir de l'étude des quatre critères, celles qui permettent de faire vivre les pratiques arithmétiques (le signe d'égalité peut conserver le statut d'annonce de résultat, il est possible de travailler en gardant une conception procédurale des nouveaux objets de l'algèbre).

En nous appuyant sur l'étude réalisée au paragraphe I.4, nous définissons les valeurs de chacun de ces critères.

Critères	Valeurs globales
Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
Statut des lettres	Lettre désignant un **objet** : lettre, mesure ou étiquette Lettre désignant un **nombre** : inconnue, nombre généralisé ou variable
Type de résolution	Résolution arithmétique Résolution algébrique
(Objets et) statut des nouveaux objets de l'algèbre	Structural Procédural Pseudo-structural

En conclusion, nous représentons la structure d'analyse de la composante *rapport arithmétique / algèbre* par le schéma arborescent suivant :

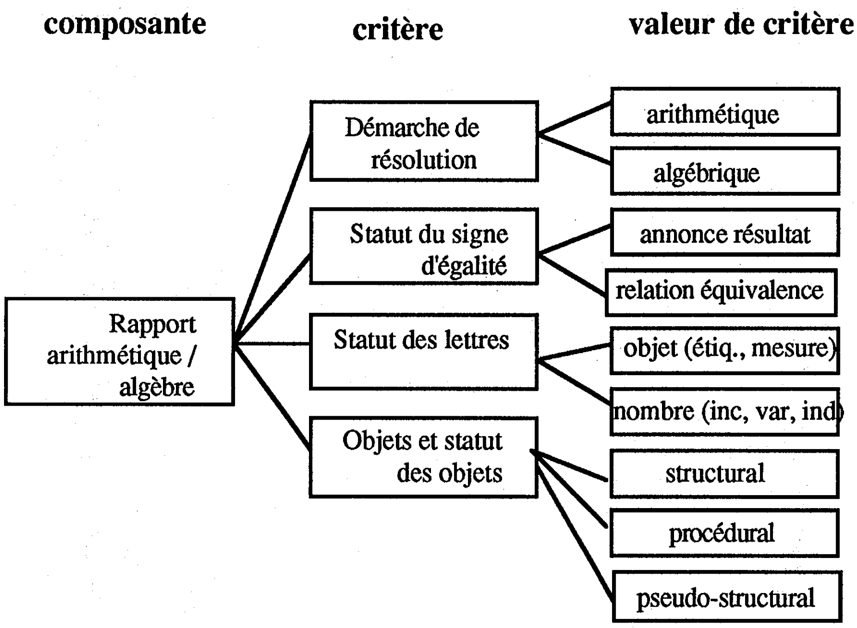


Schéma n°4 : Structure de la composante *Rapport arithmétique/algèbre*

V GESTION DES REPRÉSENTATIONS SYMBOLIQUES

Dans le paragraphe précédent I.2.1, nous avons souligné que la manipulation formelle des objets algébriques met en jeu des aspects syntaxiques et sémantiques. Ici, nous nous plaçons d'un point de vue sémiotique. La manipulation formelle des expressions algébriques nécessite la connaissance des règles de formation et de traitement des écritures algébriques. La résolution algébrique de problèmes intra ou extra-mathématiques passe par la traduction de relations énoncées en langage naturel ou dans un autre mode de représentation en relations algébriques. Le travail algébrique nécessite d'interpréter, de manipuler des représentations symboliques du registre algébrique ou de traduire des représentations symboliques du registre algébrique vers d'autres registres sémiotiques et réciproquement.

Les composantes *gestion dans le registre algébrique* et *articulation entre le registre algébrique et les autre registres* visent :

- du côté enseignement, à identifier les registres de représentation en jeu dans l'activité algébrique ainsi que les modes de gestion privilégiés dans le registre algébrique ou dans l'articulation avec d'autres registres,
- du côté élève, à décrire des régularités dans la gestion des expressions algébriques dans le registre algébrique ou en articulation avec d'autres registres.

Dans ce paragraphe, nous nous appuyons sur les travaux de Duval [Duval 1988, 1993] pour préciser ce que nous entendons par registre de représentation. Puis nous définissons les critères relatifs aux deux composantes *gestion dans le registre algébrique* et *articulation entre le registre algébrique et les autres registres* ainsi que leurs valeurs globales pour réaliser les objectifs visés.

V.1 LES REGISTRES DE REPRÉSENTATION

L'analyse de la gestion des représentations symboliques dépend des "registres"[1] mis en jeu dans les tâches. Nous utilisons ici le terme registre au sens de R. Duval, c'est-à-dire au sens de registre de représentation.

[1]La définition de "registre" est différente de celle de "cadre" définie par R.Douady [Douady, 1984]. Un cadre est formé par des objets mathématiques, par les relations qui existent entre eux, par leurs différentes formulations. Dans le changement de cadres, les obstacles liés à la productions de différentes formulations dans des registres différents ne sont pas pris en compte de façon privilégiée. R. Duval écrit : "(..) un cadre est beaucoup plus vaste que ce que nous avons appelé "registre" et le changement de cadre, qui doit offrir une véritable compréhension mathématique, présuppose le dépassement des écarts sémantiques. Or c'est là que commence, et que s'arrête aussi pour un nombre non négligeable d'élèves, l'apprentissage des mathématiques" [Duval, 1988].

V.1.1 Les activités cognitives

Le registre du langage naturel, le registre des écritures numériques, le registre des écritures algébriques, le registre des représentations graphiques sont des registres de représentation.

Précisons ce qu'est un registre de représentation. "Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système (sémiotique) de représentation qui a ses propres contraintes de signifiance et de fonctionnement" [Duval, 1993]. Un système sémiotique est un système de représentation, s'il permet les trois activités cognitives liées à la production d'une représentation sémiotique : *la formation d'une représentation identifiable, le traitement d'une représentation dans son propre registre* et *la conversion d'une représentation en une représentation d'un autre registre.*

• La *formation* d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné répond à des règles de conformité. Ces règles ont pour fonction d'assurer "en premier lieu, les conditions d'identification et de reconnaissance de la représentation, et en second lieu, la possibilité de leur utilisation pour des traitements" [Duval, 1992]. Par exemple, dans le registre des écritures numériques, -9^2 et $(-9)^2$ représentent deux nombres distincts dans le registre des écritures numériques parenthésées. Les règles de formation de ce registre mettent en jeu ici les opérateurs -, ^{2}, les signes () et la priorité entre les opérateurs.

• *Le traitement* d'une représentation est une transformation interne à un registre reposant sur des règles de traitement propres à chaque registre. Toutes les règles de transformation du registre algébrique permettent le traitement d'une expression algébrique.

• *La conversion* d'une représentation est une transformation externe au registre de départ et implique l'articulation entre deux registres. On peut citer en exemple la conversion d'un énoncé du registre du langage naturel en une relation algébrique du registre des expressions algébriques. Pour R. Duval, de nombreuses difficultés sont attachées à l'activité de *conversion.*

V.1.2 La congruence sémantique

R. Duval indique que la *conversion* exige la perception de la distinction entre *sens et référence (ou dénotation) d'expressions*[2] introduite par Frege [Frege, 1971]. Lorsque des écritures différentes (par exemple, 4/2, (1+1), $\sqrt{4}$) désignent un même nombre, c'est-à-dire que des expressions réfèrent un même objet (ou sont référentiellement équivalentes),

[2] Cette distinction a aussi été utilisée par J.P. Drouhard et citée dans le paragraphe I.2.1 b) de ce chapitre.

elles n'ont pas forcément la même signification car elles ne dépendent pas du même registre de description ou du même point de vue. Or, la *conversion* met en jeu un changement de registres dans lesquels les représentations de départ et d'arrivée ne sont pas forcément "*congruentes*".

Il y a *congruence sémantique* entre représentations, si l'on peut établir une correspondance sémantique, univoque et d'ordre entre les unités signifiantes constitutives de chaque registre. Il y a non congruence sémantique, si cette mise en relation nécessite une réorganisation de la représentation initiale. Dans ce cas là, une conversion unité par unité n'est plus opératoire alors qu'elle l'est dans le cas d'une congruence sémantique.

R. Duval insiste sur le fait que la conversion ne doit pas être confondue avec le codage qui est une transformation d'une représentation en une représentation d'un autre registre sémiotique par application directe de règles de correspondance.

Illustrons cette notion par l'exemple suivant :

Enoncé :
"Un homme a 23 ans de plus que son fils, 31 ans de moins que son père. La somme des âges des trois personnes est 119 ans. Calculez les âges."

Si on désigne par x l'âge de l'homme et par y l'âge du fils, nous pouvons écrire la première relation de deux façons :

$x - 23 = y$, c'est-à-dire l'âge de l'homme moins 23 est égal à l'âge du fils

$x = y + 23$, c'est-à-dire l'âge de l'homme est égal à l'âge du fils plus 23.

On remarque que les deux équations obtenues ne sont pas congruentes à la phrase de l'énoncé : "Un homme a *23 ans de plus que* son fils". Il a été nécessaire de reformuler la relation. En revanche, une équation sémantiquement congruente mais non référentiellement équivalente à la phrase de l'énoncé, obtenue par transcription algébrique, est souvent proposée par les élèves : $x + 23 = y$

Plusieurs difficultés peuvent être liées à la *non congruence sémantique* :

• difficultés à reconnaître un même objet à travers des représentations données dans des registres différents : l'écriture d'une relation algébrique et sa représentation graphique, un énoncé en langue naturelle et l'écriture algébrique de la relation correspondante, ...

• difficultés à réaliser une démarche de calcul ou de déduction qui nécessite la substitution de deux expressions référentiellement équivalentes mais non congruentes, par exemple dans le passage du registre des écritures algébriques non parenthésées au registre des écritures algébriques parenthésées ; un élève, qui ne perçoit pas l'attitude intellectuelle exigée par les mathématiques, base souvent à l'économie ses substitutions sur des relations de congruence sémantique fausses.

V.1.3 Les critères associés aux deux composantes

Le type d'activité cognitive mis en jeu par les règles de formation et de traitement, c'est-à-dire, le *type de formation*, le *type de traitement* constituent les critères de la composante *gestion dans le registre algébrique*. *Le type de conversion* constitue le critère de la composante *articulation entre le registre algébrique et les autres registres*. La recherche des valeurs globales de chacun de ces critères correspond à l'étude des règles de formation, de traitement dans le registre des écritures algébriques [Drouhard, 1992], [Duval, 1988], [Kieran, 1994] mais aussi à celles des règles de conversion mises en jeu dans l'articulation entre le registre des écritures algébriques avec les autres registres [Duval, 1988].

C'est parmi l'ensemble de ces règles que nous pourrons identifier les registres de représentation privilégiés dans les tâches par chaque institution ainsi que les modes de gestion associés.

Pour caractériser, s'il y a lieu, les cohérences de fonctionnement des élèves d'un point de vue sémiotique, nous avons besoin de répertorier des règles erronées et d'identifier, s'il y a lieu et si c'est possible, les règles fausses utilisées par les élèves. Dans de nombreux cas, une étude locale s'avère nécessaire pour déterminer des règles liées au type de tâche ou au fonctionnement personnel des élèves. Elles constituent des valeurs locales des critères.

V.2 LA COMPOSANTE *GESTION DANS LE REGISTRE ALGÉBRIQUE*

V.2.1 Le critère *type de formation*

Dans les paragraphes suivants, nous définissons les valeurs globales du critères *type de formation* à la fois du côté enseignement et du côté élève.

V.2.1.1 Les règles de formation du registre des écritures algébriques

1) Reprenons la définition données par J.P. Drouhard [Drouhard, 1992]. Les expressions algébriques sont les écritures construites autour d'un symbole d'opération ("opérateur"), soit :

• les écritures formées à partir d'un opérateur unaire : puissances, racines,

• les écritures issues d'un opérateur binaire : sommes, différences, produits, quotients. L'ordre de présentation correspond à celui, quand il existe, des priorités entre opérateurs.

Le registre des écritures algébriques met en jeu :

- différents registres d'écritures numériques, c'est-à-dire, le registre des écritures d'entiers relatifs noté *Rner*, le registre des écritures décimales noté *Rnd*, le registre des écritures de nombres avec puissances de dix noté *Rnp*, le registre des écritures fractionnaires noté *Rnf*, le registre des écritures irrationnelles noté *Rni*,

- les lettres,
- les opérateurs unaires notés "-", "2" ou "n", "√"
- les opérateurs binaires notés "+", "-", "x","/".

Nous désignons par $RF(E,\{x,y,\ldots\},(),-,+,-,x,/,^2,\sqrt{})$ l'ensemble des règles de formation mises en jeu dans le registre des écritures algébriques, *E* indiquant le registre des écritures des nombres, $\{x,y,\ldots\}$ l'ensemble des lettres mises en jeu, les paramètres suivants correspondant à la liste des opérateurs unaires et binaires.

Pour coder un sous ensemble de règles de formation du registre des écritures algébriques, nous reprendrons cette notation en indiquant en indice, le ou les registres d'écritures numériques concernés, l'ensembles des lettres, les signes et les opérateurs mis en jeu.

2) J.P. Drouhard a mis en évidence les implicites et conventions liés aux écritures algébriques. Nous en citons quelques uns :

• le signe de multiplication peut être codé par un point multiplicatif ou aucun signe : les écritures suivantes *ab*, *axb*, *a.b* désignent le même objet ;

• $x = 1.x$;

• la barre de fraction indique la portée de l'opérateur fraction, ce qui fait, qu'il n'est pas nécessaire en général de mettre entre parenthèses le numérateur et le dénominateur.

Par exemple, $-\dfrac{-x+2}{2x+3}$ et $-\dfrac{(-x+2)}{(2x+3)}$ désignent la même expression algébrique ;

• il en est de même pour la barre horizontale de racine ;

• l'écriture en ligne des expressions doit faire apparaître l'ordre dans la priorité des opérateurs à l'aide des parenthèses. Par exemple, $2/x+4$ et $2/(x+4)$ ne désignent pas la même expression.

Pour tenir compte du fait que la reconnaissance des expressions algébriques fait appel ou non à un ou des implicites, nous rajoutons un paramètre *"implicite"* dans la désignation de l'ensemble des règles de formation, noté $RF(E,\{x,y,\ldots\},(),-,+,-,x,/,^2,\sqrt{},$ implicite).

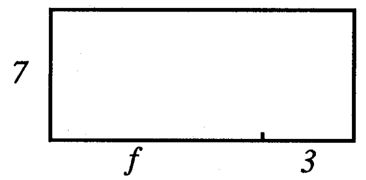
L'ensemble des règles de formation mises en jeu dans une tâche et la présence ou non d'implicite définissent le *degré de complexité* des expressions algébriques.

V.2.1.2 Les difficultés rencontrées par les élèves

De nombreux travaux didactiques relèvent les difficultés des élèves à construire ou à interpréter une expression algébrique, c'est-à-dire à identifier les règles de formation conformes.

• "<u>Assembler" en écriture algébrique</u>

Dans l'étude de la *CSMS*, L. Booth [Booth, 1984] signale la difficulté des élèves à formuler algébriquement le calcul de l'aire du rectangle de la figure ci-dessous :



Les élèves répondent par :
7xf3, 7f3 , f21 ou f+21

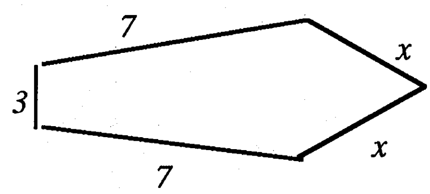
Christopher (15 ans) a répondu *7xf3* Il répond à la question "Pourquoi dis-tu *7xf3* ?"

"C : 7 fois *f*3. ça veut dire le *f plus le 3, le 3 et le* f ensemble multipliés par 7. C'est ce que la réponse doit être *7xf3* ."

"I : Que veut dire *f3* ?"

"C : 7 fois *f*3... le *f*3 signifie que l'on a ajouté le 3 et le *f* avant ...".

De même dans l'exercice "Que pouvez-vous écrire à propos du périmètre de forme



T:Je dirais deux sept, deux x et un trois ...
(écrit 27+2x+13) (...)

I : Que veux-tu dire par là ?

T : Deux multiplié par sept, deux multiplié par x...

L. Booth insiste sur le fait que la capacité à traduire verbalement une méthode de calcul n'entraîne pas nécessairement la capacité à reconnaître une formulation algébrique incorrecte.

• "<u>Concaténer</u>"

Davis [Davis, 1975] rapporte des erreurs fréquentes dans la réécriture d'expressions : *39x-4* devient *35x*, *2yz-2y* devient *z*.

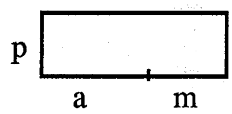
• <u>Incompréhension dans les conventions syntaxiques</u> (en particulier avec les parenthèses) :

Bell [Bell, 1988] signale des incompréhensions des élèves pour différencier les deux règles de formation utilisées pour réécrire les expressions suivantes :

2a+a +15 se réécrit *3a +15* mais *a+a +a* x2 ne se réécrit pas *3a* x2.

Freudenthal pointe que, si dans *ab*, le *a* est remplacé par *-a*, alors il devient *-ab*. En revanche, si *b* est remplacé par *-b*, alors *ab* ne devient pas *a-b* mais *a(-b)*. Les élèves doivent apprendre où rajouter des parenthèses et leur rôle.

Booth [Booth, 1984] réutilise la situation présentée ci-dessous pour montrer les difficultés des élèves à comprendre le rôle des parenthèses.



"I : Que peut-on écrire à propos de la surface de ce rectangle?
(Neil, 15 ans)
N : *p* multiplié par ... *a* plus *m* (écrit *p*x*a*+*m*).
(...)
I : Bien, quel morceau vas-tu calculer d'abord ?
N : J'additionne ces deux là (*a* et *m*), et ensuite je les multiplie par *p*."

Marika (15ans) a écrit "a+*mxp*" et ensuite a rajouté les parenthèses autour de "a+*m*" en disant "Mais vous auriez su cela de toute façon".

En conclusion, les élèves peuvent construire et utiliser des règles de formation incorrectes qui rendent la manipulation formelle non opératoire. Il est important de rechercher dans le cas où ces règles sont identifiables, si elles sont utilisées de façon systématique dans des tâches algébriques de même type, voire de type différent. Dans ce cas, elles caractérisent une des cohérences de fonctionnement de l'élève.

Il n'est pas envisageable de donner une liste des règles de formation incorrectes. Ce sont des valeurs locales et seule l'analyse des productions permettra de les mettre en évidence et d'en dresser un inventaire.

En conséquence, le critère *type de formation* peut prendre comme valeurs globales :

• du côté enseignement : pour caractériser chaque tâche, l'ensemble des règles de formation mises en jeu

• du côté élève :

- règle(s) correcte(s), les règles de formation associées à une tâche sont correctement utilisées par l'élève
- règle(s) identifiable(s), les règles de formation utilisées par l'élève sont incorrectes mais identifiables (valeurs locales)
- règle(s) non identifiable(s).

V.2.2 Le critère *type de traitement*

Nous définissons maintenant les valeurs globales du critère *type de traitement*, à la fois du côté enseignement et du côté élève.

V.2.2.1 Les règles de traitement du registre algébrique

La manipulation formelle des expressions formelles repose sur un ensemble de règles de traitement propres au registre des écritures algébriques. Nous répertorions les règles et les organisons en sous-ensembles. Ces ensembles constituent les valeurs globales du critère *type de traitement*. Indiquons les sous-ensembles retenus dans notre étude (nous ne visons pas l'exhaustivité).

- $RT_{fractions}$: ensemble des règles de transformation des fractions
- $RT_{décimaux}$: ensemble des règles de transformation des décimaux
- $RT_{puissances}$: ensemble des règles de transformation des puissances
- $RT_{développement}$: ensemble des règles de transformation pour développer (identités remarquables, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)
- $RT_{factorisation}$: ensemble des règles de transformation pour factoriser (identités remarquables, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)
- $RT_{équations\ du\ premier\ degré}$: ensemble des règles de transformation pour résoudre une équation du premier degré de la forme $ax + b = 0$ ou sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré
    - la règle de transposition ("changer de membre - changer de signe")
    - faire opérer la même opération aux deux membres de l'égalité
    - appliquer "un produit de facteurs est nul équivaut à l'un des facteurs est nul"

Les règles de traitement à mobiliser sont liées au type de tâche : nous cherchons à mettre en évidence, selon l'institution, les règles de traitement privilégiées mises en jeu par la résolution des tâches techniques.

V.2.2.2 Les difficultés rencontrées par les élèves

Il n'est pas question de répertorier de façon exhaustive les règles de traitement du registre algébrique erronées. Des travaux ont mis en évidence les erreurs les plus fréquentes. Par exemple, en s'appuyant sur la liste des règles erronées répertoriées dans une des expérimentations menées par J. P. Drouhard pour sa thèse [Drouhard, 1992], on peut citer :

1) sur les fractions

$$c\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

2) sur les puissances :

$(ab)^n = ab^n$

$2x^2 + x = 2x^3$

3) sur le développement :

Pour tous réels a, b $(a+b)^2 = a^2+b^2$ $(a-b)^2 = a^2-b^2$

Pour tous réels a, b et c, $a(b+c) = ab + c$.

4) sur la résolution d'équation :

$ax = b$ devient $x = b/(-a)$

Pendant l'analyse des productions écrites, il sera nécessaire de dresser une liste des règles de production erronées liées aux différentes tâches. Trois cas peuvent se produire :

- soit elles sont identifiables et répertoriées,
- soit elles sont identifiables et non répertoriées : ce sont des valeurs locales liées à la tâche ou au fonctionnement local des élèves. Donnons comme exemple :

Développer $(2a -6)(a-4)$ avec comme solution : $(2a -6)(a-4) = 2a-6 \text{ x } a-4 = 2axa + 6x4$

Dans ce cas, les symboles opératoires, les parenthèses ne sont pas reconnues dans les règles de formation propres au registre des écritures algébriques et n'interviennent pas dans les priorités entre opérateurs. Il est important de rechercher si ce type de règle de traitement est mobilisé de façon régulière dans des tâches algébriques de même type, si elles caractérisent une des cohérences de fonctionnement de l'élève. Ici, on dira que la manipulation formelle n'est pas opératoire.

- soit elles sont non identifiables.

En conséquence, comme pour le critère *type de formation*, le critère *type de traitement* peut prendre comme valeurs globales :

• du côté enseignement : pour chaque tâche, l'ensemble des règles de traitement mises en jeu par la tâche

• du côté élève :

- les règle(s) de traitement correcte(s)
- les règle(s) de traitement identifiable(s) répertoriées ou non,
- les règle(s) de traitement non identifiable(s).

V.2.3 Synthèse

En conclusion, la structure d'analyse de la composante *gestion dans registre algébrique* peut être représentée par le schéma arborescent suivant :

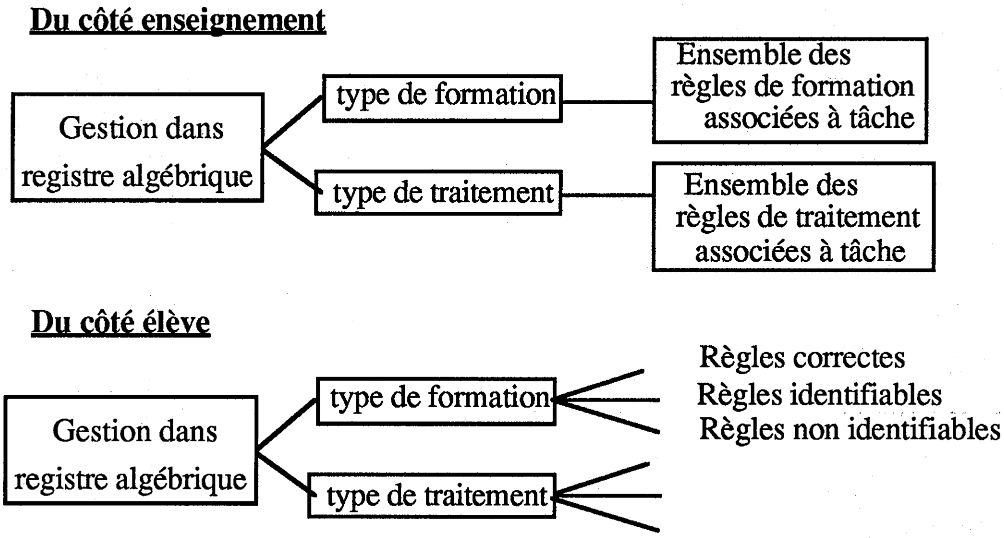


Schéma n°5 : Structure de la composante *Gestion dans le registre algébrique*

V.3 LA COMPOSANTE *ARTICULATION ENTRE LE REGISTRE ALGÉBRIQUE ET LES AUTRES REGISTRES*

V.3.1 Les valeurs globales du critère *type de conversion* selon les registres en jeu

Nous limitons à étudier d'une part, l'articulation entre le registre du langage naturel et le registre algébrique, et d'autre part, l'articulation entre le registre des représentations graphiques et le registre algébrique.

V.3.1.1 Registres mis en jeu dans les tâches et articulation entre deux registres

Indiquons globalement les registres mis en jeu dans les tâches étudiées : les registres d'écritures numériques cités au paragraphe V.2.1.1, le registre des écritures algébriques, le registre du langage naturel, le registre des figures, le registre des représentations graphiques, le registre des algorithmes. Indiquons les notations utilisées pour nommer l'ensemble des règles de conversion correctes mises en jeu a priori par l'articulation entre deux registres :

Articulation entre deux registres	Ensemble des règles de conversion
langage naturel—>écritures algébriques	$R_{lg\ nat}$ *—> écritures algébriques*
écr. algébriques—>écr. numériques	R*écr. algébriques—>écr. numériques*
écr. algébriques—> repr. graphiques	R*écr. algébriques—>repr. graphiques*
figures —> écr. algébriques	$R_{figures}$ *—> écr. algébriques*

A partir des travaux de R. Duval [Duval, 1988a, 1988b], nous indiquons des difficultés rencontrées par les élèves dans l'articulation entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques, puis dans l'articulation entre le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques.

V.3.1.2 Articulation entre registre du langage naturel et registre algébrique

Pour de nombreux élèves, le passage d'un énoncé en langage naturel à une expression écrite symboliquement avec des variables, des symboles de relation ou d'opération, constitue une grande difficulté. Pour R. Duval [Duval 1988], cette difficulté relève de la non articulation des registres de l'expression discursive et de l'écriture symbolique liée à l'effet du *phénomène de non congruence-sémantique*.

Nous avons déjà donné un exemple concernant la résolution de problèmes se ramenant à une équation du premier degré (cf paragraphe V.1.2).

Illustrons ce phénomène de non-congruence dans le cas d'une tâche plus simple où il s'agit de donner l'écriture algébrique correspondant à l'expression discursive d'une opération portant sur des nombres et inversement.

Premier exemple : l'expression "la somme de deux produits de deux entiers, tous les entiers étant différents" est congruente à l'expression symbolique "$a.b+c.d$" car les deux produits sont symétriquement distribués autour du symbole d'addition. La traduction de cette expression discursive pose en général peu de difficultés.

Deuxième exemple : l'expression "la somme des produits d'un entier avec deux autres entiers" n'est pas congruente à l'expression symbolique "$a.b+a.c$" puisque les deux produits symétriquement distribués autour du symbole d'addition ne sont plus explicitement mentionnés par l'expression discursive. Dans ce cas, la traduction devient beaucoup plus difficile pour les élèves car elle nécessite une reformulation.

Dans le cas d'une conversion incorrecte, il est donc nécessaire de rechercher si la traduction est effectuée par codage ou d'identifier, si c'est possible, les règles de conversion utilisées.

V.3.1.3 Articulation entre registre des représentations graphiques et registre algébrique

De nombreuses études montrent les difficultés de lecture et d'interprétation des représentations graphiques cartésiennes. R. Duval indique que la lecture des représentations graphiques présuppose la discrimination des variables visuelles pertinentes et la perception des variations correspondantes de l'écriture algébrique [Duval, 1988 b]. Il montre que certaines difficultés des élèves sont liées à une non congruence des deux représentations.

1) Les modes de traitement et les règles de correspondance

Duval étudie la conversion entre équation réduite et représentation graphique d'une droite. Il identifie trois modes de traitement :

- la démarche de pointage consiste à obtenir les représentations graphiques en associant un point à un couple de nombres défini par rapport à deux axes gradués ;
- la démarche d'extension consiste pour un élève à prendre conscience qu'une représentation graphique obtenue par la démarche précédente ne se limite pas à l'ensemble fini de points identifiables sur le graphique mais est un ensemble infini de points.
- la démarche d'interprétation globale consiste à mettre en relation les variables visuelles permettant une lecture du graphique avec les variables permettant celle d'une équation réduite de droite.

Indiquons les règles de correspondance qui permettent de mettre en relation les éléments caractéristiques des deux registres. Elles sont au nombre de trois : le *sens d'inclinaison*, les *angles formés par le tracé et les axes du repère*, la *position entre le tracé et l'axe vertical.*

Elles décrivent la non-congruence sémantique entre le registre des équations réduites et celui des représentations graphiques. Elles correspondent à l'ensemble des valeurs globales prises par le critère *type de conversion* entre le registre des équations réduites et celui des représentations graphiques. Résumons leurs valeurs dans ce tableau :

Variables visuelles	Valeurs	Unités symboliques correspondantes
<u>sens d'inclinaison du tracé</u> :	trait montant	$a > 0$
	trait descendant	$a < 0$
<u>angles du tracé</u>		
<u>avec les axes</u> :	partage symétrique	$a = 1$
	angle plus petit	$a < 1$
	angle plus grand	$a > 1$
<u>position du tracé sur</u>		
<u>l'axe y</u> :	coupe au dessus	$b > 0$
	coupe à l'origine	$b = 0$
	coupe au-dessous	$b < 0$

<u>Fig n°6</u> : Règles de correspondance entre registres [Duval, 1988 p 240]

Illustrons le par les deux figures suivantes :

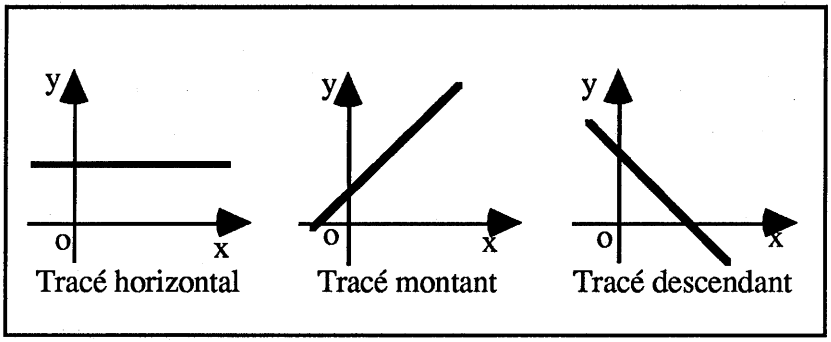


Fig n°7 : Géographie générale du tracé

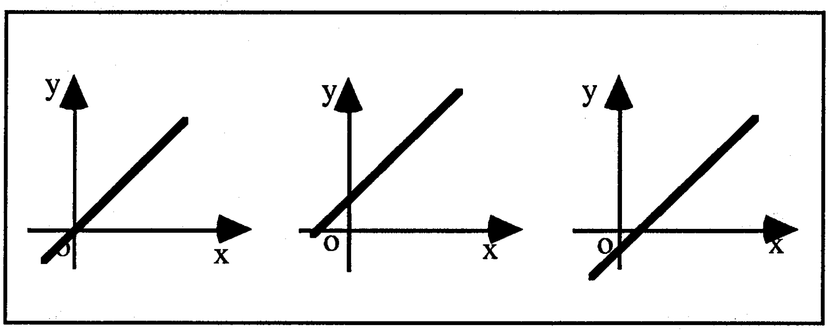


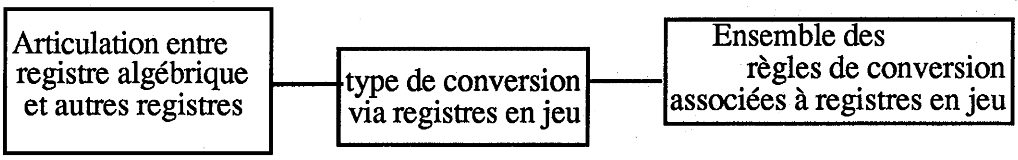
Fig n°8 : Position de l'intersection entre le tracé et l'axe vertical

2) Pendant l'analyse des productions écrites des élèves, il sera nécessaire de mettre en évidence des règles de conversion incorrectes en liaison avec l'étude précédente. Comme pour les règles de formation et de traitement, nous recherchons si les règles sont identifiables ou non, systématiques ou non.

V.3.2 Synthèse

En conclusion, la structure d'analyse de la composante *articulation entre registre algébrique et les autres registres* peut être représentée par le schéma suivant :

Du côté enseignement



Du côté élève

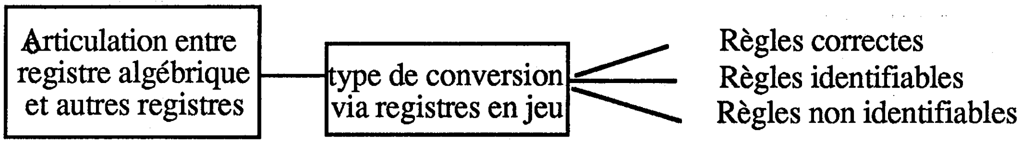


Schéma n°9 : Structure de la composante *Articulation entre registre algébrique et les autres registres*

VI. FONCTION DE L'ALGÈBRE ET RATIONALITÉ ALGÉBRIQUE

Pour compléter les analyses précédentes, nous proposons une étude théorique pour définir les critères et valeurs globales associées aux composantes *fonction de l'algèbre* et *rationalité algébrique.*

Nous cherchons à identifier les décalages entre les rapports institutionnels à l'algèbre à travers la *fonction* jouée par l'algèbre et la *rationalité algébrique* mise en jeu dans l'enseignement en BEP et en Première G d'adaptation et à caractériser le rapport personnel des élèves à l'algèbre en prenant en compte les adaptations antérieures. La structure d'analyse ainsi construite doit permettre de reconnaître des manifestations de connaissances des élèves à travers des comportements différents de ceux attendus lors de la transition entre les deux cycles.

VI.1 LA COMPOSANTE *FONCTION DE L'ALGÈBRE*

Cette composante d'analyse a pour objectif :

• du côté enseignement, d'identifier les emplois privilégiés de l'algèbre dans les enseignements en B.E.P, en seconde indifférenciée et en Première G,

• du côté élève, de caractériser si c'est possible leur rapport personnel à l'algèbre à travers la fonction apparente jouée par l'algèbre dans l'activité mathématique qu'ils réalisent.

Avant de définir les critères choisis, nous précisons le cadre théorique et le point de vue retenu.

VI.1.1 Cadre théorique : rapport institutionnel/rapport personnel au savoir

Pour conduire cette étude, nous utilisons des notions définies par Y. Chevallard [Chevallard, 1992] dans l'approche anthropologique du didactique qu'il développe.

VI.1.1.1 Rapport institutionnel aux objets de l'algèbre

Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux objets pour lesquels les rapports institutionnels[3] jugés adéquats par chaque institution peuvent s'avérer profondément différents. Ces objets sont de plusieurs nature : ce sont des objets mathématiques mais aussi d'autres objets tels que le type d'exercice, le type d'activité mathématique.

Les principaux objets mathématiques mis en jeu ici sont les formules, le calcul algébrique élémentaire, les équations, les fonctions affines, la notion de droite.

Nous prenons aussi en compte les rapports associés aux tâches telles que, "manipuler formellement une expression algébrique", "résoudre un problème", "mettre en équation un problème", "justifier une réponse", "vérifier un résultat".

Dans le contexte de la recherche, nous indiquons quelques éléments qui interviennent dans la constitution des différences entre rapports institutionnels aux mêmes objets de savoir. Ces éléments peuvent être liés aux objectifs de formation, aux contextes externes de mise en application des connaissances sous leur aspect *outil* ou *objet*, au contrat didactique dans les classes, etc. Ces éléments jouent un rôle important dans la définition des exercices et tâches d'ordre algébriques privilégiés dans chaque classe mais aussi dans l'élaboration d'une (ou des) solution(s) attendue(s) d'un problème dans une institution donnée.

Nous en faisons une étude détaillée dans le chapitre V. Ici, les exemples donnés dans cette énumération ne s'appuient que sur une comparaison "grossière" des programmes de BEP et de Seconde indifférenciée et des cahiers de cours d'élèves de BEP.

• *les savoirs officiels définis dans les programmes* :

Ils apparaissent dans les textes des programmes, dans le cahier de cours des élèves ou dans les livres de mathématiques. Ces programmes indiquent des approches différentes

[3]Chaque institution entretient des *rapports institutionnels* avec les objets mathématiques ou non. Le rapport institutionnel à un objet indique ce qui se fait avec cet objet, comment il est mis en jeu dans l'institution.

pour un même objet[4] selon les institutions. C'est pour Y. Chevallard "la face visible de l'institution" [Chevallard, 1989b]. Ce sont les définitions, les propriétés et les théorèmes, qui sont dans le cas de notre recherche :

- la définition des expressions algébriques, des équations, des inéquations, des systèmes linéaires, des fonctions, de la notion de droite,
- les règles de calcul algébrique, les règles associées à la résolution des équations, des inéquations et des systèmes d'équations linéaires,
- les propriétés des équations et des fonctions.

Des différences peuvent apparaître notamment dans :

- le degré de complexité des expressions,
- l'emploi et les conceptions différentes des lettres,
- les conceptions associées aux objets de l'algèbre tels que les expressions, les équations, conception procédurale ou structurale au sens de A. Sfard (cf paragraphe I.3),
- l'interprétation globale ou locale associée à une notion telle que celle de la droite (cf Duval V.3.1.2),
- les types de traitement algébrique (cf paragraphe II.1),
- l'engagement dans la dimension fonctionnelle.

• *des savoir-faire concernant l'exploitation de ces objets mathématiques* :

Ils sont repérés par les *types d'exercices* et les *méthodes de résolution associées*, par la place plus ou moins systématique des *exercices modèles*, par la *fréquence* plus ou moins grande des exercices donnés aux élèves. Ce sont des éléments importants car ils participent à la mise en place de l'emploi des connaissances et à la constitution du sens[5] en mathématique.

Prenons le cas du calcul algébrique.

- Les situations d'emploi de l'algèbre peuvent varier et peuvent être plus ou moins liées à des contextes externes d'utilisation. Citons les principales situations d'emploi retenues :

* faire du calcul numérique dans un contexte d'application ou non
* faire du calcul formel dans le cadre algébrique,
* étudier algébriquement des fonctions,

[4]Remarquons que, pour une même institution, les approches peuvent être différentes selon la lecture du programme, le choix des livres, les conceptions du professeur concernant le cours de mathématiques (épistémologie du professeur au sens de G. Brousseau).

[5]Pour G. Vergnaud, le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre, c'est-à-dire de situations à maîtriser. Un champ conceptuel peut être défini comme un ensemble de situations, dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite interaction. [Vergnaud, 1990]

* traduire algébriquement et résoudre des situations extra-mathématiques liées à un contexte concret peu familier,

* résoudre des problèmes dans un contexte d'application familier (voire assez stéréotypé), par exemple, le secteur tertiaire pour les élèves de BEP tertiaire,

* traduire algébriquement et résoudre des problèmes intra-mathématiques posés dans d'autres domaines (géométrique, numérique, ...) que le domaine algébrique,

* conjecturer et prouver des propriétés numériques.

- Selon le type de tâche, il est possible :

* soit de privilégier une exigence d'efficacité à résoudre des exercices assez stéréotypés par la mise en œuvre de formules et de savoir-faire qui peuvent se rapprocher de gestes,

* soit de privilégier une exigence de formation intellectuelle en engageant les élèves à résoudre des exercices variés mettant en jeu l'ensemble des types de tâches algébriques, à contrôler l'emploi de l'algèbre dans des situations variés.

- Selon le type de tâche proposé, il est possible de développer l'aspect *objet* ou *outil* du calcul algébrique et à des niveaux variés.

* Dans le cas de la dimension *outil*, nous avons mis en évidence différents types de traitement algébrique (algèbre comme outil d'étude d'autres notions mathématiques en particulier dans le cadre fonctionnel, comme outil de traduction, comme outil de résolution ou de preuve) mais aussi différents de niveaux de traitement (par exemple la traduction d'une relation entre données peut passer soit par l'application de formules, soit par la production guidée, soit par la traduction algébrique).

* Dans le cas de la dimension *objet*, nous avons montré que la manipulation formelle des expressions algébriques peut faire plus ou moins appel aux aspects sémantiques et syntaxiques des exercices selon le niveau de la tâche formelle proposée.

- Selon le type de tâche proposé, il est possible de permettre à des démarches arithmétiques de cohabiter avec des démarches algébriques.

• *les rapports institutionnels aux autres objets en relation avec l'objet de savoir mis en jeu dans la résolution du problème* :

Ces savoirs tiennent compte du réseau de relations entre les différentes connaissances. Par exemple, si on mobilise l'objet "fonction affine" pour résoudre un problème du premier degré, les rapports institutionnels aux objets "fonction", "équation du premier degré", "droite" seront aussi mis en jeu.

• *les savoirs relatifs aux conditions d'utilisation des savoirs pour résoudre les problèmes* :

Ces savoirs sont très divers. Ils peuvent aller du geste de reconnaissance d'indices dans un énoncé permettant de sélectionner une méthode de résolution, à la recherche d'une situation semblable permettant de mobiliser puis de transposer une méthode de résolution adaptée. Ces savoirs participent aussi à la constitution du sens en mathématique.

• *des savoirs d'ordre coutumier* :

Dans une classe de mathématique à un niveau donné, il existe à l'échelle de l'année scolaire des pratiques spécifiques du savoir enseigné. Ces pratiques sont souvent implicites : c'est ce que N. Balacheff nomme la *coutume* didactique [Balacheff, 1988]. La coutume d'une classe de mathématiques est définie par un ensemble de pratiques, d'obligations établies, de façons d'agir par l'usage. La coutume confère un statut de stabilité aux pratiques de la classe, même si évoluant d'un niveau à un autre, ces dernières sont différentes d'un niveau scolaire à un autre.

La coutume intervient globalement, en particulier, dans le choix des démarches de résolution, dans le mode de régulation de la classe, dans le partage des responsabilités de l'activité mathématique, dans le choix des formes d'évaluation.

Par exemple, pour un exercice portant sur les pourcentages les démarches de résolution utilisées en BEP et en lycée sont différentes, le niveau de rationalité engagé n'étant pas le même[6]. Ces savoirs induisent pour les élèves des rapports différents au contrôle et à la validation en mathématique.

VI.1.1.2 Rapport personnel

Les institutions BEP et Première G mettent en jeu des objets de savoir mathématique communs.

Les élèves ont d'abord été *sujets* de l'institution BEP. Comme sujets institutionnels de BEP, ils ont construit un *rapport personnel* à l'algèbre en liaison avec la *fonction* jouée par l'algèbre en classe de BEP.

Nous pouvons étudier les rapports personnels comme nous l'avons fait ci-dessus :

- des connaissances telles que les définitions et propriétés des objets algébriques,

- des savoir-faire et des savoirs concernant des types de tâches et des types de traitement algébrique associés en liaison avec des contextes et domaines d'utilisation,

---

[6]Soit l'exercice : Vous payez une mobylette 3441^F après avoir bénéficié d'une remise de 7,5% du prix marqué. Quel était le prix marqué ?
En BEP, on raisonne sur un prix marqué fictif de 100^F pour se ramener à une situation de proportionnalité.
En lycée, le problème est formulé algébriquement pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré.

- des savoirs relatifs aux conditions d'utilisation,
- des savoirs d'ordre coutumier.

Comment pouvons-nous caractériser ces rapports personnels à l'algèbre par rapport aux rapports institutionnels ? Ce ne sont pas des sous-ensembles du rapport institutionnel. Mais on peut penser qu'en général qu'ils sont déterminés en partie par les rapports institutionnels.

Les élèves se sont certainement construits des "connaissances locales" dans l'acception de F. Léonard et C. Sackur [Léonard, 1991]. Dans des situations algébriques non familières, ils peuvent en particulier être tentés de se ramener à un type de tâche familier pour mettre en œuvre un type de traitement algébrique connu, des savoir-faire de base voire des gestes de résolution habituels, même si les conditions d'application ne sont pas remplies.

VI.1.2 Les critères retenus pour la composante *fonction de l'algèbre*

Nous avons mis en évidence certains éléments qui participent à la constitution des différences dans les rapports institutionnels et personnels à l'algèbre (savoirs officiels, savoir-faire concernant l'exploitation de ces objets mathématiques, savoirs relatifs aux conditions d'utilisation des savoirs pour résoudre les problèmes, ...).

Nous définissons les critères *emploi de l'algèbre* et *fonction apparente de l'algèbre* qui ont respectivement pour objectifs d'identifier et de caractériser des rapports à l'algèbre, institutionnels d'une part et personnels d'autre part. Ces deux critères jouent un rôle symétrique du côté de l'enseignement et du côté de l'élève. Ils vont permettre de mettre en relation le rapport personnel de l'élève à l'algèbre et les rapports institutionnels.

VI.1.2.1 Du côté de l'enseignement : le critère *emploi de l'algèbre*

Le critère *emploi de l'algèbre* permet de définir les principales situations d'emploi de l'algèbre, comme nous l'avons précisé plus haut :

- faire du calcul numérique dans un contexte d'application ou non,
- faire du calcul formel dans le cadre algébrique,
- étudier algébriquement des fonctions,
- mathématiser et résoudre des situations extra-mathématiques liés à un contexte concret peu familier,
- résoudre des problèmes dans un contexte d'application familier (voire assez stéréotypé), par exemple, le secteur tertiaire,
- mathématiser et résoudre des problèmes intra-mathématiques dans d'autres domaines (géométrique, numérique, ...) que le domaine algébrique,
- conjecturer et prouver des propriétés numériques.

Du côté enseignement, ces situations d'emploi constituent les valeurs globales du critère *emploi de l'algèbre*. Les valeurs locales pour chaque tâche préciseront le domaine d'utilisation et le type de tâche.

VI.1.2.2 Du côté de l'élève : le critère *fonction apparente de l'algèbre*

Le critère *fonction apparente de l'algèbre* a pour objectif d'identifier et de caractériser pour chaque tâche le rôle joué par l'algèbre dans la résolution.

Nous analysons le fonctionnement algébrique des élèves en situation de résolution de problèmes. Nous prenons le terme *problème* dans le sens courant de problèmes ou exercices mathématiques posés aux élèves en contrôle écrit en classe ou en devoir à la maison, sans distinction. Les types de tâches proposées dans un problème sont des tâches de calcul, de reconnaissance, de production, de formulation, de validation.

Dans les productions écrites des élèves, nous n'analysons que le *résultat des processus de résolution*[7] c'est-à-dire *les solutions* données par les élèves. Nous obtenons moins d'informations que si nous étudions le processus de résolution car il existe évidemment un décalage entre le résultat et le processus de résolution[8]. Mais nous pensons pouvoir restituer des caractéristiques essentielles et pertinentes du fonctionnement mathématique et du *raisonnement* des élèves par *l'analyse du discours justificatif de leurs solutions*.

Les solutions effectivement produites par les élèves ne sont pas nécessairement celles *attendues* en classe de Première G. Les modes de fonctionnement et les raisonnements des élèves peuvent être marqués par des adaptations institutionnelles antérieures, en particulier, par leur rapport personnel à l'algèbre construit dans la classe de BEP.

Nous appréhendons le rapport personnel des élèves à l'algèbre en comparant les *solutions* données aux problèmes proposés par rapport à celle(s) *attendue(s)*. Nous nous appuyons aussi sur notre expertise professionnelle pour fixer l'ensemble des valeurs globales du critère *fonction apparente de l'algèbre*.

Nous nous demandons d'abord si les solutions des élèves sont *conformes* à celles attendues en Première G. La question de la conformité des solutions se pose que les solutions soient correctes ou incorrectes.

---

[7] Les termes *résolution* et *processus de résolution* sont pris dans l'acception de N. Balacheff. La *résolution* (d'un problème) est l'activité du sujet entre l'instant où le problème lui est formulé et celui où il prend la décision qu'il est résolu. Le *processus de résolution* désigne l'organisation de cette activité [Balacheff, 1982].

[8] Les processus de résolution mis en jeu par les élèves sont étudiés soit pendant les séances d'utilisation d'un logiciel de développement/factorisation de polynômes, soit pendant les entretiens (cf chapitre III).

- Si les solutions sont *conformes*, nous retenons la fonction conforme jouée par l'algèbre.

- Si les solutions ne pas *conformes*, nous regardons si elles reposent sur des démarches scolaires.

* Dans ce cas, nous cherchons à mettre en relation les démarches utilisées avec les pratiques habituellement utilisées en BEP dans des situations proches. Nous repérons alors *quelle est la fonction jouée par l'algèbre dans la résolution.*

* Dans le cas contraire, nous retenons quelle type de démarche est utilisée.

Nous dégageons donc quatre valeurs :

(1) Fonction de l'algèbre conforme

Les solutions peuvent faire apparaître un écart dans la formulation par rapport à la ou les solution(s) attendue(s) mais elles restent conformes aux attentes de l'institution Première G. Citons, par exemple, la solution de Sébastien pour le problème "Le prestidigitateur" (cf Chapitre III, paragraphe III.1.1).

(2) Fonction de l'algèbre non conforme : dans ce cas, dans l'expérimentation nous essayons de trouver la fonction apparente jouée par l'algèbre en liaison avec *l'enseignement reçu antérieurement en BEP*, ce qui correspondra à la valeur locale du critère.

L'élève mobilise des objets mathématiques *reconnus* par l'institution Première G mais *sous une forme non conforme*. Pour illustrer notre propos, donnons deux exemples :

Enoncé du problème 1 : Vous payez une mobylette 3441^{F} après avoir bénéficié d'une remise de 7,5% du prix marqué. Quel était le prix marqué ?

• *Fonction de l'algèbre non conforme liée voire renforcée par l'enseignement reçu en BEP :*

Les solutions s'appuient sur un raisonnement reposant sur un prix marqué fictif de 100^{F}. L'objectif est de se ramener à une situation de proportionnalité dans laquelle on se reconnaît. Le geste qui fonctionne est le produit en croix ramené à 100.

Pour 100^{F}, le prix payé est de 92,50^{F}. Le prix marqué et le prix payé étant des grandeurs proportionnelles, on cherche le prix marqué x correspondant à un prix payé de 3441^{F}.

Prix marqué	100	x
Prix payé	92,50	3441

x vérifie $\dfrac{100}{92{,}50} = \dfrac{x}{3441}$

• *Solution en Première G avec fonction de l'algèbre conforme* (cette solution est aussi proposée dans les livres de BEP, mais rarement présente dans les cahiers de cours que nous avons analysés (cf chapitre VII) :

Le problème est formulé algébriquement pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré.

Soit x (en francs) le prix payé. On écrit la relation entre le prix marqué et le prix payé.

$x - x \times 7{,}5/100 = 3441$

Enoncé du problème n°2 : Le prestidigitateur

> Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
> "Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7"
> L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

• En BEP, on met essentiellement un problème en équation par application d'une formule puis par substitution des données et des inconnues du problème dans cette formule. La tâche proposée est partiellement nouvelle. Proposons la solution de Sandrine. Elle se lance dans une preuve algébrique. Une traduction infructueuse par association d'une lettre à chaque résultat intermédiaire conduit Sandrine à une impasse :

"B = nombre pensé (...)

$(B+8)\mathrm{x}3 = S\text{-}4 = S^1+B = S^2/4 = S^3+2 = S^4\text{-}B = 7$

tous les S / S^1 / S^2 / S^3 / S^4 représentent les sommes trouvées après chaque opération."

Sandrine se rebranche alors sur des pratiques connues : elle se replie vers sur une preuve pragmatique en substituant aux lettres des nombres pour calculer la valeur recherchée, les écritures gardant un sens correct. Ici, l'algèbre a pour fonction celle de *substituer des nombres dans une formule.*

• On attendait la mise en équation du problème en formulant la relation opératoire mise en jeu dans l'énoncé. *L'algèbre a pour fonction attendue de formuler algébriquement la relation opératoire puis de prouver.*

(3) *Aucune fonction de l'algèbre* :

La solution proposée n'est pas reconnue comme solution institutionnelle. L'algèbre n'est pas mobilisée pour résoudre le problème. C'est une solution organisée voire même astucieuse mais qui ne s'appuie sur aucune méthode de résolution ad hoc étudiée dans une des institutions. Elle s'appuie sur le contexte et les particularités du problème. Citons par exemple la solution de Denis pour le problème "Le minitel" (cf Chapitre III, paragraphe III.2.1).

(4) *Aucune fonction des mathématiques* :

Ce cas est assez rare. Mais parfois, une solution mobilise peu ou pas de connaissances mathématiques. La résolution proposée ne tient compte d'aucun jeu scolaire institutionnel en mathématiques. On en trouve un exemple dans la solution de Candie pour le problème "Minitel" (cf chapitre III, paragraphe III.2.1).

En résumé

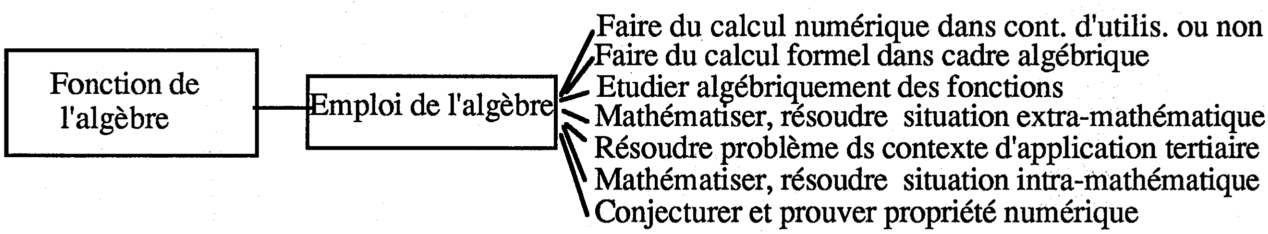
Ces quatre fonctions de l'algèbre, fonction de l'algèbre conforme à l'institution Première G, fonction de l'algèbre non conforme à l'institution Première G, aucune fonction de l'algèbre, aucune fonction des mathématiques, constituent les valeurs globales du critère *fonction apparente de l'algèbre.*

A partir de l'analyse des productions écrites, nous pourrons obtenir des valeurs plus fines pour ce critère, ces valeurs étant liées soit aux différentes tâches, soit aux spécificités du fonctionnement de l'élève.

VI.1.3 Synthèse

En conclusion, la structure d'analyse de la composante *fonction de l'algèbre* peut être représentée par le schéma arborescent suivant :

Du côté enseignement



Du côté élève

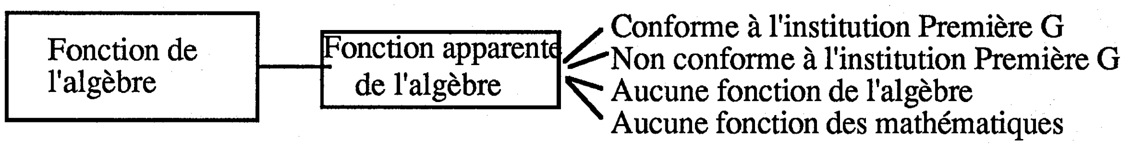


Schéma n°10 : Structure de la composante *Fonction de l'algèbre*

VI.2 LA COMPOSANTE *RATIONALITÉ ALGÉBRIQUE*

Cette composante a pour objectif de cerner le rapport à la rationalité mathématique mis en jeu dans l'activité algébrique aussi bien du côté de l'enseignement que du côté des élèves.

Situons d'abord cette étude dans le contexte de notre recherche. L'activité algébrique met implicitement en jeu les notions de vrai et de faux (résolution d'équation, transformation d'expressions algébriques), la généralisation et la preuve (formules, modélisation). En BEP, les élèves utilisent le calcul algébrique dans deux principales classes d'exercices, soit des exercices de calcul (application numérique de formules, manipulation formelle d'expressions algébriques, résolution d'équations), soit des problèmes liés à un contexte d'application (calculs commerciaux, calculs d'intérêts, etc.). A l'entrée en Première G, nous avons constaté que des exercices très simples de mathématisation mettant en jeu une formulation donnent lieu à des solutions très différentes de celles attendues (cf. ex "Le prestidigitateur" pour Sandrine F., Nouara, Pascal, Karine, ex "Le minitel" pour Karine). De même, les raisonnements utilisés par les élèves pour valider une égalité (respectivement montrer qu'une égalité est fausse) ou pour vérifier un résultat semblent relever de modes de rationalité différents de la rationalité mathématique.

Nous nous demandons :

Quel est le niveau de rationalité mathématique mis en jeu dans l'activité mathématique en classe de BEP ? Quels sont les types de raisonnement privilégiés ?

Quelle signification les élèves accordent-ils au symbolisme algébrique ? Quels liens établissent-ils entre calcul algébrique et preuve ? Quels types de raisonnement mettent-ils en jeu ?

Cette approche nous semble extrêmement importante si nous voulons comprendre le sens que les élèves attribuent à l'activité mathématique et tenter d'éviter des malentendus lors de la transition entre les deux institutions.

Nous limitons l'étude de la rationalité mathématique au champ de l'algèbre. Nous voulons définir des grandes lignes du rapport à la rationalité algébrique aussi bien du côté enseignement que du côté élève.

Cette analyse passe par l'étude des principaux types de preuve utilisés (pragmatique ou intellectuelle) [Balacheff, 1988] ainsi que par celle des moyens techniques de justification [Legrand, 1990, Duval, 1993]. Ce choix fait référence à deux problématiques utilisées par différents chercheurs pour analyser voire répondre aux difficultés rencontrées par les élèves pour faire des démonstrations [Arsac, 1990] :

• partir d'une analyse épistémologique et mettre l'accent sur l'étude du sens de la démonstration,

• partir de l'étude des productions et prendre en compte la "structure" de la démonstration.

Nous définissons deux critères associés à la composante *rationalité algébrique*, le critère *type de preuve* et le critère *type de justification* et recherchons leur ensemble de valeurs.

VI.2.1 Le critère *type de preuve*

Ce critère a pour objectif :

- d'une part, de déterminer comment sont introduites puis utilisées des propriétés générales, des formules dans un enseignement,

- d'autre part, de repérer si le langage algébrique est utilisé par les élèves pour formuler des propriétés générales et les prouver (situation de type 2)[9] ou pour modéliser des problèmes afin de les résoudre en appliquant des outils mathématiques adaptés (situation de type 3). En complémentarité, nous cherchons aussi à savoir comment est justifié le fait qu'un énoncé est faux (situation de type 1). Nous voulons analyser chez les élèves le lien entre les formes de preuve utilisées et le niveau de compétence algébrique mis en jeu.

Nous prenons en compte le *point de vue épistémologique* pour étudier les types de preuve. Pour ceci, nous recensons d'abord les types de preuve mis en évidence par N. Balacheff [Balacheff, 1988] puis nous précisons des types de justification plus spécifiques de l'algèbre définis par D. Wheeler et L. Lee [Lee et Wheeler, 1987] lors d'une recherche portant sur l'étude des conceptions d'élèves sur la généralisation et la justification dans des problèmes plus spécifiques de l'algèbre élémentaire[10].

---

[9]Trois types de problèmes ont été retenus pour les besoins de cette étude :
Situation de type 1 : Prouver qu'un énoncé universellement quantifié est faux
Ex : L'énoncé (Pour tout nombre a, $a^2=2a$) est-il vrai ? Justifiez votre réponse.
Situation de type 2 : Mathématiser une situation concrète qui conduit à conjecturer puis à généraliser une relation et à prouver celle-ci.
Ex : le problème "le prestidigitateur"
Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
"Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7"
L'affirmation est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.
Situation de type 3 : Conjecturer puis à généraliser une propriété numérique puis la prouver.
Ex : Soient trois entiers consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ?

[10]Les problèmes posés ont été regroupés en quatre groupes. Les 354 élèves qui ont participé à l'expérimentation étudient en High School dans le niveau 10. Les élèves ont résolu par écrit quatre

VI.2.1.1 Genèse cognitive des preuves (A. Arcavi, N. Balacheff, N. Rouche)

C'est le point de vue cognitif qui est abordé ici. Nous nous appuyons sur les travaux de N. Balacheff [Balacheff, 1988], de A. Arcavi et al [Arcavi, 1989] et de N. Rouche [Rouche, 1990] qui portent sur l'étude de la genèse de la généralisation et des processus de preuve, pour différencier deux classes de preuves, les preuves *pragmatiques* et *intellectuelles.*

Dans le cas d'une *preuve pragmatique*, un résultat est vrai s'il est avéré soit sur quelques exemples (empirisme naïf), soit pour des exemples aussi quelconques que possibles (expérience cruciale).

Dans le cas d'une *preuve intellectuelle*, soit l'explication est faite sur un objet particulier mais à titre de représentant caractéristique (exemple générique), soit l'action qui justifie le résultat est invoquée et la validation s'appuie sur une formulation de l'action et non pas sur l'action elle-même (expérience mentale).

D'après les hypothèses formulées par N. Balacheff sur la genèse cognitive des conceptions des élèves sur la validation et la preuve en mathématiques, la preuve pragmatique est la première étape vers les *preuves intellectuelles.*

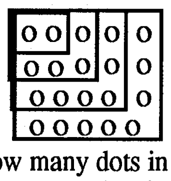
Arcavi et al [Arcavi, 1989] ont mené une étude plus spécifique au champ de l'algèbre visant à reconnaître des processus embryonnaires de pensée à propos de généralisation et de preuve chez des élèves commençant juste l'étude de l'algèbre. Les résultats de cette

---

problèmes, chacun étant pris dans un des quatre groupes de problèmes et 35 sont interviewés sur leur processus de résolution. Voici un exemple de problèmes pour chaque groupe de problèmes.

Un exercice du premier groupe : Is the statement $(a^2+b^2)^3 = a^6 + b^6$ definitively true ? possibly true ? never true ? Say how you know.
Un exercice du deuxième groupe : The sum of two consecutive numbers is always an odd number. Is the statement true ? If it is can you show why ?
Un exercice du troisième groupe : A girl multiplies a number by 5 and then adds 12. She then substracts her starting number and divides the result by 4. She notices that the answer she gets is 3 more than the number she started with. She says, "I think that would happen, whatever number I started with"
Is it rigth? Explain carefully why your answer is right.

Un exercice du quatrième groupe :



The drawing at left represents a set of overlapping rectangles.
The fisrt contains 2 dots, the second contains 6 dots, the third contains 12 dots, the fourth contains 20 dots.

How many dots in the fifth rectangle ? How many dots in the hundredth rectangle ? How do you know ?
How many dots in the n th rectangle ? How do you know ?

recherche révèlent des aptitudes et des difficultés chez des élèves dans le passage d'exemples à la généralisation et à la justification. En général, les élèves parviennent au stade de la généralisation et à différents types de justification sans utiliser l'algèbre. Mais, dans certaines situations, l'absence d'outil symbolique, et plus particulièrement de l'outil algébrique, constitue un obstacle à la pensée.

N. Rouche [Rouche, 1990] montre aussi dans une étude, portant sur des exemples relevant plus du champ de la géométrie que de l'algèbre, que les modes d'accès à l'ensemble des référents jouent un rôle déterminant dans la façon de prouver.

"Prouver, démontrer ne sont pas choses bien définies, qui se laisseraient prendre dans une formule. Cela s'apprend par étapes, des étapes marquées chacune non seulement par un changement (le plus souvent un accroissement) de l'univers du sens, mais encore par une modification du rapport au sens, des modes d'accès à l'ensemble des référents." [Rouche, 1990]

En résumé, il nous semble important de faire intervenir la distinction entre preuves *pragmatiques* et *intellectuelles* pour caractériser la compétence algébrique. En référence aux travaux de Rouche et d'Arcavi, soulignons l'attention que nous porterons dans l'analyse de la rationalité mathématique, au delà de la simple distinction entre preuves pragmatiques et intellectuelles, à la dépendance des types de preuve, du statut des objets manipulés et des capacités techniques qu'ils mettent en jeu. L'étude de Wheeler et Lee [Wheeler, 1987] en est une illustration en algèbre. Etudions de plus près les types de justification spécifiques de l'algèbre dans des situations de type 1 et 2.

VI.2.1.2 Types de justification utilisés dans des problèmes d'algèbre (L. Lee et D. Wheeler)

L. Lee et D. Wheeler ont mené une recherche pour étudier des conceptions des élèves sur la généralisation et la justification. Cette étude porte sur des problèmes d'algèbre des deux premiers types. L. Lee et D. Wheeler ont construit une classification des types de justification mis en œuvre par les élèves, ces types de justification étant liés aux problèmes traités. Elle est organisée en quatre niveaux : justification par appel à des exemples, justification par appel à des procédures connues, justification par appel à des principes généraux, justification par appel à des inférences logiques. Insistons sur le fait que ces types de justification dépendent des tâches et des situations mises en jeu.

L. Lee et D. Wheeler montrent que, même les élèves ayant utilisé l'outil algébrique, ne saisissent pas toujours le sens d'une telle utilisation : les types de justification utilisés sont plus ou moins privilégiés et adéquats selon les types de tâche. Nombre d'entre eux éprouvent le besoin de refaire des calculs numériques. Présentons très rapidement les quatre types de justification qu'ils ont identifiés.

1) Justification par appel à des exemples :

Les élèves n'utilisent pas le calcul algébrique pour exprimer une généralisation et donnent quelques exemples pour prouver.

2) Justification par appel à des procédures connues :

Ce type de justification est surtout utilisé pour étudier la validité d'une égalité portant sur des expressions algébriques. Dans ce cas, les élèves se ramènent souvent à utiliser des procédures de calcul. L'égalité n'est pas toujours validée en termes de valeur de vérité de l'écriture, c'est-à-dire en référence à la dénotation de l'expression, mais en termes de conformité à des procédures de calcul.

Donnons un exemple de la recherche de Lee et Wheeler. Voici l'énoncé de l'exercice traité :

"Is the statement $$\frac{2x+1}{2x+1+7}=\frac{1}{8}$$

definitively true ? possibly true ? never true ? Say how you know.

Certains élèves ont cru que cette égalité était vraie. Pour le prouver, ils ont simplifié le numérateur et le dénominateur de la fraction par $2x$. Ils utilisent alors une procédure de calcul erronée de simplification des fractions pour conclure à la vérité de l'égalité. Cette validation est réalisée en conformité avec des procédures de calcul. Ces élèves n'ont pas fait référence à la dénotation d'une expression algébrique.

D'autres ont utilisé la procédure de calcul "faire le produit en croix" pour prouver que cette égalité était vraie pour une seule valeur.

3) *Justification par appel à des principes généraux* :

Dans ce cas, les élèves utilisent des éléments pertinents mais non coordonnés de l'énoncé pour prouver. Lee et Wheeler différencient les formes faibles, par exemple, répéter l'énoncé du problème ou répéter l'énoncé du problème avec un exemple ou encore utiliser des "mots mathématiques magiques" comme explications,... d'autres formes faisant explicitement référence à l'utilisation de connaissances mathématiques telles que des justifications par appel à des explications mathématiques ou à des propriétés mathématiques générales. Les élèves n'utilisent pas un langage formel pour prouver.

4) *Justification par appel à des inférences logiques:*

C'est le cas où, le calcul algébrique est utilisé comme langage de généralisation et outil de preuve, le traitement algébrique dans la preuve étant correct. Ce type de preuve met en jeu plusieurs types de traitement algébrique : production d'expressions algébriques, validation en référence à la dénotation des expressions algébriques, utilisation du calcul algébrique comme outil de preuve. D'autre part pour démontrer qu'un énoncé est faux, il est fait appel à un contre-exemple.

En résumé, le critère *type de preuve* peut prendre deux valeurs preuve pragmatique (ou preuve par l'exemple) ou preuve intellectuelle.

Mais, nous voyons apparaître plusieurs moyens de justification qui, de notre point de vue, sont à mettre en relation avec des éléments plus globaux comme la rationalité quotidienne ou la rationalité scolaire. Nous avons donc besoin d'affiner notre étude théorique pour catégoriser les types de justification.

VI.2.2 Le critère *type de justification*

Nous prenons en compte la "structure" d'un raisonnement (organisation d'énoncés, réglementation langagière) pour rechercher la structure des raisonnements mis en œuvre par les élèves.

Pour ceci, nous présentons différents points de vue opposant rationalité mathématique et rationalité quotidienne [Legrand 1990] ou rationalité mathématique et conformisme scolaire [Drouhard 1992]. Nous présentons enfin les travaux de R.Duval [Duval, 1993] qui offrent un point de vue plus global. Pour terminer, nous fixons les valeurs globales du critère *type de justification*

VI.2.2.1 Rationalité mathématique et rationalité quotidienne (M. Legrand, R. Duval)

• M. Legrand [Legrand, 1990] oppose *rationalité quotidienne* et *rationalité mathématique*. Dans le quotidien, la rhétorique d'une justification reste davantage au niveau du vraisemblable que du vrai. Donnons en deux illustrations :

"(...) le principe du maximum d'information conduit tout simplement à considérer toute implication comme une équivalence" ;

"(...) la preuve (de la vérité d'énoncés généraux) se fait donc à partir d'explications tendant à rendre la thèse crédible plutôt que logiquement à partir des hypothèses" [Legrand, 1992].

Des raisonnements trop rapides conduisent à confondre le vrai, l'utile et tout ce qui a l'air de "simplifier" parce qu'il faut conclure à tout prix.

M. Legrand associe certaines difficultés des élèves à une prise en charge insuffisante par le système éducatif de la distinction entre "rationalité mathématique" et "rationalité quotidienne" et met l'accent sur le sens de la démonstration et du raisonnement mathématique.

• R. Duval [Duval, 1993] oppose la "structure" de la démonstration à celle du discours "naturel", et à travers ceci donc, les notions de vrai et de vraisemblable.

Dans la vie quotidienne, prouver une thèse, c'est avant tout convaincre quelqu'un en donnant des arguments suffisamment vraisemblables et pertinents. R. Duval a étudié des conditions de passage de l'argumentation[11] au raisonnement en mathématique, et plus particulièrement, à la démonstration [Duval, 1993].

"Pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide. L'argumentation, au contraire, est un raisonnement qui n'obéit pas à des contraintes de validité mais à des contraintes de pertinence. Cette différence est classiquement exprimée par le fait que l'une aurait pour objectif la vérité et l'autre viserait le vraisemblable et la conviction d'autrui ou de soi-même." [Duval, 1993]

R. Duval [Duval, 1993] analyse les difficultés des élèves par une prise en compte insuffisante de la dimension cognitive spécifique d'un raisonnement mathématique, et contrairement à M. Legrand, met l'accent sur la structure du raisonnement mathématique.

VI.2.2.2 Rationalité mathématique, pseudo-formalisme et conformisme scolaire (D. Lacombe, M. Legrand, B. Dumont)

L'enseignement des mathématiques veut faire rentrer les élèves dans le jeu du raisonnement mathématique. Il doit mettre en évidence l'insuffisance d'exemples pour prouver une propriété universellement quantifiée et faire réfléchir les élèves sur les notions de vrai et de faux. Qu'en est-il dans le champ de l'algèbre ? Des études montrent plusieurs conceptions de la rationalité algébrique.

Nous donnons maintenant quelques exemples en nous appuyant sur les travaux de M. Legrand [1992], de B. Dumont [Dumont, 1989], de D. Lacombe [Lacombe, 1988] et de J. P. Drouhard [Drouhard, 1992].

• M. Legrand [Legrand, 1992] montre que de nombreux élèves ayant une attitude scolaire[12], ne résolvent pratiquement jamais les questions en termes vrai/faux mais en termes de droit ou d'erreur.

• Pour B. Dumont [Dumont, 1989], les notions de "vrai" et de "faux" ne sont pas de même ordre pour les mathématiciens et les élèves. Pour les mathématiciens, les notions de "vrai" et de "faux" restent relatives à la théorie dans laquelle ils travaillent tandis que pour les élèves elles sont liées au statut de la question scolaire.

---

[11] L'importance du langage naturel et de l'argumentation est maintenant reconnue pour l'apprentissage des démarches et du raisonnement propres aux mathématiques.

[12] M. Legrand définit les attitudes scientifique, scolaire et quotidienne des élèves [Legrand, 1992].

• En algèbre, D. Lacombe [Lacombe, 1988] indique que beaucoup d'élèves manipulent les écritures algébriques non pas suivant de véritables règles formelles, mais d'après des pseudo-règles de type métaphysique ou juridique. Pour ces élèves, il s'agit souvent de transformer des écritures pour se ramener à une autre écriture d'un type déterminé, par exemple, pour une équation, se ramener à quelque chose de la forme x=... "Dans la mesure où le sens est coupé, il n'y a pas de sémantique approfondie et par conséquent la notion de vrai et de faux leur échappe".

Pour certains élèves, la rationalité mathématique est associée à formalisme. J. P. Drouhard [Drouhard, 1992] montre que de nombreux élèves, les "automathes formels" se construisent une représentation "formelle" des expressions algébriques dépourvue de dénotation. Le "résultat vrai" signifie "formellement correct", c'est-à-dire correspondant à la forme attendue.

"(...) l'authomathe a(vait) une activité qui n'est pas dénuée de rationalité, même si l'absence de dénotation (...) l'empêche d'atteindre la rationalité proprement mathématique."

Nous retrouvons un des types de justification mis en évidence par L.Lee et D. Wheeler : justification par appel à des procédures connues. Mais nous distinguons dans les justifications par appel à des procédures appel au niveau *légal*, des justifications en conformité à des procédures de calcul au niveau formel. Ils constituent deux valeurs globales du critère *type de justification.*

VI.2.2.3 Les composantes du sens d'un raisonnement (R. Duval)

Ce qui précède peut être mis en relation avec les travaux de R. Duval [Duval, 1993] sur les différentes formes du raisonnement. Dans cette étude, R. Duval montre qu'il existe une rupture cognitive entre argumentation et raisonnement déductif.

Un raisonnement lié à l'emploi d'un langage :

- mobilise et énonce des propositions,
- organise les propositions énoncées en une démarche discursive, le locuteur effectuant une démarche cognitive qui dérive une proposition d'une autre et en établit la valeur.

La validité de la dérivation d'une proposition est une condition nécessaire de sa vérité.

A chaque proposition énoncée sont associées trois composantes du "sens" :

- le *contenu* relatif aux objets du discours,
- la *valeur* relative à l'acte accompli du locuteur,
- le *statut* relativement aux autres propositions énoncées.

Indiquons à l'aide d'un schéma les valeurs prises par ces composantes du "sens".

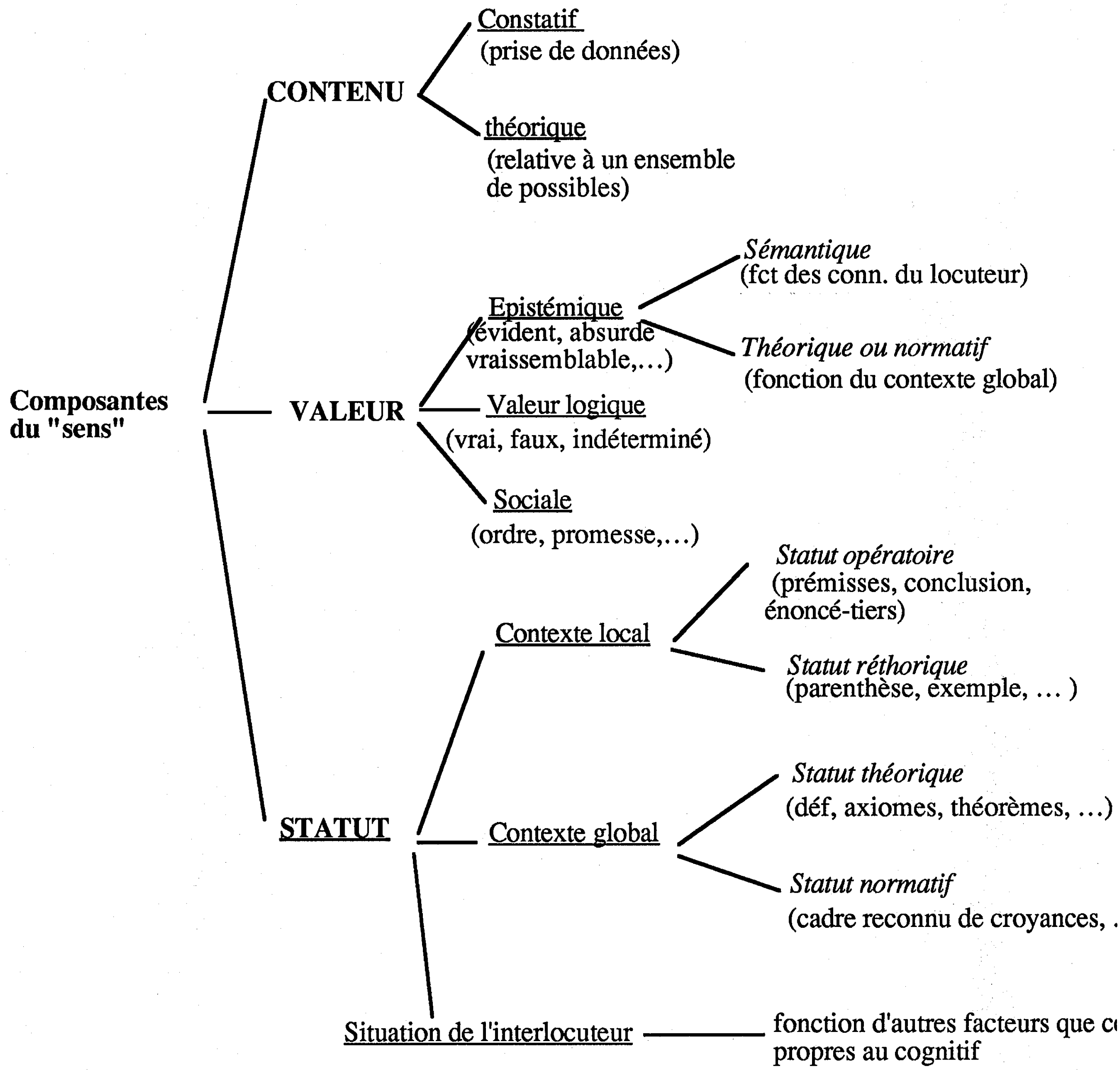


Schéma n° 11 : Les composantes du "sens" d'un raisonnement

Les trois composantes interviennent sur la structure du raisonnement.

Un raisonnement déductif s'organise autour du statut opératoire des propositions. Ce statut ne dépend ni du contenu, ni du statut normatif mais du statut théorique. La valeur épistémique nécessaire est liée au statut théorique de chaque proposition. Ce n'est pas le cas pour une argumentation.

Cette distinction entre argumentation et raisonnement déductif nous semble intéressante pour compléter notre analyse brute et pour situer les différents types de justification. La valeur épistémique peut aussi être liée soit au contenu soit au statut normatif : selon le cas, c'est respectivement la dimension sémantique, formelle ou légale qui est privilégiée. Dans le premier cas, il nous semble que le rapport à la rationalité mathématique est essentiellement du côté du quotidien et dans les autres essentiellement du côté du scolaire.

VI.2.2.4 Les valeurs globales du critère *type de justification*

En conséquence, nous définissons les valeurs globales du critère *type de justification* à partir des moyens techniques qui organisent la justification. Ils sont de fait liés aux types de tâches. L'étude précédente, permet de les regrouper en trois grandes catégories, comme suit :

• <u>plutôt du côté de la rationalité quotidienne</u> : justification par appel à une argumentation, justification par appel au contenu sémantique, justification par appel à des exemples (ici, exemples numériques),

• <u>plutôt du côté du scolaire</u> : justification par appel à des procédures connues, justification par appel à des procédures d'ordre légal,

• <u>plutôt du côté du scientifique</u> : justification par appel à des propriétés générales, justification par appel à des inférences logiques (par exemple, appel au calcul algébrique pour résoudre ou prouver, appel à contre-exemple, appel à un raisonnement déductif).

En ce qui concerne l'élève, nous pouvons faire quelques remarques :
- dans le premier cas, le fonctionnement de l'élève semble peu affecté par le poids du contrat.
- cela est différent dans le deuxième cas ; globalement, il sera nécessaire d'étudier transversalement, dans les différentes tâches, si le fonctionnement rationnel des élèves se trouve plutôt lié au contrat ou plutôt lié au formel. Si oui, nous pourrons en étudier le poids.
- dans le troisième cas, il est plus difficile de mettre en relation le poids du contrat didactique et la rationalité des élèves.

Nous tenterons de discriminer, du côté enseignement et du côté élève, les types de justification privilégiés.

VI.2.3 Synthèse

En résumé, voici une représentation de la structure d'analyse de la composante *rationalité mathématique* :

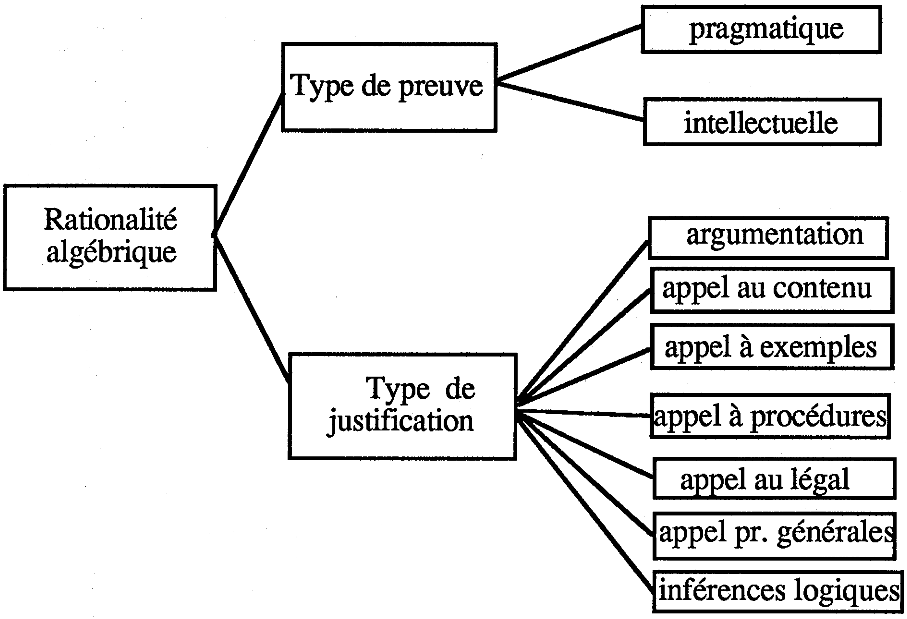


Schéma n° 12 : Structure de la composante *rationalité algébrique*

VII VISION GLOBALE DE LA STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE

Pour conclure, voici un tableau récapitulatif des critères et valeurs globales associées mis en jeu par la structure d'analyse, du côté élève :

Composantes d'analyse	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	**Type de traitement algébrique via type de tâche** Reproduction de tâches numériques non finalisées Reproduction de tâches non finalisées niv1 Reproduction de tâches non finalisées niv2 Interprétation d'une expression algébrique Utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner d'autres notions mathématiques Utilisation de l'outil algébrique traduire une situation intra ou extra-mathématique : - niv 0 : branchement sur formule - niv 1 : production aidée dans un contexte familier/non familier - niv 2 : production dans un contexte familier/non familier Utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve	Correct ou incorrect/Non

Tableau n°13 : Ensemble des valeurs globales du critère *type de traitement algébrique* pour la composante *traitement algébrique*

Composantes d'analyse	Critères	Valeurs globales
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Signe d'effectuation Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Objet (étiquette, mesure) Nombre(inconnu,variable, nombre généralisé)
	Statut des expressions	Procédural Structural
Gestion dans le registre algébrique	Type de formation Type de traitement	Correct Identifiable Non identifiable
Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	Correct Identifiable Non identifiable
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Conforme Non conforme Aucune fonct. de l'algèbre Aucune fonction des mathématiques
Rationalité algébrique	Type de preuve	Pragmatique Intellectuelle
	Type de justification/type de tâche	Argumentation Appel au contenu Appel à exemples numériques Appel au numérique Appel à procédures Appel au niveau légal Appel à contre-exemple Appel à calcul algébrique Appel à des inférences logiques

Tableau n° 14 : Ensemble des valeurs globales des critères pour les composantes d'analyse autres que la composante*traitement algébrique*

CHAPITRE 3

PREMIER TEST DE LA STRUCTURE D'ANALYSE

Ce chapitre décrit un premier test de la structure d'analyse multidimensionnelle présentée dans le chapitre 2. Il s'agit d'étudier si les composantes et les critères de la structure d'analyse ainsi que l'ensemble des valeurs globales attribuées à ces critères permettent :

• de décrire et de discriminer différents types de tâches auxquels sont associés différents types de traitement algébrique,

• de rendre compte, d'une façon qui ne nous semble pas trop caricaturale, des solutions des élèves qu'elles soient conformes ou non à la ou aux solution(s) attendue(s) en Première G.

Dans le paragraphe I, nous présentons l'expérimentation associée à ce test réalisée pendant le premier trimestre de l'année 1991-1992.

Dans le paragraphe II, nous rendons compte des résultats obtenus à partir de l'analyse de quatre types de tâches. Ceux-ci montrent la nécessité de compléter la structure initiale en définissant, pour chaque tâche, des valeurs locales pour les critères retenus.

Dans le paragraphe III, nous proposons une synthèse des premiers résultats obtenus.

I. L'EXPÉRIMENTATION

I.1 LES CHOIX GLOBAUX

La structure d'analyse doit permettre d'appréhender le fonctionnement des d'élèves sans en gommer toute la complexité, de repérer les régularités et les cohérences dans leurs pratiques. Pour tester sa pertinence, nous pensons donc qu'il est nécessaire et indispensable d'analyser des données nombreuses, dans des situations différentes, recueillies sur le long terme.

C'est pourquoi, pendant le premier trimestre de l'année scolaire 1991-1992, nous avons recueilli la plus grande partie des productions écrites systématiques des élèves de la classe de Première G. Dans le paragraphe I.3 de ce chapitre, nous précisons ce que nous entendons par *productions écrites systématiques* et nous montrons en quoi leur analyse doit permettre de valider notre étude théorique.

Très vite, nous avons pris conscience des limites de ce choix : trop de données conduisaient à une explosion du travail d'analyse et limitaient la réalisation d'une étude sur le long terme. En conséquence, à partir du deuxième trimestre, le nombre d'élèves participant à l'expérimentation a été restreint à un échantillon d'une dizaine d'élèves.

Pendant les deux autres trimestres, nous avons affiné notre travail d'analyse en observant des élèves volontaires en situation de résolution de problèmes lors d'entretiens réalisés en dehors du temps scolaire. Ce fut un moyen de "voir" fonctionner les élèves en "temps réel". L'analyse des traces écrites de ces séquences enregistrées a permis d'expliciter certaines pratiques voire d'identifier des facteurs sources d'obstacle ou d'évolution que l'analyse des productions écrites ne permettait pas de faire apparaître (cf paragraphe III).

I.2 LE PUBLIC ÉTUDIÉ

J'ai réalisé l'expérimentation avec les élèves de ma classe de Première G d'adaptation du lycée G. Brassens de Villeneuve le Roi[1]. J'ai prévenu les élèves en début d'année du travail de recherche effectué dans leur classe. Je suis bien sûr consciente des biais que peut occasionner un travail de recherche mené dans sa propre classe. J'essaie d'en tenir compte dans les analyses et de rester prudente dans l'interprétation des résultats. Je tiens cependant à faire remarquer que la durée de la recherche comme la multiplicité des données utilisées ont permis sans doute d'atténuer ces biais.

Une classe de Première G d'adaptation regroupe des élèves ayant obtenu un BEP tertiaire[2]. Ces élèves, après décision de l'équipe éducative de leur classe de BEP, ont été autorisés à poursuivre leurs études en second cycle long pour tenter un baccalauréat technologique tertiaire (G1, G2 ou G3)[3]. Ils peuvent avoir suivi des cursus différents :

• en fin de troisième, passage en BEP tertiaire (CAS, VAM ou ACC), obtention du BEP puis orientation en Première G,

• en fin de troisième technologique, passage en BEP tertiaire, obtention du BEP puis orientation en Première G,

• en fin de troisième, passage en seconde, réorientation en BEP tertiaire puis, après obtention du BEP tertiaire, réorientation en Première G.

---

[1] J'enseigne en lycée depuis 1979 les mathématiques et depuis 1987 l'informatique dans le cadre de l'option informatique des lycées. Le lycée dans lequel j'enseigne actuellement est le lycée G. Brassens de Villeneuve Le Roi dans le Val de Marne.

[2] Il existe trois diplômes de BEP tertiaire :
• BEP CAS : Communication administrative et secrétariat,
• BEP VAM : Vente, action marchande,
• BEP ACC : Comptabilité.

[3] On peut remarquer ces dernières années une évolution dans le recrutement. Les professeurs de LEP n'incitent plus leurs meilleurs élèves à s'orienter vers un bac général technologique mais plutôt vers un bac professionnel. Ce sont les élèves motivés pour reprendre leurs études en cycle long qui prennent l'initiative d'être orientés en Première G d'adaptation. Nous le mettrons en évidence pour quelques élèves à partir de leur dossier scolaire.

Le groupe classe assez hétérogène sur lequel a porté l'expérimentation était constitué de :

• 7 élèves ayant obtenu un BEP ACC après une scolarité en collège jusqu'en troisième ;

• 1 élève ayant obtenu un BEP ACC après une scolarité en collège jusqu'en troisième et deux années de seconde ;

• 5 élèves ayant obtenu un BEP CAS après une scolarité en collège jusqu'en troisième ;

• 3 élèves ayant obtenu un BEP VAM après une scolarité en collège jusqu'en troisième ;

• 1 élève ayant obtenu un BEP VAM après une orientation en quatrième puis troisième technologique ;

• 1 élève ayant interrompu un Brevet de Technicien (bois) par manque d'intérêt après une seconde TSA.

Sur les 18 élèves, 16 avaient redoublé une classe pendant leur scolarité. Ils avaient tous au moins un an de retard (c'est-à-dire au moins 18 ans en Décembre 1991).

Elève	âge en Décembre 1991	filière BEP
Candie	18 ans	CAS
David	18 ans	VAM (3 techno)
Denis	18 ans	ACC
Didier	18 ans	ACC
Eric B.	18 ans	ACC
Eric M.	18 ans	CAS
Fabien	18 ans	BT bois
Isabelle	18 ans	ACC
Karine	18 ans	VAM
Nadia	18 ans	CAS
Nicolas	18 ans	ACC
Nouara	18 ans	CAS
Pascal	19 ans	VAM
Sandrine F	18 ans	CAS
Sandrine P	18 ans	VAM
Sebastien	19 ans	deux 2e puis ACC

I.3 LES DONNÉES ET LA MÉTHODE D'ANALYSE

Nous avons recueilli *trois types de données* : des productions écrites systématiques, des traces informatiques et des transcriptions d'enregistrements d'entretiens avec des groupes de deux ou trois élèves volontaires en situation de résolution de problèmes.

I.3.1 Les productions écrites systématiques

Nous avons choisi de recueillir ces données dans trois *situations* où les contraintes imposées par le contrat didactique sont différentes : les situations de *test d'évaluation en début d'année*, de *contrôle écrit* et de *devoir à la maison.* Ce choix doit permettre de mettre en évidence des caractéristiques stables et des régularités transversales au fonctionnement mathématique des élèves dans des situations qui n'induisent pas les mêmes enjeux didactiques.

• *Le test d'évaluation*

Le test d'évaluation est une épreuve qui a lieu la première semaine de la rentrée. Les élèves se trouvent donc encore sous l'influence des pratiques mises en œuvre dans la classe de BEP. Les exercices du test sont construits pour être accessibles à la majorité des élèves, les résolutions étant conformes ou non à ce qui est attendu en Première G.

Ce test a un double objectif :

• un objectif d'évaluation formative : permettre aux élèves de faire le point sur leurs connaissances pendant un travail autonome,

• un objectif de prise de conscience : permettre aux élèves de contrôler l'état de leurs connaissances par rapport à ce qui est attendu en Première G.

Ce test n'étant pas noté, l'enjeu didactique est ici faible. Nous essayons avant tout de mettre en confiance les élèves pour cet état des lieux. On peut espérer, dans ces conditions, avoir accès à certaines composantes de leur rapport personnel à l'algèbre à l'entrée en Première G.

• *Contrôles écrits en temps limité*

Les contrôles écrits sont donnés régulièrement (environ toutes les trois semaines). C'est une situation où les élèves travaillent de façon individuelle.

Les élèves y sont soumis à de fortes contraintes, du fait des enjeux importants de l'évaluation institutionnelle. En effet, c'est à partir des notes obtenues aux contrôles écrits que les élèves sont jugés pour leur orientation future. C'est donc une situation favorable pour mettre en évidence l'effort des élèves à s'adapter au nouveau contrat didactique, mais aussi l'inadéquation, s'il y a lieu, de leur rapport personnel au rapport institutionnel à l'œuvre en Première G.

Chaque contrôle écrit est, en général, découpé en trois parties distinctes. Ce choix permet de recueillir des informations liées aux diverses situations d'emploi de l'algèbre.

Une des trois parties consiste à rechercher si des propositions sont vraies ou fausses. Dans ce type d'exercices, la démarche de résolution est souvent laissée à la charge de l'élève.

Une autre partie propose un ou des exercices nécessitant explicitement la mise en œuvre de savoir-faire. Les exercices sont fermés, c'est-à-dire que les résultats à trouver sont explicités. Ces exercices demandent peu d'autonomie de la part des élèves.

Une dernière partie met en jeu un exercice de mathématisation. Ces exercices sont semi-ouverts et n'indiquent pas toujours les outils à utiliser dans la résolution.

• *Devoirs à la maison*

Les devoirs à la maison sont donnés régulièrement. Les exercices proposés peuvent être plus ouverts et permettre un travail de groupe. Les élèves n'y sont pas soumis aux mêmes enjeux didactiques que lors des contrôles écrits.

Pendant les deux premiers mois de l'année scolaire 1991-1992, *nous avions fixé avec les élèves un contrat concernant la réalisation et l'évaluation des devoirs à la maison* : ils pouvaient mettre en œuvre des démarches différentes de celles utilisées dans la classe pour résoudre les exercices. Ce contrat a bien fonctionné. Les élèves ont fait référence à des pratiques personnelles utilisées en dehors de la classe. La situation de devoir à la maison leur a donc permis de fonctionner de façon "plus privée", "moins coupée" de ce qu'ils faisaient dans l'institution précédente. En revanche, à la fin du premier trimestre, les élèves devaient résoudre les exercices avec les outils et connaissances institutionnalisés dans la classe de Première G.

I.3.2 Observations et entretiens avec des élèves volontaires par groupe de deux ou trois en situation de résolution de problèmes

Les productions écrites ne présentent que l'aboutissement c'est-à-dire *le résultat et la formulation du travail mathématique des élèves*. Nous avons pensé qu'il était nécessaire de les compléter par des entretiens avec des groupes d'élèves volontaires en situation de résolution de problèmes. C'est un moyen de "voir" fonctionner les élèves en temps réel et donc de recueillir des informations complémentaires à celles obtenues à partir d'une production achevée[4]. Les entretiens ont été enregistrés.

Indiquons brièvement les conditions de ces observations. Des élèves volontaires (quatre ou cinq) se retrouvaient, en dehors du cours de mathématiques et en ma présence, pour résoudre des problèmes. Les consignes de travail étaient les suivantes : après une phase de recherche personnelle, une résolution dans le cadre d'un travail en groupe était réalisée ; en fin de séance, la correction, voire des conseils à chaque élève, étaient

---

4 En particulier, ce matériel permet de mieux repérer la représentation que se font les élèves de l'activité mathématique et donc des traces de leur rapport au mathématique. Nous présenterons cette étude au chapitre 5.

donnés. Chaque élève pouvait expliciter sa résolution, indiquer comment il prenait en compte ou non les arguments des autres élèves. Nous pouvons faire une relecture des observations en différé car chaque entretien a été enregistré au magnétophone puis retranscrit.

I.3.3 Traces des productions d'élèves pendant une tâche technique de développement/factorisation de polynômes obtenues à l'aide d'un logiciel muni d'un mouchard

Nous avons utilisé le didacticiel EXOPOLY réalisé par le CREEM[5]. Ce logiciel propose des exercices de développement ou de factorisation de polynômes. Les actions des élèves à l'interface sont mémorisées par le logiciel puis retranscrites sur une fiche de suivi informatique. De plus, les élèves doivent indiquer par écrit les procédures de calcul utilisées pour chaque exercice. Cela peut permettre une analyse fine des mécanismes de la manipulation formelle, de l'anticipation et du contrôle mis en jeu par les élèves au cours de la résolution.

I.4 LE TEST SUR QUELQUES TYPES DE TÂCHES

Conformément aux choix globaux effectués, nous avons choisi de croiser, pour un *même type de tâche*, trois types de données obtenues dans des conditions différentes à quelques jours d'intervalle :

- deux productions écrites des élèves,
- soit le compte-rendu d'une observation, soit une trace informatique.

En fonction de la classification proposée au chapitre 2, nous avons choisi d'analyser trois classes de tâches :

• les exercices de mathématisation qui consistent à conjecturer et à prouver une relation ("Le prestidigitateur" DM 15/11/1991, "Les pompistes" CE 25/11/91)[6] ou bien à mettre en équation une situation et à la résoudre ("Le minitel" DM 25/10/91, "Le coût du voyage" CE 23/11/91)

• les exercices de "reconnaissance" (test d'entrée 1991-92 Ex2 et Ex3, CE 17/12/91 Ex II),

• les exercices "techniques" (test d'entrée 1991-92 Ex4, CE 5/11/1991 Ex II, traces informatiques)

5Le CREEM est le Centre de Recherche et d'Expérimentation sur l'Enseignement des Mathématiques du CNAM à Paris.

6Nous utilisons les abréviations CE pour contrôle écrit et DM pour devoir à la maison.

Rappelons que les exercices ont été volontairement choisis pour être accessibles à des élèves venant de BEP, sans leur être pour autant nécessairement familiers. Voici une vue d'ensemble des types d'exercices analysés :

Exercice	Enoncé
Le prestidigitateur	Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : "Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7" L'affirmation est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.
Les pompistes	Deux pompistes concurrents A et B vendent l'essence au même prix. Un jour, A diminue son prix de 3% ; alors B diminue le sien de 5%. Puis A diminue encore de 5% et B de 3%. L'un des deux pompistes vend l'essence moins chère. Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Proposez une conjecture et prouvez la.
Minitel	Un organisme veut créer un service de Minitel : il propose aux futurs utilisateurs le choix entre trois tarifs : Tarif A : Paiement d'une somme globale de 380 F Tarif B : Paiement d'une somme de 147 F et de 0,20F par minute de connexion Tarif C : Le prix de la minute de connexion est de 0,45 F. Quel est le tarif le moins onéreux pour l'utilisateur ?
Le coût du voyage	Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150^{F} le voyage aller et retour. Elle consent aux étudiants une réduction de 20% du prix du billet. D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400F par an, on paie le billet à moitié prix. A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?
Test ex2	Est-il exact que : O/N Justifiez votre réponse $-9^2 = -81$ $(-9)^2 = -81$ $-9^2 = 81$ $(-9)^2 = 81$
Test ex3	Pour tout réel a, les égalités suivantes sont-elles vraies ? Donnez un contre-exemple si l'égalité est fausse. Vrai/Faux Si Faux, justifiez votre réponse $a^2 = a.a$ $a^2 = 2a$ $a^2 = a2$ $a^2 = a+a$ $a^2 = a \times a$
Test ex4	Développer et réduire $(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$
ex CE 25/11/91	Développer et réduire $A(x) = (2x-5)^2$ $C(x) = (x-5)(x+5) + (2x-5)^2$ $B = 5a(a+3b) - 3a(a-2b)$ $D(x) = 2(x-3)(x-4) - (x-5)^2$

Fig 1 : Tableau des énoncés

Pour chaque exercice, nous indiquons les composantes et les critères associés :

	Test Ex2	Test Ex3	Test Ex4	CE 11/91	Prestidigit	Pompiste	Coût voy/ Minitel
Fonctionnalité algébrique							
Reproduct.tâche d'ordre num.		X					
Reproduct tâche alg non fin niv1			X	X	X	X	X
Reproduct tâche alg non fin niv2							
Interprétation	X	X			X	X	X
Utilis. outil alg pour faire fonct autres notions							
Traduction/ branc^t formule							
Traduction/ production aidée							X
Traduction/ production					X	X	
Utilis outil de preuve					X	X	
Rapport arithmétique/ algèbre							
Démarche de résolution					X	X	X
Statut du signe d'égalité		X			X	X	X
Statut des lettres		X			X	X	X
Statut des objets		X			X	X	X
Gestion dans registre algébrique							
Type formation	X	X	X	X			
Type traitement			X	X	X	X	X
Articulation entre registre algébrique et les registres sémiotiques							
Type conversion					X	X	X
Fonction de l'algèbre							
Emploi de l'algèbre	Interpréter Justifier	Interpréter Justifier	Reproduire manipulat. formelle	Reproduire manipulat. formelle	Prouver ds contexte concret	Prouver ds contexte concret	Résoudre pb context tertiaire
Rationalité algébrique							
Type de preuve					X	X	
Type de justification	X	X			X	X	X

Tableau n°2 : Répartition des critères mis en jeu par les exercices

Dans ce qui suit, pour chaque exercice, nous organisons l'analyse de la façon suivante :

• D'abord, nous présentons les objectifs visés par l'exercice en termes d'évaluation par rapport à un traitement algébrique attendu et en termes de recherche de cohérences de fonctionnement. Nous en déduisons les composantes, les critères et valeurs associées qui permettent de décrire des solutions attendues, c'est-à-dire, la grille descriptive de l'exercice par rapport à un niveau attendu.

• Deuxièmement, nous caractérisons les solutions envisageables en tenant compte de l'analyse des productions effectives des élèves. Cette analyse montre que, dans la plupart des cas, les valeurs globales des critères définies au chapitre 2 ne sont pas suffisantes pour décrire le fonctionnement des élèves. Nous définissons alors des valeurs locales complémentaires pour ces critères puis la grille d'analyse associée à l'exercice.

• Troisièmement, nous revenons sur les objectifs de validation présentés au début.

Nous détaillons l'analyse pour un exercice : "*Le prestidigitateur*". Il nous semble bien illustrer la méthodologie utilisée, le rôle essentiel joué par la multidimensionnalité de la structure d'analyse, la nécessité d'introduire des valeurs locales.

Pour les autres exercices, nous centrons l'analyse sur quelques points qui permettent de montrer la pertinence de la structure d'analyse, des choix réalisés pour les composantes, les critères et les valeurs globales associées et également de justifier l'introduction des valeurs locales. Quelques analyses détaillées sont données en annexe.

II EXERCICES DE MATHÉMATISATION

II.1 EXERCICES SE RAMENANT À UNE PREUVE

Ce type correspond à la recherche d'une preuve dans un contexte concret.

II.1.1 Devoir Maison 15/11/1991: "Le prestidigitateur"

a) Enoncé

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
"Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7"
L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

b) Analyse de la tâche

• *Les objectifs de la tâche*

Cet exercice nous semble très riche. Son énoncé le rapproche d'un problème à résoudre dans le cadre numérique seul. Mais l'énoncé sous-entend implicitement que, pour tout nombre, le tour est vrai. L'énoncé étant vrai, il n'est pas possible de conclure dans le cadre numérique : il est nécessaire de recourir à l'outil algébrique. Cette démarche sous-entend donc un certain niveau de rationalité mathématique et/ou d'intégration du contrat didactique, et sa réussite, une certaine opérationnalité algébrique. On verra de plus que, même dans le cas d'une résolution algébrique, cet exercice peut mettre en évidence des rapports arithmétique/algèbre relativement complexes.

Cet exercice doit donc permettre d'étudier, pour chaque élève, recourant au moins partiellement à l'algèbre pour sa résolution :

• les différents types de traitement algébrique effectivement mobilisés ;

• le rapport arithmétique/algèbre, et via le recours éventuel à l'algèbre, les formes qu'il prend dans leur continuité/rupture avec les pratiques arithmétiques (cf étude théorique) ;

• le niveau de gestion des représentations symboliques et en particulier l'articulation entre les trois registres sémiotiques : registre du langage naturel, registre des expressions numériques, registre des expressions algébriques - l'énoncé n'étant pas sémantiquement congruent avec la formulation algébrique, notons ici qu'il est nécessaire de reformuler l'enchaînement opératoire ;

• la fonction de l'algèbre ;

• le type de preuve utilisé car, étant donné que l'énoncé est vrai, validation intellectuelle et preuve pragmatique ne peuvent être confondues.

En résumé, toutes les composantes sont donc a priori concernées par cette analyse.

• *Situation de l'exercice par rapport à l'enseignement*

Début novembre, nous avons introduit le calcul algébrique à partir de situations de validation (cf annexe). Il s'agissait pour les élèves de déterminer si des affirmations étaient vraies ou fausses et de justifier chaque réponse. Le travail a été réalisé par groupes de quatre. Deux objectifs essentiels étaient assignés à ce travail :

1) donner du sens au calcul algébrique dans une tâche de généralisation,

2) montrer que le calcul algébrique est aussi un outil de preuve.

L'exercice "le prestidigitateur" faisait partie de la liste des affirmations proposées. Il a été résolu en devoir à la maison après une séance de travaux dirigés. On attendait donc des *élèves l'utilisation de l'outil algébrique.* Nous en tenons compte dans l'analyse des productions.

• *Solutions attendues*

Nous attendons de fait une résolution organisée de la façon suivante :

• test de l'énoncé sur quelques exemples dans le cadre numérique,

• formulation algébrique puis traitement dans le cadre algébrique pour trouver l'expression réduite du résultat, la formulation algébrique pouvant prendre deux formes : écriture globale parenthésée ou bien une écriture pas à pas en succession d'égalités,

• retour au problème initial pour conclure.

L'énoncé comporte des implicites, en particulier le fait que chaque opération s'applique au résultat précédent. Les élèves ont interprété correctement l'énoncé et ont effectué correctement les calculs dans le cadre numérique sauf lorsqu'ils ont voulu utiliser la calculatrice. Nous retrouvons des comportements d'élèves analogues dans d'autres classes, que l'exercice soit posé avec le même énoncé ou un énoncé plus explicite.

• *Grille descriptive*

Compte tenu de ces attentes, nous associons a priori à cette tâche les composantes, les critères et valeurs associées suivantes :

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Réalis. de tâche d'ordre numérique Repr . de tâches algébriques niv1 Repr. de tâches algébriques niv2 Interprétation d'une expression Traduction/branchement sur formule Trad/production guidée Trad/production Utilisation de l'algèbre pour prouver	Non Développement Non Oui Non Non Oui, non familier Oui
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat/équivalence
	Statut des lettres	Nombres généralisés
	Objet et statut des objets	Expression algébr. 1[er] degré Structural/procédural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation Type de traitement	*RF*(*Z*, *x*, (), +,-,x,/,implicite) *RT développement*
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres	Type de conversion	Registre lg naturel vers registre des écrit. algébriques Non congruent : - écriture linéaire globale parenthésée - écriture pas à pas séparée
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Prouver dans contexte concret
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification	Intellectuelle Appel au calcul algébrique

Tableau n°3 : Grille descriptive associée à l'exercice "Le prestidigitateur"

c) Analyse des solutions envisageables

Les solutions proposées par les élèves sont de fait diverses et parfois très différentes des solutions attendues. Elles donnent des indications fines sur le rapport des élèves à l'algèbre, à la rationalité algébrique et/ou aux effets de contrat. C'est pour les prendre en compte que nous serons amenée à introduire des valeurs locales pour certains critères comme annoncé plus haut.

Pour identifier les solutions envisageables, nous organisons d'abord l'analyse autour de l'identification a priori des deux stratégies typiques de résolution, c'est-à-dire, *arithmétique* ou *algébrique*. Puis nous différencions les types d'écriture proposés en distinguant *l'écriture pas à pas en succession d'égalités* de *l'écriture linéaire globale.*

Nous intégrons ensuite les données issues des copies d'élèves. Elles nous permettent d'affiner l'analyse de la fonction apparente de l'algèbre et des types de justification. Pour faciliter la lecture, nous illustrons chaque cas répertorié par la production d'un élève "prototypique".

Voici un tableau d'ensemble des stratégies utilisées et des types d'écriture associées, sur un échantillon de 16 élèves :

Type de stratégie	type d'	écriture	type de traitement	Elèves
Stratégies de nature arithmétique	écriture pas à pas en succession opérations	enchaînée		Daniel, Eric M. , Sandrine F.
		séparée		Isabelle,Denis,Eric B.
	écriture globale linéaire	non parenthésée		Pascal
		parenthésée		Nicolas
Stratégies de nature algébrique	écriture pas à pas en succession opérations	enchaînée	repli sur le numérique	Sandrine F.
		séparée	traitement algébrique correct	Sébastien, Candie ?
			traitement algébrique incorrect	Karine
	écriture globale linéaire	non parenthésée	traitement algébrique substit. numérique	Nouara
			glissement équation	Nadia, Pascal
		parenthésée	pas de réduction algébrique	Nicolas
			réduction algébrique	Didier

Tableau n°4 : Stratégies des élèves dans la résolution du "prestidigitateur"

Nous ponctuons l'analyse par de brefs résumés et indiquons les valeurs locales introduites par un soulignement.

1) **Stratégies de nature arithmétique** :

Comme indiqué, nous distinguons dans ces stratégies deux cas en fonction du type d'écriture utilisé : écriture *pas à pas en succession d'opérations* ou écriture *linéaire globale*.

1.1 Stratégies mobilisant l'écriture pas à pas en succession d'opérations :

Nous séparons de nouveau deux cas selon que l'écriture est enchaînée ou séparée.

• Ecriture pas à pas en succession d'opérations enchaînée : la solution d'Eric M. (Ex 1) l'illustre.

Après avoir posé et effectué les opérations, Eric écrit pour le nombre 5, la suite d'égalités :
5 + 8 = 13 x 3 = 39 - 4 = 35 + 5 = 40 / 4 = 10 + 2 = 12 - 5 = 7

Si on considère un nombre 5 :

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 8 \\ \hline 13 \\ \times\ 3 \\ \hline 39 \\ -\ 4 \\ \hline 35 \\ +\ 5 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{l} 40 \,|\, 4 \\ 10 \\ +\ 2 \\ \overline{12} \\ -\ 5 \\ \overline{7} \end{array}$$

ou $5 + 8 = 13 \times 3 = 39 - 4 = 35 + 5 = 40 / 4 = 10 + 12 - 5 = 7$

Quelque soit le chiffre pensé, on obtient obligatoirement 7 comme résultat.

Si on considère un nombre 0 :

$0 + 8 = 8 \times 3 = 24 - 4 = 20 + 0 = 20 / 4 = 5 + 2 - 0 = 7$

Ex n°1. Eric M.

Si 1 est le nombre auquel je pense je lui ajoute 8 :

$1 + 8 = 9$

Si je multiplie son résultat par 3.

$3 \times 9 = 27$

Si je soustrait 4 à son nouveau résultat.

$27 - 4 = 23$

Si je rajoute à ce nouveau résultat mon nombre initial :

$23 + 1 = 24$

Si je divise ce nouveau résultat par 4

$24 : 4 = 6$

Si j'ajoute 2 à ce nouveau résultat :

$6 + 2 = 8$

Si je soustrait mon nombre initial à ce nouveau résultat :

$8 - 1 = 7$

donc c'est vrai

Ex n° 2 Denis

VRAI. (si on pense) avec n'importe quels nombres le total est toujours égal à 7.
exemple : si x represente le nombre à chercher alors x = 1 ou 6.

Si x represente 1 :

1 + 8 = 9 ; 9 × 3 = 27 ; 27 - 4 = 23 ; 23 + 1 = 24 ; 24 ÷ 4 = 6 ;
6 + 2 = 8 ; 8 - 1 = 7

Si x represente 6.

6 + 8 = 14 ; 14 × 3 = 42 ; 42 - 4 = 38 ; 38 + 6 = 44 ; 44 ÷ 4 = 11 ;
11 + 2 = 13 ; 13 - 6 = 7

2

Ex 2 bis Isabelle

Ex n°3 FAUX
Car si le joueur pense au nombre 2
il ne trouvera pas 7 mais 9 :
2+8 = 10 "tu ajoutes 8"
10×3 = 30 "tu multiplies par 3"
30 - 4 = 26 "tu retranches 4"
26 + 2 = 28 "tu ajoutes ton nombre"
$\frac{28}{4}$ = 7. "tu divise par 4"
7+2 = 9. "tu ajoutes 2"

Et c'est de même si le nombre est 5.
5 + 8 = 13
13 × 3 = 39
39 - 4 = 35
35 + 5 = 40
$\frac{40}{4}$ = 10
10 + 2 = 12

Ex n°3 Eric B.

L'écriture est incorrecte vis à vis de l'égalité. Le signe d'égalité est considéré comme un signe d'annonce de résultat. Eric M. propose ensuite un autre calcul pour le nombre 0 et conclut à la vérité de l'affirmation. La justification est de nature pragmatique.

Eric M. représente pour nous un cas prototypique au niveau de la résolution et de la preuve : validation pragmatique après deux exemples reposant sur une stratégie de nature arithmétique mobilisant l'écriture pas à pas enchaînée.

• Ecriture pas à pas en succession d'opérations séparée :

Denis, Eric B. détaillent les différentes opérations de l'enchaînement. Ce n'est pas le cas d'Isabelle et de Nicolas. Mais tous écrivent une succession d'égalités analogues à celles proposées par Denis (voir ex2) pour le nombre 1 :

1 + 8 = 9
3 x 9 = 27
27 - 4 = 23
23 + 1 = 24
24 : 4 = 6 (Eric utilise l'écriture 24/4)
6 + 2 = 8
8 - 1 = 7

L'écriture est correcte vis à vis de l'égalité qui a ici aussi un statut de signe d'annonce de résultat.

Nous séparons alors l'analyse en deux cas selon les conclusions formulées par les élèves :

• Isabelle après deux exemples (voir Ex 2 bis) et Denis après un seul exemple (voir Ex 2) concluent à la vérité de l'affirmation : ils réalisent une validation pragmatique.

Denis représente un cas prototypique au niveau de la résolution et de la preuve : validation pragmatique sur un exemple, basée sur une stratégie de nature arithmétique mobilisant l'écriture pas à pas séparée.

Nous pouvons remarquer qu'Isabelle tente une formulation algébrique. Elle indique au début de sa résolution, "avec n'importe quel nombre" ou "si x représente le nombre à chercher alors, $x = 1$ ou 6 ...". Elle utilise la lettre x pour désigner un nombre, mais ce symbolisme est sans réelle implication dans la résolution. Nous pouvons rattacher ce comportement, soit à un phénomène de contrat, soit à un manque d'opérationnalité de l'algèbre.

• Eric B. (voir Ex 3) fait un raisonnement correct, mais oublie la dernière étape de l'enchaînement opératoire. A partir de deux contre-exemples, il conclut alors que l'affirmation est fausse. Mais, qu'aurait-il conclu, si la dernière étape avait été réalisée ? Ne se serait-il pas contenté d'une preuve pragmatique ?

1.2 Stratégies mobilisant une écriture linéaire globale :

Nous distinguons encore deux cas, selon que l'écriture est non parenthésée ou parenthésée.

• Ecriture non parenthésée : l'expression obtenue est incorrecte car non référentiellement équivalente à l'énoncé. Par exemple, pour le nombre 2, l'élève écrit l'expression : 2+8x3-4+2/4+2-2.

L'écriture peut être traitée *correctement* ou non, selon que l'écriture garde ou non le sens des actions et conduit alors dans le premier cas à une validation pragmatique.

• Ecriture parenthésée :

Nicolas l'utilise avant une tentative de généralisation. Pour le nombre 17, il écrit, "Nous pouvons écrire cette démarche à suivre de la façon suivante (((((17+8)x3)-4)+17)/4+2)-17=7".

L'expression parenthésée est référentiellement équivalente à l'énoncé et donc correcte.

En résumé, après ces premières études de cas, nous constatons que

• les valeurs globales des critères associées aux composantes *rapport arithmétique/algèbre*, *fonction de l'algèbre* et *rationalité mathématique* permettent de décrire les productions des élèves,

• celles du critère *type de conversion* et *type de traitement* nous semblent insuffisantes. Il est nécessaire de rajouter des valeurs locales afin de mieux caractériser les types d'écriture proposés et les calculs réalisés. Nous fixons comme valeurs du critère *type de conversion* par rapport à cette tâche, écriture pas à pas enchaînée, écriture pas à pas séparée, écriture linéaire globale non parenthésée, écriture linéaire globale parenthésée. Nous fixons comme valeurs locales du critère *type de traitement* calcul avec mémoire et calcul sans mémoire.

2) **Stratégies de nature algébrique** :

Nous les différencions en fonction de la *formulation symbolique* effectuée, en reprenant la classification précédente.

2.1 Stratégies mobilisant l'écriture pas à pas en succession d'opérations :

L'algèbre nous semble utilisée ici en continuité avec les pratiques arithmétiques : c'est le processus opératoire avec tous les résultats intermédiaires qui est traduit algébriquement et non le résultat de l'enchaînement opératoire. Nous distinguons ici deux cas selon que l'écriture est enchaînée ou séparée.

• Ecriture enchaînée : cette écriture est incorrecte vis à vis de l'égalité. De plus, elle induit une complexité formelle ingérable car elle provoque l'utilisation de nouvelles variables pour retenir les résultats intermédiaires. C'est le cas pour Sandrine F. (Ex 4) qui écrit ligne 1 à ligne 6 :

"B = nombre pensé (...)
$(B+8)x3 = S-4 = S^1+B = S^2/4 = S^3+2 = S^4-B = 7$
tous les S / S^1 / S^2 / S^3 / S^4 représentent les sommes trouvées après chaque opération."

N° : 3

B = Nb pensé S : Somme 1re S' : Somme 2e

(B + 8) x 3 = S − 4 = S' + B = S² = S³

S³ + 2 = S⁴ − B = 7 ???

tous les S / S' / S² / S³ / S⁴ représentent
les sommes trouvées après chaque
opération une fois une opération effectuée
il faut = avec le résultat trouvé
faire l'autre opération et ainsi de suite
donc c'est pour cela qu'il y a plusieurs
S

Pour la méthode ci-dessus il a
raison on trouve 7 Mais il faut
après chaque opération effectué faire
égal, donc faire la somme

B = 3
(3 + 8) x 3 = 33 − 4 = 29 + 3 = 32/4 = 8
8 + 2 = 10 − 3 = 7
B = 5 (5 + 8) x 3 = 39 − 4 = 35 + 5 = 40/4 = 10
10 + 2 = 12 − 5 = 7
Quand on fait après chaque opération =
son tour est vrai
Mais par contre si l'on fait toutes
ces opérations tout d'un coup comme
cela :
B = 3

3 + 8 x 3 − 4 + 3 ÷ 4 + 2 − 3 = 22,75

B = 5

5 + 8 x 3 − 4 + 5 ÷ 4 + 2 − 5 = 23,25

son tour est FAUX

En fait s'il veut que son tour soit vrai
il faut qu'il précise qu'après chaque opération
il faut faire = . Mais en pensant le
joueur doit le faire automatiquement
sinon il ne peut se rappeler de toutes
les opérations, il est obligé de faire à
chaque fois le résultat

cela est vrai si le résultat est fait après
chaque opération, on trouve bien 7
cela est faux si l'on fait toutes les
opérations d'un coup en ayant seulement
un =, un résultat. = = calcul de la fin.
Je pense que cela est vrai, car la deuxième
méthode est peu réalisable de tête,
l'on ne peut mémoriser de tête toutes les
opérations. La première est la bonne donc
cela est VRAI.

Exemple 4 : cas de Sandrine F.

Cette écriture s'avérant inexploitable du point de vue de la preuve, Sandrine change de stratégie et se replie sur le numérique : elle substitue des valeurs numériques en utilisant toujours le même type d'écriture, l'écriture pas à pas enchaînée, incorrecte vis à vis de l'égalité, mais conservant le sens numérique de production de l'égalité. Elle conclut alors à la vérité de l'affirmation par une validation pragmatique après deux exemples (lignes 15 à ligne 21).

Après cette première conclusion, Sandrine recompose le problème initial en un autre problème en supposant que les opérations peuvent être faites "tout d'un coup". Elle utilise alors l'écriture linéaire globale non parenthésée sans tenir compte du sens de l'action (cf 1.2) et donne deux contre-exemples pour conclure que, dans ce cas, l'affirmation est fausse (lignes 25 à 29).

Pour conclure définitivement, Sandrine s'appuie sur la "situation concrète du prestidigitateur".
Elle écrit : "En fait, s'il veut que son tour soit bon, il faut faire =. Mais en pensant, le joueur doit le faire automatiquement, sinon il ne peut se rappeler de toutes les opérations" (lignes 30 à 36). Elle fait appel au contenu sémantique et à l'argumentation. Elle nous semble du côté de la rationalité quotidienne.

Le cas de Sandrine F. illustre le rôle important joué par le symbolisme utilisé vis à vis du niveau de preuve. De plus, il montre bien les changements de stratégie "obligés" en cours de résolution. En effet, après une démarche algébrique inachevée liée à une écriture algébrique complexe pas à pas enchaînée, ingérable du point de vue d'un traitement algébrique, elle se replie une preuve pragmatique s'appuyant sur une écriture de même type obtenue après substitution numérique. Elle conclut définitivement à la vérité de l'affirmation en faisant appel à la situation concrète, c'est-à-dire au contexte quotidien, après avoir montré avec deux contre-exemples qu'une autre interprétation de l'exercice traduite par une écriture linéaire globale non parenthésée conduit à une affirmation fausse.

Sandrine semble loin d'un traitement algébrique utilisant une écriture séparée pas à pas et encore plus une écriture globale linéaire parenthésée. Et pourtant, elle essaie visiblement de rentrer dans le jeu de l'algèbre. Elle sait substituer des valeurs numériques dans une expression algébrique en gardant la mémoire du calcul et s'appuie sur cette fonction attribuée à l'algèbre pour se ramener à une preuve pragmatique.

• Ecriture séparée : le traitement formel du symbolisme algébrique peut être *correct* ou non.

- Dans le cas d'un traitement formel correct, le calcul algébrique est utilisé comme outil de preuve mais la démarche de résolution reste proche de l'arithmétique, le statut du signe d'égalité conservant une certaine ambiguïté. Vu la formulation de l'énoncé, il faut reconnaître que c'est la stratégie de nature algébrique la moins coûteuse.

Voici la résolution proposée par Sébastien. "Soit x un nombre,
$x+8$
$(x+8)3= 3x+24$
$3x+24-4 = 3x+20$
$3x+20+x = 4x+20$
$(4x+20)/4 = x+5$
$x+5+2 = x+7$
$x+7-x = 7$
Le prestidigitateur peut être sûr de lui car on trouvera toujours 7"

n° 3

Evolution du tour du prestidigitateur :

tu penses un nombre	=>	x
tu ajoutes 8	=>	$x+8$
tu multiplies par 3	=>	$(x+8)3 = 3x+24$
tu retranches 4	=>	$3x+24-4 = 3x+20$
tu ajoutes ton nombre	=>	$3x+20+x = 4x+20$
tu divise par 4	=>	$\frac{4x+20}{4} = x+5$
tu ajoutes 2	=>	$x+5+2 = x+7$
tu soustrais ton nombre	=>	$x+7-x = 7$
tu trouve 7	=>	7

Le prestidigitateur peu être sûr de lui car on trouvera toujours 7.

Exemple 5 : Le cas de Sébastien

Vrai -> $x+8 = 8x$

$3 \times (8x) = 24 + 3x = 27x$

$27x - 4 = 23x$

$23x + x = 24x$

$24x \div 4 = 6x$

$6x + 2 = 8x$

$8x - x = 7$

la solution est bien égal à $\boxed{7}$

Exemple 6 : Le cas de Karine

En résumé, Sébastien fait une généralisation et manipule correctement l'outil algébrique pour prouver que cette affirmation est vraie, en utilisant l'écriture pas à pas séparée. Il utilise la stratégie algébrique la plus proche d'une démarche arithmétique.

- Un traitement formel incorrect s'appuie sur des règles de transformation incorrectes.

Le cas de Karine en est un exemple significatif. Elle traduit symboliquement l'énoncé avec l'écriture pas à pas séparé. Sa démarche est donc très proche d'une démarche correcte. Mais nous voyons apparaître un dysfonctionnement lié au système de représentation algébrique construit par Karine mais aussi aux règles de transformation utilisées : ce traitement va réapparaître à l'exercice 3 du test.

Karine propose l'enchaînement suivant d'égalités :
"Vrai —>x+8= 8x
3(8x) = 24+3x = 27x
27x-4 = 23x
23x+x = 24x
24x / 4 = 6x
6x+2 = 8x
8x-x = 7"

Pour obtenir un résultat sans signe opératoire à chaque membre droit d'une égalité, Karine utilise des *règles de traitement d'assemblage final.* Nous retrouvons une des difficultés signalée par Davis [Davis, 1975], nommée "process-product dilemma". Karine "réduit" donc incorrectement les écritures par "assemblage final" Mais l'écriture utilisée garde le sens relatif au problème posé et lui permet de mobiliser des règles de formation incorrectes mais aussi des règles correctes de calcul formel (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, réduction) pour trouver finalement le résultat de l'enchaînement opératoire. Remarquons que la connaissance du résultat 7 a pu aussi inciter Karine à utiliser des règles de transformation erronées pour parvenir à ce résultat[7].

Ici, Karine essaie de rentrer dans le jeu symbolique mais nous pouvons nous demander si cela ne relève pas d'un effet de contrat.[8]

En résumé, Karine utilise une stratégie de nature algébrique proche d'une démarche arithmétique pour résoudre le problème, car sa formulation repose sur l'écriture pas à pas séparée. La résolution est parasitée par la gestion incorrecte mais identifiable du registre des écritures algébriques et un dysfonctionnement du calcul algébrique, dont les règles sont définies ci-dessous. L'utilisation de l'algèbre semble plutôt relever d'un effet de contrat.

Nous constatons que :

[7]Dans d'autres exercices traités par Karine, nous avons aussi repéré le même système de gestion des écritures algébriques.
[8] La résolution de Karine dans l'exercice "Minitel" semble confirmer cette hypothèse.

• les critères de toutes les composantes interviennent dans l'analyse,

• ils permettent de décrire ces diverses solutions à condition de compléter les valeurs globales des critères *type de formation*, *type de traitement* par de nouvelles valeurs locales. Nous les fixons en émettant des hypothèses sur les règles de formation et de traitement utilisées par Karine dans le registre des écritures algébriques :

- en reconnaissance, règle de formation :

$ax \longrightarrow a+x$ codée désassemblage par addition

- en production, règles de transformation :

$x+a \longrightarrow xa$ codée règle d'assemblage final

Les deux règles suivantes en sont des variantes :

$ax \pm b \longrightarrow (a \pm b)x$; $ax\text{-}x \longrightarrow a\text{-}1$

$a+bx \longrightarrow (a+b)x$ codée calcul de gauche à droite

Nous rajoutons appel à réécriture comme valeur du critère *type de justification.*

2.2 Stratégies mobilisant l'écriture linéaire globale : Nous retrouvons aussi deux cas selon que l'écriture utilisée est non parenthésée ou parenthésée.

• Ecriture non parenthésée : on obtient l'expression $x + 8 \times 3 - 4 + x / 4 + 2 - x$. Cette écriture code l'enchaînement opératoire décrit dans l'énoncé. L'expression obtenue est incorrecte car faussement congruente à l'énoncé et non référentiellement équivalente. Le problème se ramène donc à prouver que pour tout nombre x, l'égalité

$x + 8 \times 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7$ est vraie.

Nous distinguons deux cas : repli sur le numérique ou bien résolution d'une équation en restant dans le cadre algébrique. Ces deux démarches peuvent être mises en relation avec la fonction jouée par l'algèbre.

- Repli sur le numérique : Donnons l'exemple de Nouara (Ex 7).

Nouara redonne du sens à l'écriture en substituant aux variables des valeurs numériques pour réaliser les calculs successifs par calcul mental.

Après avoir reformulé l'énoncé en langage naturel "en prenant un nombre quelconque et en faisant l'opération suivante on devra trouver 7" (lignes 1 à 3), Nouara code l'énoncé par l'écriture globale non parenthésée mais ne la traite pas algébriquement. Elle retrouve le sens de l'enchaînement opératoire en l'effectuant à l'aide d'un calcul mental dans le cadre numérique. Elle explicite ce qu'elle entend par calcul mental (lignes 23 à 38 . Les calculs ne sont qu'ébauchés sur trois exemples (lignes 13 à 21). Nouara semble utiliser l'algèbre comme une écriture sténographique. Elle conclut alors que l'affirmation est vraie : c'est une validation pragmatique.

Après cette première conclusion, Nouara soulève un implicite de l'énoncé : chaque opération s'applique-t-elle au résultat précédent ? Une ambiguïté apparaît quand elle fait référence à un calcul réalisé à la calculatrice sans taper le signe = après chaque opération. Nouara simule le calcul avec le nombre 7,5 et obtient un résultat différent de 7 (lignes 38 à 41).

en prenant un nombre x quelconque et en faisant l'opération suivante on devra trouver 7 d'après un prestigidateur.

Nous devons (prouver) cela

Vrai ou Faux ?

Voici l'opération

$x + 8 \times 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7$

Prenons $x = 7{,}5$ et $x = 12$
et $x = 165$

Mentalement nous trouvons les résultats suivants $x + 8 \times 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7$

$14{,}5 - 7{,}5 =$

$7 = 7$

Vrai

même chose pour
$x = 2$
$x = 165$

On constate donc que pour tout entier naturel pair ou impair est valable à cette opération
$x + 8 \times 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7$
en faisant le calcul mentalement. ~~Un calcul~~

Sachant qu'un calcul mental suppose un calcul progressif c'est à dire que à chaque opération à effectué il faut le résultat pour effectuer l'opération suivante c'est à dire en procédant de cette façon :

$$7{,}5 + 8 \times 3 - 4 \;\text{-----}\; = 7$$

$$= 15{,}5 \times 3$$

$$= 46{,}5 - 4$$

$$= 42{,}5 \;\text{------}\; = 7$$

Même chose si on tape l'opération à la calculatrice et à chaque opération taper $\boxed{=}$ alors on trouvera 7

Hors si on tape l'opération à la calculat de la façon suivante

$\boxed{7{,}5}\ \boxed{+}\ \boxed{8}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{7{,}5}\ \boxed{/}\ \boxed{4}\ \boxed{+}\boxed{2}$

$\boxed{-}\ \boxed{7{,}5}\ \boxed{=}\ \boxed{38{,}875.}$

On peut donc en conclure que le résultat dépe de la façon dont on aura procédé pour calcule
soit mentalement
ou à la calculatrice.

<u>Exemple 7</u> : Le cas de Nouara

Nouara conclut en indiquant que "le résultat dépend de la façon dont on aura procédé pour calculer". Ici, sa justification dépend de l'utilisation de la calculatrice.

En résumé, Nouara se lance dans une stratégie algébrique mais ne peut exploiter l'écriture globale linéaire du point de vue de la preuve. C'est l'enchaînement opératoire qu'elle formule et non le résultat de l'enchaînement. Nouara utilise *l'algèbre pour sténographier.* Elle revient ensuite dans le cadre numérique en substituant aux variables des valeurs numériques et s'engage dans une validation pragmatique en argumentant ses choix sur l'utilisation de la calculatrice. Cela ne lui permet pas de trancher.

- Glissement vers équation : l'écriture globale linéaire non parenthésée induit un glissement vers l'équation donc un glissement de x comme nom de variable à x comme nom désignant une inconnue. L'écriture conduit, si l'égalité à 7 est posée, à x =...

En voilà deux illustrations.

* Nadia (Ex 8) résout correctement l'équation mais n'en conclut pas que la conjecture est fausse.

L'équation $x + 8 \text{ x } 3 - 4 + x / 4 + 2 - x = 7$ semble être une traduction non opératoire de l'énoncé car elle écrit "Tout d'abord, on suit exactement les instructions qui nous sont données" (lignes 9 à 10).

Elle résout l'équation en tenant compte du sens lié à l'écriture globale non parenthésée : c'est un problème distinct de l'énoncé qui est alors résolu et sa résolution est correcte (lignes 2 à 7). Elle trouve comme solution le nombre -60 et vérifie numériquement qu'il convient[9]. L'affirmation proposée dans l'énoncé n'est ni validée ni invalidée, car Nadia a résolu un autre problème. Nadia s'est ramenée à résoudre des exercices connus tels que résoudre une équation du premier degré même si la solution proposée ne répond pas au problème posé.

En résumé, après une formulation incorrecte de l'énoncé utilisant l'écriture linéaire globale. Nadia se ramène à résoudre un exercice connu, distinct de celui proposé. La résolution met en jeu des règles correctes. L'algèbre semble avoir comme fonction de résoudre des équations.

* Pascal (Ex 9) résout l'équation de façon incorrecte et n'exploite pas la solution.

Dès le début, Pascal indique "Si l'on veut recopier cet exercice en langage mathématique, c'est-à-dire avec une équation". L'énoncé est "recopié" en ne tenant pas compte de l'ordre des opérations et en supposant que l'affirmation est vraie. Pascal se ramène à résoudre une équation, principale fonction attribuée à l'algèbre.

Pascal résout l'équation proposée (lignes 5 à 8). Le traitement algébrique de l'équation est altéré sur plusieurs points, même s'il connaît les règles à utiliser pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue : regrouper les x dans un membre, les nombres dans l'autre. Il "oublie 7", il ne change pas de signe en changeant de membre (règle de transposition multiplicative), il regroupe les x sans tenir compte des opérations (regroupement de termes). De plus, il confond le résultat de l'opération, avec la valeur initiale de x.

[9] Il semble que, dès le début de la résolution, Nadia n'entrevoit qu'une seule solution pour ce problème. Elle écrit : "(...) en ce qui concerne le nombre auquel il faut penser, on choisit pour le moment la valeur x". On recherche la valeur de x afin de trouver le nombre auquel il fait allusion" (ligne 12 à ligne 15). Il y a eu un glissement qui aboutit à la recomposition d'un autre problème : c'est le prestidigitateur qui pense le nombre et non le joueur. Elle conclut "Il ne reste plus qu'à effectuer le tour en utilisant le -60 (...)".

$x + 8 \times 3 - 4 + x \div 4 + 2 - x = 7$

$x + 24 - 4 + \frac{x}{4} + 2 - x = 7$

$22 + \frac{x}{4} = 7$

$\frac{88 + x}{4} = \frac{28}{4}$

$88 + x = 28$

$x = -88 + 28$

$x = -60$

$-60 + 8 \times 3 - 4 + (-60) \div 4 + 2 - (-60) = 7$

Tout d'abord on suit exactement les instructions qui nous sont données, et en ce qui concerne le nombre auquel il faut penser → On choisit pour le moment la valeur x..

1.– On recherche la valeur de x afin de trouver le nombre auquel il fait allusion et on trouve –60.

2.– Il ne reste donc plus qu'à effectuer le tour en utilisant le –60 ce qui fait effectivement à la fin 7.

Exemple 8 Le cas de Nadia

(3) Si l'on veut recopier et préciser en langage mathém/
c'est à dire avec 1 équation : on procède ainsi

x = nbre pensé par nous

$x + 8 \times 3 - 4 + x \div 4 + 2 - x = 7$

$x + x - x = 8 \times 3 - \frac{4}{4} + 2$

$2x - x = 24 - 1 + 2$

$x = 25$

Or x doit être égal à 7 et non 25

Le problème posé est d'une logique mathématique, et d'une simplicité déconcertante...

Prenons 36 comme exemple pour x :

on additionne 8 à 36. De ce résultat, on le multiplie par trois. De ce nouveau résultat, on soustrait – quatre et ainsi de suite pour arriver à [...] 36 qui donne effectivement 7.

$36 + 8 \times 3 - 4 + 36 \div 4 + 2 - 36$
$44 \times 3 - 4 + 36 \div 4 + 2 - 36$
$132 - 4 + 36 \div 4 + 2 - 36$
$128 + 36 \div 4 + 2 - 36$
$164 \div 4 + 2 - 36$
$41 + 2 - 36$
$43 - 36$
7

Ce sont, par moi, les 3 derniers calculs qui doivent être importants, le reste n'est qu'une mise en scène pour épater.

Exemple 9: Le cas de Pascal

Pascal ne peut exploiter ce résultat et écrit "Le problème posé est d'une logique mathématique, et d'une simplicité déconcertante..."

Pascal se retrouve dans une impasse et revient à une démarche arithmétique. Il utilise la même écriture globale non parenthésée pour calculer le résultat de l'enchaînement opératoire avec le nombre 36 (écriture déjà citée dans le paragraphe a.2). Dans ce cas, l'écriture conserve le sens de l'énoncé et les opérations sont effectuées correctement les unes après les autres. Pascal s'est replié sur une validation pragmatique. Il est intéressant de voir la différence de traitement des deux expressions a priori identiques, selon que le calcul est numérique ou littéral, et ceci, à quelques lignes d'intervalles.

A la fin de sa copie, Pascal indique ce qu'il pense de l'algèbre. Il écrit "Se sont, pour moi, les 3 (?) derniers calculs qui doivent être importants, le reste n'est qu'une mise en scène pour épater".

En résumé, après avoir résolu incorrectement l'équation obtenue par "recopie" de l'énoncé, Pascal se replie sur une solution numérique, à partir d'un exemple. Il utilise deux règles incorrectes pour résoudre l'équation, une <u>règle de transposition multiplicative</u> et une règle de <u>regroupement de termes</u>. La preuve finale est <u>*pragmatique*</u>. L'algèbre semble associée à la <u>résolution des équations</u>.

• <u>Ecriture parenthésée</u> : l'écriture parenthésée permet de symboliser le résultat de l'enchaînement opératoire décrit dans l'énoncé. La forme parenthésée correcte de l'expression est complexe parce qu'elle nécessite six couples de parenthèses emboîtées ((((((x+8)3)-4)+x)/4)+2)-x, x désignant un nom de variable.

L'expression algébrique obtenue peut être réduite ou non, correctement ou non. Illustrons-le par les solutions de Nicolas et de Didier qui se différencient par la réduction ou non de l'expression.

- Nicolas ne réduit pas l'expression proposée et ne réalise explicitement aucun traitement algébrique.

Nicolas s'appuie sur le réel pour faire une conjecture mais indique que ce n'est pas suffisant et qu'il faut après le prouver : "après avoir compris que c'est un illusionniste qui est le protagoniste de cet énoncé, la première réponse que je peux donner est que cette personne va réussir ce qu'elle entreprendra. Mais dans un deuxième temps il nous est nécessaire de résoudre le problème posé par celui-ci".

Nicolas propose donc de tester le résultat avec le nombre 17, en suivant l'enchaînement opératoire proposé par l'énoncé. Il utilise l'écriture pas à pas séparée, donc correcte du point de vue du signe d'égalité. Il indique: "Nous pouvons écrire cette démarche à suivre de la façon suivante :
((((((17+8)x3)-4)+17):4)+2)-17 = 7".

Il tente ensuite une généralisation. Nicolas semble considérer 17 comme un nombre générique et écrit ensuite l'expression pour x quelconque, ((((((x +8)x3)-4)+x):4)+2)-x.

En s'appuyant sur l'égalité ((((8x3)-4)+17):4)+2) = 7, il affirme qu'il va démontrer que le tour est vrai. On ne sait s'il a ou non fait une preuve intellectuelle en réduisant "dans sa tête" les x intervenant dans l'expression parenthésée. Mais, il ne semble pas en mesure de traiter algébriquement l'expression parenthésée. Nicolas conclut que l'affirmation est vraie en explicitant comment "n'importe quel nombre" comme 17 "s'annule" dans le calcul réalisé. Il termine, par défaut de compétence algébrique, par une *argumentation* basée sur le contexte.

3/ En lisant l'énoncé et après avoir compris que c'est un illusionniste qui est le protagoniste de cet énoncé, la première réponse impulsive que je peux donner est que cette personne va réussir ce qu'elle entreprendra. Mais dans un deuxième temps il nous est nécessaire de résoudre le problème posé par celui-ci. Donc si je prends un chiffre au hasard, par exemple le 17, je vais essayer de ~~résoudre~~ la ~~démarche~~ proposée par le prestidigitateur.

$17 + 8 = 25$ $25 \times 3 = 75$ $75 - 4 = 71$

$71 + 17 = 88$ $88 \div 4 = 22$ $22 + 2 = 24$

$24 - 17 = 7$ $x = 17$ $((((((x+8)\times 3)-4)+x)\div 4)+2)-x = 7$

Nous pouvons écrire cette démarche de la façon suivante :

$(((((17+8)\times 3)-4)+17)\div 4)+2)-17 = 7$

Il est possible de définir par assurance lors de la réalisation de ce tour. Il suffit de prendre des chiffres en les additionnant, soustrayant, divisant, multipliant du moment que le résultat est 7. Donc pour tout chiffre le résultat sera toujours 7. Je vais démontrer cette affirmation :

$(((8 \times 3) - 4) \div 4) + 2) = 7$

et de façon intuitive n'importe quel nombre du moment qu'il s'annule comme ici le chiffre 17 (comme tout nombre) est ajouté puis soustrait par lui-même donc il s'annule. Le prestidigitateur peut être sûr de lui lors de la réalisation de son tour. Ce genre de tour fait bien partie de la philosophie de l'art, des idées des illusionnistes.

Exemple 10. Le cas de Nicolas

En résumé, après une conjecture réalisée en utilisant l'écriture pas à pas séparée sur un exemple numérique, Nicolas propose une autre écriture, l'écriture linéaire globale parenthésée, pour représenter le résultat de l'enchaînement opératoire. Il conçoit les expressions opérationnellement et structuralement, ce qui semble faire avancer la résolution. Il propose alors une ***généralisation*** à partir du nombre 17 qu'il semble considérer comme un nombre générique. Il n'utilise pas de traitement algébrique pour réduire l'expression parenthésée qui est complexe. Il explicite les calculs réalisés à l'intérieur des parenthèses pour conclure à la vérité de l'affirmation. Pour conclure, il se replie sur une argumentation liée au contexte par défaut de compétence algébrique.

- Didier réduit l'expression construite mais trouve un résultat incorrect en faisant une erreur. Didier ne s'appuie pas sur la réduction pour conclure et revient au numérique pour se convaincre. Dans ce cas, le calcul algébrique n'est pas exploité comme un outil de preuve.

Examinons la solution de Didier.

"Soit x le nombre utilisé
x+8 puis multiplié par 3
(x+8)x3 puis on enlève 4 au total
(x+3)x3-4 puis on ajoute x
(x+3)x3-4+x puis on divise par 4
(x+3)x3-4+x :4 puis on ajoute 2
(x+3)x3-4+x :4+2 puis on enlève x
(x+3)x3-4+x :4+2-x
3x+9-4+x :4+2-x
3x+5+x :4+2-x
3x /4+5/4+x /4+2-x
1,75x +1,25+0,25x +2-x
x +3,25 "

Didier formule algébriquement le problème puis veut démontrer algébriquement que la proposition est vraie. Il sait traduire algébriquement un enchaînement opératoire à l'aide d'une expression algébrique parenthésée qu'il construit progressivement, mais après la première étape, il "omet" d'écrire les parenthèses et recopie incorrectement un nombre. Il engage le calcul de l'expression en la traitant comme si elle était parenthésée et en utilisant des règles correctes de manipulation formelle. Il semble travailler comme s'il ne distinguait pas système parenthésé et système non parenthésé (pour cet élève, on retrouve cette difficulté dans les exercices 2 et 12 du test initial). L'expression algébrique obtenue est incorrecte. Pour résoudre le conflit entre sa conviction et sa preuve, il revient au numérique pour conclure. Dans le cadre numérique, il utilise l'écriture pas à pas séparée sur un seul exemple et affirme en conclusion que l'affirmation a été démontrée. C'est une validation pragmatique.

En résumé, une *stratégie de nature algébrique* conduit Didier à calculer le résultat de l'enchaînement opératoire, mais l'expression obtenue est incorrecte (erreur de recopie et écriture non parenthésée) et Didier se replie sur une *preuve pragmatique* pour conclure à la vérité de l'affirmation.

Evolution du tour du prestigitateur
Soit x nombre utilisé

$x+8$ puis multiplié 3
$(x+8)\times 3$ puis on enlève 4 au total
$(x+3)\times 3-4$ on ajoute x
$(x+3)\times 3-4+x$ puis on divise par 4
$((x+3)\times 3-4+x):4$ puis on ajoute 2
$((x+3)\times 3-4+x):4+2$ puis on enlève x
$((x+3)\times 3-4+x):4+2-x$
$(3x+9-4+x):4+2-x$
$(3x+5+x):4+2-x$
$\frac{3x}{4}+\frac{5}{4}+\frac{x}{4}+2-x$

$0,75x+1.25+0,25x+2-x$
$x+3,25$

Si $x = 4$
$4+8=12$
12 $(4+8)\times 3=36$
$36-4=32$
2. $32+4=36$
$36:4=9$
$9+2=11$
$11-4=7$
Donc le tour du prestigitateur est bon puisque il a été démontré.

Ex 11 Didier

Remarquons, qu'aucun élève ne conclut dans le cadre algébrique, que la réduction soit correcte ou incorrecte[10].

De l'étude des stratégies algébriques, nous pouvons conclure que :

• Les valeurs fixées a priori pour les critères *type de formation* et *type de traitement* doivent être complétées en fixant comme nouvelles valeurs liées à cette tâche d'une part, <u>désassemblage par addition</u>, <u>sans parenthèse</u> et d'autre part, <u>erreur recopie</u>, <u>assemblage final</u>, <u>regroupement de termes</u>, <u>règle de transposition multiplicative</u>,

• Les valeurs fixées a priori pour le critère *fonction apparente de l'algèbre* et *type de justification* doivent aussi être complétées.

Nous définissons les valeurs locales suivantes pour le critère *fonction apparente de l'algèbre* :

- <u>algèbre pour substituer des nombres aux lettres dans une formule</u> : l'élève formule d'abord un problème algébriquement puis se ramène au cadre numérique. Les expressions algébriques produites sont alors considérées comme des formules dans lesquelles on substitue des nombres aux lettres ;
- <u>algèbre pour nommer</u> : l'élève nomme les objets mathématiques manipulés à l'aide de lettres mais il ne les mobilise pas dans un calcul algébrique ;
- <u>algèbre pour sténographier</u> : l'élève utilise le langage algébrique comme écriture d'abréviation ;
- <u>algèbre pour résoudre des équations</u> : l'élève ramène la résolution d'un problème à celle d'une équation, même si cette résolution n'a aucun rapport avec le problème. L'usage de l'algèbre est associé à un geste, la résolution d'une équation ;
- <u>algèbre pour répondre au contrat</u> : l'élève donne une solution qui répond aux consignes données en classe. Dans cette étude, le professeur a demandé de mobiliser l'outil algébrique pour construire une preuve. L'élève respecte les consignes même si le calcul algébrique utilisé est dépourvu de sens et conduit à une preuve incorrecte.

Nous définissons les valeurs locales <u>appel à la calculatrice</u>, <u>appel au contexte quotidien</u> pour le critère *type de justification.*

En résumé, nous donnons la liste des critères et valeurs globales et locales associées pour analyser les productions relatives à cette tâche, les valeurs locales introduites étant soulignées. Ceci constitue la grille d'analyse associée à l'exercice "le prestidigitateur" :

[10] En 1992-1993, quelques élèves de la classe de Première G ont utilisé l'algèbre comme outil de preuve pour résoudre le problème.

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Traitement algébrique	**Type de traitement algébrique** via le type de tâche Reprod. tâche d'ordre numérique Reproduction tâche alg. niv1 Trad/production d'une expression Outil de preuve	Correct, incorrect, non traité
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Inconnue Nombre généralisé
	Objets et statut des objets	Expression algébrique Equation Structural Procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion entre registre algébrique et registre du langage naturel	Ecriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations Ecriture pas à pas séparée en succession d'opérations Ecriture linéaire globale non parenthésée Ecriture linéaire globale parenthésée
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Correct Sans parenthèse Désassemblage
	Type de traitement	Correct Calcul avec mémoire Assemblage final Regroupement de termes Erreur recopie Règle transposition multiplicative
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour substituer nombres dans formule - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre pour résoudre équation - algèbre pour répondre au contrat
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification	Appel à argumentation Appel à exemples (pragmatique) Appel au contexte Appel à calculatrice Appel au numérique Appel à des règles Appel au légal Appel à réécriture Appel au calcul algébrique

Tableau n°5 : Grille d'analyse associée au problème "Le prestidigitateur"

d) Synthèse

• La structure d'analyse se révèle bien un appui essentiel pour l'analyse et permet de décrire, pour cette tâche, les solutions attendues et celles des élèves à condition de raffiner certaines valeurs globales des critères pour prendre en compte de façon satisfaisante d'abord ses spécificités et ensuite les démarches personnelles utilisées par les élèves. Elle peut jouer effectivement un rôle important en plaçant des repères pour des recherches de cohérences.

• Elle met de plus clairement en évidence le rapport dialectique entre la compétence algébrique et la rationalité algébrique de l'élève. En effet, même si un élève s'engage dans une stratégie algébrique pour généraliser et construire une preuve intellectuelle, sa réussite va dépendre de nombreux paramètres :

- d'abord de son niveau de gestion du registre des expressions algébriques (système parenthésé ou non, types d'écriture, procédures de calcul correctes ou erronées, etc...),
- puis de sa conception des objets de l'algèbre construite lors de la transition de l'arithmétique à l'algèbre (conception opérationnelle, structurale, voire pseudo-structurale de l'algèbre),
- enfin des types de traitement algébrique disponibles.

Les formes de justification utilisées sont des éléments essentiels pour cerner la rationalité des élèves et analyser si elle est plutôt du côté quotidien, plutôt du côté scolaire ou plutôt du côté scientifique. Nous avons mis en évidence plusieurs formes de justification qui s'appuient de façon plus ou moins privilégiée, soit sur des règles, soit sur la réécriture (utilisant des règles de formation correctes ou incorrectes), soit sur des consignes internes à la classe, soit sur des éléments contextuels concrets de l'énoncé, soit sur la calculatrice.

Nous avons vu dans les productions écrites, qu'un manque de compétence en algèbre peut conduire l'élève à un repli vers une preuve pragmatique (Sandrine F., Pascal, Nouara, Didier), voire vers une justification par appel à des raisons non mathématiques (Nicolas).

Pour conclure, donnons un tableau récapitulatif décrivant les productions des élèves de la classe de Première GA, 1991-1992. Nous réalisons cette description à partir du 12_uplets correspondant à la liste de 12 critères relatifs à la tâche.

	Sandrine F.	Denis / Isabelle	Eric B.	Eric M.	Pascal
Traitement algébrique					
d'ordre numér.	Correct	Correct	Incorrect	Correct	Correct
Reproduct. niv1	Non	Non	Non	Non	Incorrect
Trad/production	Incorrect	Non	Non	Non	Incorrect
Outil de preuve	Non	Non	Non	Non	Non
Rapport arithmétique/ algèbre					
Démarche	Algébrique	Arithmétique	Arithmétique	Arithmétique	Algébrique
Statut du signe d'égalité	Annonce résultat	Annonce résultat	Annonce résultat	Annonce résultat	?
Statut des lettres	Nb généralisé				Inconnue
Statut des objets	Procédural	Procédural	Procédural	Procédural	Equation Procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres					
Type conversion	Pas à pas enchaînée Globale non parenthésée	Pas à pas séparé	Pas à pas séparé	Pas à pas enchaînée	Globale non parenthésée
Gestion dans registre algébrique					
Type formation					Correct
Type de traitement					Règle transp x Regroupement Avec mémoire ds numérique
Fonction de l'algèbre					
Fonction apparente de l'algèbre	Algèbre pour substituer	Algèbre pour nommer	Aucune	Aucune	Résoudre équat Algèbre liée au contrat
Rationalité algébrique					
Type de preuve et type de justification	Intellectuelle Appel au numérique Appel au contexte	Appel à exemples (pragmatique)	Appel à exemple (pragmatique)	Appel à exemples (pragmatique)	Intellectuelle Appel à des règles Appel au légal Appel au numérique

Tableau n°6 : Liste des valeurs des critères décrivant le fonctionnement mathématique des 12 élèves pour le problème "Le prestidigitateur"

	Karine	Nadia	Didier	Nicolas	Nouara
Traitement algébrique					
Tâche numériq	Non	Non	Non	Correct	2 formes
Reproduct. niv1	Incorrect	Correct	Correct	Non	Non
Production	Incorrect	Incorrect	Incorrect	Correct	Incorrect
Outil de preuve	Non	Non	Oui	?	Non
Rapport arithmétique / algèbre					
Démarche	Algébrique	Algébrique	Algébrique	Arithmétique	Algébrique
Statut du signe d'égalité	Annonce résultat	Annonce résultat	Annonce résultat Equivalence	Annonce résultat Equivalence	Annonce résultat
Statut des lettres	?	Inconnue	Nb généralisé		Nombre
Objets et statut des objets	Equation Pseudo-structural	Procédural	Procédural Structural	Procédural Structural	Procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques					
Type conversion	Pas à pas séparé	Ecriture linéaire globale	Global parenthésé	Pas à pas séparé Global parenthésé	Global non parenthésé
Gestion dans registre algébrique					
Type de formation	$x\ a \rightarrow x+a$ Désassemblage		Sans parenthèse		
Type de traitement	Assemblage final $x+a \rightarrow xa$		Recopie incorrecte		
Fonction de l'algèbre					
Fonction apparente de l'algèbre	Algèbre liée au contrat	Résoudre équat Algèbre liée à consigne	Conforme		Algèbre pour sténographier Algèbre pour substituer
Rationalité algébrique					
Type preuve et forme de justification	Appel à réécriture Appel au contexte	Appel à des règles	Appel à calcul algébrique Appel au numérique	Appel au contexte Appel à propriétés math.	Appel au numérique Appel à calculatrice

Tableau n°7 : Liste des valeurs des critères décrivant le fonctionnement mathématique des 12 élèves pour le problème "Le prestidigitateur" (suite)

II.1.2 : Ex IV.3 du CE du 23/11/1991 : "les pompistes"

L'exercice "les pompistes" propose le même type de tâche que "le prestidigitateur".

a) Enoncé

Deux pompistes concurrents A et B vendent l'essence au même prix. Un jour, A diminue son prix de 3% ; alors B diminue le sien de 5%. Puis A diminue encore de 5% et B de 3%. L'un des deux pompistes vend l'essence moins chère.
Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Proposez une conjecture puis prouvez la.

b) Analyse de la tâche

• *Objectifs du problème*

L'affirmation proposée est fausse. Démontrer que, après les deux diminutions, il est faux que l'un des pompistes vend l'essence moins chère est équivalent à démontrer qu'il est vrai que les deux pompistes vendent l'essence au même prix[11]. Il est donc nécessaire

[11] Si x désigne le prix de l'essence et si $p_A(x)$ et $p_B(x)$ désignent les prix respectifs de l'essence en fonction du prix initial proposé par les pompistes A et B après les deux diminutions alors la proposition

de recourir à l'outil algébrique pour résoudre ce problème. Cet exercice vise les mêmes objectifs que l'exercice "le prestidigitateur". Toutes les composantes sont donc concernées par l'analyse de cet exercice.

• *Situation du problème par rapport à l'enseignement*

Cet exercice a été donné dans un contrôle écrit dix jours après "le prestidigitateur". Pendant les dix jours qui ont séparé la résolution des deux exercices, nous avons beaucoup travaillé le calcul algébrique en prenant en compte les aspects syntaxiques et sémantiques. Les élèves ont résolu des exercices techniques de réinvestissement et des exercices finalisés nécessitant le calcul algébrique comme outil de résolution et de preuve.

• *Solutions attendues*

On attend donc une *preuve intellectuelle* utilisant le calcul algébrique. La résolution de l'exercice met en jeu des démarches analogues à celles envisagées dans "le prestidigitateur". De plus, la formulation algébrique de ce problème reprend les mêmes types d'écriture mais sans la complexité du parenthésage. Remarquons que la quantification universelle implicite et le contexte concret peuvent introduire ici une difficulté supplémentaire.

La grille descriptive de l'exercice "les pompistes" est analogue à celle de l'exercice "le prestidigitateur".

c) Analyse des solutions envisageables

Nous insistons ici dans l'analyse sur les cohérences complémentaires par rapport à celles mises en évidence dans le "prestidigitateur".

1) L'analyse a priori effectuée a été organisée comme celle du "prestidigitateur" autour de l'identification des deux stratégies typiques de résolution, *arithmétique* ou *algébrique* puis des types d'écriture utilisés, écriture *pas à pas en succession d'opérations* ou écriture *globale linéaire*. Dans chaque cas, le calcul peut être réalisé, à chaque étape, soit par multiplication du coefficient multiplicatif, soit par soustraction de la réduction. Nous distinguons ces deux cas, en les étiquetant respectivement, écriture additive ou multiplicative. De plus ici, il nous semble nécessaire de prendre en compte un nouveau type d'écriture, l'écriture abréviative. En effet, des écritures abréviatives liées à la présence des pourcentages peuvent surcharger les écritures précédemment mises en évidence. L'analyse des productions effectives des élèves confirme l'intérêt de cette distinction. Voici un tableau d'ensemble des stratégies utilisées sur un échantillon de 12 élèves :

P_1 (il existe un prix x tel que $p_A(x) \neq p_B(x)$) a pour négation la proposition P_2 (pour tout x, $p_A(x)=p_B(x)$). Démontrer que P_1 est fausse est équivalent à démontrer que P_2 est vraie.

Type de stratégie	Type d'écriture		Type de traitement	Elèves
Stratégies de nature arithmétique	écriture pas à pas en succession d'opérations	enchaînée abréviative additive		David
		séparée abréviative additive		Fabien
		séparée		Nadia
Stratégies de nature algébrique	écriture pas à pas en succession opérations	séparée abréviative additive	pas d'enchaînement et repli sur le numérique	Candie, Pascal
		séparée additive	pas d'enchaînement	Nouara
			enchaînement et traitement avec calcul intermédiaire	Denis, Didier, Sebastien
		séparée multiplicative	enchaînement et traitement avec coefficient multiplicateur	Karine, Nicolas
	écriture globale linéaire	abréviative additive	repli sur le numérique	Sandrine F

Tableau n°8 : Stratégies utilisées par les élèves dans la résolution des "pompistes"

Voici quelques exemples d'écriture abréviative :

Ecritures abréviatives	**Illustration**
Pas à pas enchaînée abréviative en succession d'opérations	200F- 3%=194-5%=184,3
Pas à pas séparée abréviative avec enchaînement ou non en succession d'opérations	A: 20 - 3/100 = 19,4 A: 19,4 - 5/100 = 18,43 *x-3%* soit *0,97x*
Linéaire globale abréviative	*x-5%-3%* *x-8%*
Règle formation abréviative	*x-5%*—>0.05*x*

Tableau n°9 : Exemples d'écritures abréviatives

2) Cet exercice met aussi en évidence que des écritures incorrectes peuvent être ensuite interprétées correctement ou non : la suite du traitement en dépend. Illustrons-le par deux exemples :

• Pascal traduit l'énoncé par l'écriture pas à pas séparée abréviative en succession d'opérations sans appliquer la deuxième réduction au prix obtenu après la première réduction. Il l'interprète ensuite incorrectement et calcule l'expression obtenue en suivant un schéma de calcul additif :

"	Pompiste *A*	Pompiste *B*
x = prix	*x - 3%*	*x-5%*
	x - 3% - 5%	*x-5% - 3%*
	x - 8%	*x-8%*"

Aucun des deux ne vend son essence moins cher que l'autre

Voyons voir   *x = 100F*

Avec *A* —> *x - 3% - 5%*

100 x 3/100 = 3   *5+3 = 8*

100 x 5/100 = 5   soit *8%* de remise donc Prix = *95F*

Avec B —> x - 5% - 3%
$100 \times 5/100 = 5$ $\quad$ $5+3 = 8$
$100 \times 3/100 = 3$ $\quad$ soit 8% de remise donc Prix = 95F

• Ce n'est pas le cas pour Sandrine F. Elle traduit l'énoncé par une écriture linéaire globale abréviative, mais comme dans "le prestidigitateur", elle se replie sur le numérique en gardant à l'écriture un sens correct en liaison avec l'énoncé :

A = x F $\quad$ FAUX.
B = x F

A : x - 3% - 5%
B : x - 5% - 3%

A et B = 100F.
A = 100F - 3% = 100 - 3 = 97
B = 100F - 5% = 100 - 5 = 95.
A = 97 - 5% = 97 - 4,85 = 92,15.
B = 95 - 3% = 95 - 2,85 = 92,15.

4) Cet exercice met bien en lumière les différents statuts des lettres. Dans le cas d'une stratégie de *nature algébrique*, excepté pour Didier, l'analyse montre que les pratiques des élèves sont du côté de l'arithmétique. Les lettres désignent clairement des étiquettes : si A désigne le prix de l'essence pour le pompiste A après la première réduction, A désigne toujours le prix de l'essence après la deuxième réduction. Le signe d'égalité conserve un statut d'annonce de résultat et n'est pas symétrique. En voici deux illustrations :

La solution de Nicolas :
"x désigne le prix initial de l'essence.
$A = x \times 0{,}97$ $\quad$ $B = 0{,}95\,x$
$A = 0{,}9215\,x$ $\quad$ $B = 0{,}9215\,x$
L'égalité est vraie entre les deux pompistes donc les deux pompistes vendent l'essence au même prix."

La solution de Denis :
"x désigne le prix initial de l'essence.

A diminue le prix de l'essence de 3%
$A = x - x{\times}0{,}03$
$A = x - 0{,}03x$
$A = 0{,}97x$
A diminue à nouveau le prix de 5%
$A = 0{,}97x - 0{,}097x{\times}0{,}05$
$A = 0{,}97x - 0{,}0485x$
$A = 0{,}9215x$

B diminue le prix de l'essence de 5%
$B = x - x{\times}0{,}05$
$B = x - 0{,}05x$
$B = 0{,}95x$
B diminue à nouveau le prix de 3%
$B = 0{,}95x - 0{,}95x{\times}0{,}03$
$B = 0{,}95x - 0{,}285x$
$B = 0{,}9215x$"

4) Nous retrouvons une parfaite similarité pour les différentes fonctions de l'algèbre mises en évidence dans les solutions effectives.

En résumé, l'analyse menée pour cet exercice conduit à rajouter des valeurs locales pour le critère *type de conversion* par intégration des écritures abréviative, additive (calcul du prix par soustraction de la réduction) ou multiplicative (calcul direct par multiplication par coefficient directeur).

On aboutit à la grille d'analyse suivante :

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Traitement algébrique	**Type de traitement algébrique** via le type de tâche Reprod tâche d'ordre numérique Reproduction tâche alg. niv1 Trad/production d'une expression Outil de preuve	Correct, incorrect, non traité
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Nombre généralisé Etiquette
	Statut des expressions	Structural Procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion entre registre algébrique et registre du langage naturel	Pas à pas enchaînée en succession d'opérations Pas à pas enchaînée abréviative en succession d'opérations Pas à pas séparée en succession d'opérations Pas à pas séparée abréviative en succession d'opérations Linéaire globale multiplicative Linéaire globale additive parenthésée ou non Linéaire globale abréviative additive
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Correct Sans () x-5%—>0.05x
	Type de traitement	Correct Calcul avec mémoire Calcul sans mémoire
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour substituer nombres dans formule - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre liée au contrat
Rationalité algébrique	Type de preuve et type de justification	Preuve pragmatique avec un ou deux exemples Preuve intellectuelle : Appel à procédure Appel au calcul algébrique

Tableau n°10 : Grille d'analyse associée au problème "les pompistes"

d) Synthèse

• Le test montre bien une bonne adéquation de la structure d'analyse multidimensionnelle.

• Nous constatons une relative stabilité de l'ensemble des valeurs locales des critères de la structure d'analyse. La comparaison de deux tâches voisines semble indiquer que l'ajout de valeurs locales ne va pas être permanent.

II.2 EXERCICES SE RAMENANT À UNE MISE EN ÉQUATION

Dans ce paragraphe, nous étudions des problèmes de mathématisation qui se ramènent après une mise en équation à la recherche d'inconnues.

II.2.1 Exercice "Le coût du voyage"

a) Enoncé

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150^F le voyage aller et retour. Elle consent aux étudiants une réduction de 20% du prix du billet.
D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400F par an, on paie le billet à moitié prix.
A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?

b) Analyse de la tâche

• *Objectifs de la tâche*

C'est un problème qui doit être familier des élèves venant de BEP tertiaire même si l'énoncé est posé d'une façon plus ouverte qu'en BEP tertiaire. Il peut être résolu à l'aide de plusieurs démarches : démarche de nature arithmétique, de nature algébrique, démarche graphique, les deux dernières pouvant être en liaison avec les fonctions affines. Divers objets mathématiques sont respectivement en jeu selon la démarche utilisée (expressions algébriques, équations du premier degré, fonctions linéaires et affines, équations de droites) dans un ou plusieurs cadres et registres associés.

Il permet donc d'étudier, pour chaque élève :

• les différents types de traitement algébrique effectivement mis en œuvre ;

• le rapport arithmétique/algèbre via les démarches de résolution et les objets mathématiques mobilisés (en particulier la prise en compte ou non de la dimension fonctionnelle) ;

• le niveau de gestion des représentations symboliques dans le registre algébrique et dans l'articulation entre les quatre registres sémiotiques : registre du langage naturel, registre numérique, registre algébrique, registre graphique, s'il y a lieu ;

• la fonction de l'algèbre ;
• le type de justification utilisé.

En conséquence, toutes les composantes sont donc concernées par son analyse.

• *Situation du problème par rapport à l'enseignement donné*

Le problème a été donné le 23/11/1991, deux semaines après la fin du cours portant sur les fonctions affines et leurs représentations graphiques, la résolution algébrique et graphique des problèmes du premier degré. Nous avons travaillé la mise en relation entre les registres graphique et algébrique et plus particulièrement entre les variables visuelles du tracé d'une droite dans un repère et les unités symboliques de l'équation réduite correspondante (cf chap 2. V).

• *Solutions attendues*

On attend, après une mise en équation du problème, une résolution algébrique et/ou graphique du problème pour déterminer l'inconnue du problème.

• *Grille descriptive du problème*

La grille d'analyse permet de mettre en évidence les objets mobilisables selon les types de résolution attendus : expressions du premier degré, fonctions affines et linéaires, équations du premier degré ou équations réduites de droites. Les composantes et critères associés à ce problèmes sont donc les suivants :

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Réalis. de tâche d'ordre numérique[12] Repr . de tâches formelles niv1 Repr. de tâches formelles .niv2 Interprétation d'une expression Branchement sur formule Production ds contexte familier Production ds contexte non familier Utilisation de l'algèbre pour prouver	Oui Oui Non Oui Non Oui Non Non
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat/équivalence
	Statut des lettres	Variable Inconnue
	Objets et statut des objets	Expressions algébr. 1er degré Equations du 1er degré Fonctions affines et linéaires Equations de droite Structural/procédural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation Type de traitement	*RF*(Z, *x*, (), +,-,x,/,implicite) *Rnf* *RTdéveloppement* *RTrésolution équations du 1er degré*
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres	Type de conversion	Registre lg naturel vers registre des écrit. algébriques : Non congruent —> écriture linéaire globale *Réquation.1er deg—>rep. graphique* (cf chap2,V) *R écr. algébrique—>écr. numérique*
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Mathématiser une situation extra-mathématique et rechercher une inconnue
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel au calcul algébrique Appel aux fonctions Appel aux représentations graphiques

Tableau n°11 : Grille descriptive associée au problème "le coût du voyage"

c) Analyse des solutions envisageables

Comme dans les deux exercices précédents, les solutions envisageables qui sont retrouvées dans les productions des élèves sont très diverses mais on va voir que la

[12] Ce type de traitement est mis en jeu pour calculer les images de nombres par les fonctions linéaires et affines.

structure d'analyse permet de les décrire, en ne modifiant que très peu les valeurs locales de critères définies précédemment.

1) Nous organisons l'analyse autour de l'identification a priori des trois stratégies de résolution de nature arithmétique, algébrique ou graphique, la résolution graphique pouvant prendre appui sur le cadre fonctionnel. Nous différencions l'analyse en fonction des types d'écriture et des objets mathématiques mobilisés dans la résolution : expressions algébriques du premier degré, équations du premier degré, fonctions affines et linéaires voire équations de droite dans le cas d'une résolution graphique. Cela fait apparaître, pour cet exercice, le statut des lettres utilisées dans la résolution. Pour affiner l'analyse de la fonction apparente de l'algèbre et des traitements réalisés par les élèves, nous intégrons comme dans les exercices précédents, l'analyse de leurs solutions effectives. Nous illustrons certains cas par la production d'un élève. Les copies des élèves sont mises en annexe I. Pour commencer, voici un tableau récapitulatif des stratégies utilisées et objets mobilisés par les élèves suite à l'analyse de leurs productions écrites :

Type de stratégie	Type d'écriture		Type de traitement	Elèves
Stratégies de nature arithmétique	traduct. faussement	congruente	par essais ?	Isabelle, Pascal
	écriture pas à pas en succession d'opérations	séparée	par essais (traitement graphique Pascal)	Pascal, Sandrine F. Isabelle
	écriture globale linéaire	correcte		
		abréviative		
Stratégies de nature algébrique	traduct. faussement	congruente	résolution équation	Nicolas
	écriture globale linéaire	abréviative	repli sur le numérique	Candie $(150\text{-}20\%)x$
		abréviative	Traitement algébrique et graphique	Fabien $154x$ - 20/100
		Correcte	Repli sur numérique	Nouara, Didier
		Correcte	traitement algébrique	Sebastien,
		correcte	traitement graphique	Sébastien, Cyril
Stratégies de nature graphique		Incorrecte	traitement graphique ?	Karine

Tableau n°12 : Tableau récapitulatif des stratégies des élèves dans la résolution du problème "le coût du voyage"

1) <u>Stratégie de nature arithmétique</u> : elle consiste en un traitement par essais jusqu'à trouver expérimentalement le nombre de voyages pour lequel la formule d'abonnement est la plus rentable. Le statut attribué au signe d'égalité est celui d'annonce de résultat d'un calcul. C'est une conception procédurale qui anime cette stratégie de résolution. Cette démarche peut mobiliser la calculatrice vu que le nombre recherché ici est de 32.

Nous distinguons deux cas en fonction du type d'écriture utilisé : écriture pas à pas en succession d'opérations ou écriture linéaire globale :

• Ecriture pas à pas en succession d'opérations (on soustrait la réduction au prix du billet) : elle peut être enchaînée ou séparée (pour Sandrine F. (coût1), Isabelle (coût2), Pascal (coût3))

• Ecriture linéaire globale : dans ce cas, nous distinguons deux cas, selon que le prix après réduction est calculé par multiplication du coefficient multiplicatif 0,8 ou par soustraction de la remise. Dans ce dernier cas, il est nécessaire d'envisager une écriture abréviative (154-20%) ou non (154 - 20%x154).

2) Stratégie de nature algébrique : Le problème est traduit algébriquement en fonction du nombre x de voyages. Nous distinguons d'abord les types d'écriture envisageables puis les objets mathématiques mobilisés en fonction des traitements possibles.

2.1 Dans chaque cas, la réduction peut être calculée sur un voyage ou bien directement sur les x voyages. Nous distinguons trois types d'écriture selon le calcul réalisé : écriture pas à pas séparée en succession d'opérations, écriture linéaire globale abréviative parenthésée ou non, écriture linéaire globale parenthésée ou non.

• Ecriture pas à pas séparée ou enchaînée en succession d'opérations : la réduction peut être calculée pas à pas sur un voyage puis sur les x voyages.

dans le cas séparé : 154x20% = 30,8 ; 154-30,8=123,2 ; le prix de x voyages s'élève à 123,2x

• Ecriture linéaire globale abréviative parenthésée ou non : le calcul de la remise est exprimé de façon abréviative. En voici deux exemples :

Avec la première formule, le prix de x voyages s'élève à :
pour Fabien (coût4), 154x-20/100 (calcul de la remise sur les x voyages)
pour Candie (coût5), (154-20%)x

• Ecriture linéaire globale : Le coût du voyage est calculé directement ou non. On peut envisager quatre cas et en voici des illustrations avec la première formule :

- écriture linéaire globale multiplicative : calcul par multiplication du coefficient directeur 0,8. Pour Nicolas (coût6), le prix de x voyages s'élève à : 154x0,8x
- écriture linéaire globale: calcul du prix des x billets puis soustraction de la remise. Pour Nouara (coût7), le prix de x voyages s'élève à : 154x - (154x x 20%)
- écriture linéaire globale parenthésée : calcul du prix d'un billet par soustraction de la réduction, puis des x billets. Pour Didier (coût8), le prix de x voyages s'élève à : (154-154x20%)x
- écriture linéaire globale non parenthésée : le calcul précédent est écrit incorrectement. dans ce cas, le prix de x voyages s'élève à : 154-154x20%x

Ici, nous nous placions dans le cas d'une interprétation correcte de l'énoncé. Or, cela peut ne pas être toujours le cas. Certains élèves ont interprété le terme "formule d'abonnement" en liaison avec le contexte quotidien : un abonnement correspond à un paiement global. Dans ce cas, la traduction est faussement sémantiquement congruente avec l'énoncé.

En résumé, la plupart des types d'écriture ont déjà été rencontrés dans les exercices précédents. Nous définissons la valeur traduction faussement congruente pour le critère *type de conversion*, pour tenir compte d'une interprétation incorrecte de l'énoncé.

2.2 Nous envisageons trois principaux traitements que l'analyse des copies confirme : la traduction algébrique avec repli sur le numérique, la mise en équation du problème avec résolution de l'équation associée, le passage au cadre fonctionnel et la résolution graphique associée. Ce type de traitement dépend de l'interprétation associée aux expressions : formules, expressions pouvant intervenir dans une équation ou expressions fonctionnelles.

• <u>Formules : traduction algébrique et repli sur le numérique</u> :

Après avoir exprimé le coût en fonction du nombre x de voyages, on obtient pour chaque tarif une expression algébrique du premier degré considérée ici comme une formule. L'élève peut alors se replier sur le numérique avant la mise en équation du problème : il calcule les deux tarifs pour des valeurs numériques du nombre x de voyages jusqu'à trouver x vérifiant les conditions du problème. Dans ce cas, la résolution reste centrée sur <u>le numérique</u>.

Illustrons ce cas par la solution de Nouara (coût7) où les substitutions sont effectuées à partir d'expressions non réduites :

"(...)
donc le prix du voyage dépend de x nombre de voyages effectués
alors $154x$ -(154xx20/100)
1ère formule $154x$ - $30{,}8x$
y = prix du voyage en fonction de x
x = le nombre de voyages effectués

x	2	4	6	8
y	246,4	492,8	739,2	985,6

154x4 - ((154x2)x20/100)
308-61,6
246,4"

• <u>Equations : mise en équation et résolution</u> : la résolution fait appel au langage algébrique pour exprimer une relation opératoire. x a le statut d'inconnue.

Illustrons-le par la solution de Fabien (coût4) qui met en évidence une démarche correcte mais reposant sur une écriture abréviative incorrecte.

Fabien fait appel au calcul algébrique pour résoudre ce problème mais utilise une écriture abréviative. Il continue par une résolution graphique puis résout l'équation représentant, pour lui, ce problème :

"1ère formule : $154x$ - 20/100
2ème formule : 1400 + $77x$
(...)
$154x$ - 20/100 = 1400 + $77x$
154x - $77x$ = 1400+20/100
$77x$ = 1400,2
x = 1400,2/77 = 18,18"

Fabien ne peut vérifier graphiquement ayant choisi une échelle inappropriée.

La résolution de l'équation peut mobiliser des règles de transformation incorrectes.

Il est donc nécessaire pour en rendre compte de définir des valeurs locales du critère *type de traitement*

- Règle de transposition additive ($ax=b \longrightarrow x=b-a$)
- Règle de transposition multiplicative ($ax=b \longrightarrow x=b/(-a)$)
- Règle d'inversion ($ax=b \longrightarrow x=a/b$)

• Mobilisation des fonctions linéaires et affines : la résolution fait appel à l'utilisation de notions mathématiques récemment enseignées, fonctions linéaires et affines et représentations graphiques. Dans ce cas, x a le statut de variable.

Chaque coût global est une fonction linéaire ou affine. Pour résoudre graphiquement le problème, il suffit de tracer les droites représentatives de chacune des fonctions puis de lire graphiquement une valeur approchée de l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

Dans ce cas, la structure d'analyse permet d'étudier l'articulation entre le registre des équations du premier et le registre des représentations graphiques. On retrouve les valeurs globales du critère *type de conversion* entre le registre des équations et le registre graphique définies au chapitre 2. V.

3) Stratégie de nature graphique :

Il est possible, suite au calcul de valeurs numériques, de représenter graphiquement dans un repère donné le coût global des voyages en fonction du nombre de voyages. La représentation peut être effectuée suite à une stratégie de nature arithmétique ou algébrique (cf cas précédent). Dans le premier cas, l'élève ne fait référence explicitement, ni aux fonctions affines, ni aux équations de droite.

En résumé, l'analyse met en évidence des nouveaux types de justification liées au type de problème : justification par appel au cadre fonctionnel ou justification par appel à la représentation graphique.

Voici, pour conclure, la grille d'analyse des productions associées à cet exercice :

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Grandeur Inconnue Variable
	Objets et statut des objets	Expressions algébr. 1er degré Equations du 1er degré Fonctions affines et linéaires Equations de droite Structural/procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	<u>Traduction faussement congruente</u> Ecriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations Ecriture pas à pas séparée en succession d'opérations Ecriture linéaire globale abréviative parenthésée ou non Ecriture linéaire globale multiplicative Ecriture linéaire globale parenthésée ou non Toutes var. visuelles incorrectes Sens d'inclinaison incorrect Angle incorrect Position incorrecte
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Correct Sans parenthèse
	Type de traitement	(dans le numérique) <u>Par essais</u> (dans l'algébrique) <u>Règle de trsp add(*ax=b—>x=b-a*)</u> <u>Règle de trsp mult(*ax=b—>x=b/(-a*)</u> <u>Règle d'inversion (*ax=b—>x=a/b*)</u>
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour substituer nombres dans formule - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre liée au contrat didactique
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel au contexte Appel à calculatrice Appel à numérique Appel au calcul algébrique <u>Appel au cadre fonctionnel</u> <u>Appel à la représentation graphique</u>

Tableau n°13 : Grille d'analyse associée au problème "le coût du voyage"

d) Synthèse

1) La structure d'analyse joue pleinement son rôle relativement aux différentes composantes d'analyse et permet en particulier de mettre en évidence les objets mathématiques mobilisés dans la résolution.

2) L'ensemble des valeurs locales des critères *type de conversion* déjà mises en jeu dans des problèmes de mathématisation reste stable. Nous retrouvons les mêmes valeurs pour le critère *fonction apparente de l'algèbre*

II.2.2 Exercice "le minitel"

a) Enoncé

Un organisme veut créer un service de Minitel : il propose aux futurs utilisateurs le choix entre trois tarifs :
Tarif A : Paiement d'une somme globale de 380 F
Tarif B : Paiement d'une somme de 147 F et de 0,20F par minute de connexion
Tarif C : Le prix de la minute de connexion est de 0,45 F.
Quel est le tarif le moins onéreux pour l'utilisateur ?

b) Analyse de la tâche

• *Objectifs de la tâche diagnostic*

Ce problème du premier degré est comparable au problème précédent et peut être résolu à l'aide de plusieurs démarches : arithmétique, algébrique ou graphique. De même, il doit être assez familier pour des élèves venant de BEP. Mais il est assez ouvert et demande une certaine part d'initiative aux élèves. En effet, il est demandé de déterminer le tarif le moins onéreux en fonction de la durée d'utilisation et des trois tarifs proposés. Dans l'exercice "le coût du voyage", il n'y avait que deux tarifs, et on demandait explicitement de déterminer le nombre de voyages vérifiant une condition donnée. En revanche, la résolution du "minitel" ne met pas en jeu de calcul de pourcentage. Cet exercice vise les mêmes objectifs que l'exercice "le coût du voyage". Toutes les composantes sont donc concernées par l'analyse de cet exercice.

• *Situation par rapport à l'enseignement*

Cet exercice a été donné en devoir à la maison le 20 Octobre 1991. Le cours sur les fonctions affines et leurs représentations graphiques venait de commencer. Mais ces notions devaient être connues des élèves venant de BEP. L'enjeu didactique n'était pas le même que pour l'exercice "le coût du voyage" donné en contrôle écrit : ils pouvaient proposer des solutions plus éloignées de celles attendues, plus privées ou plus proches de celles réalisées l'année précédente. Ce fut effectivement le cas.

• *Solutions attendues*

Comme pour l'exercice "le coût du voyage", on attend une traduction algébrique puis une résolution algébrique et/ou graphique s'appuyant sur le cadre fonctionnel. La grille descriptive de l'exercice "minitel" est analogue à celle de l'exercice "le coût du voyage".

c) Analyse des solutions envisageables

Nous organisons l'analyse a priori autour de l'identification a priori des trois stratégies de résolution de nature arithmétique, algébrique ou graphique. Nous discriminons les stratégies utilisées par les élèves à partir des types de traitement réalisés, ces types de traitement étant liés aux objets mathématiques mobilisés. Nous indiquons aussi les types d'écriture utilisés, ici pas à pas en succession d'opérations ou linéaire globale. Comme pour les autres exercices, nous prenons en compte les productions effectives des élèves pour affiner le rôle effectif de l'algèbre et pour montrer le rôle essentiel de l'activité interprétative dans l'évolution du traitement.

En fait, l'analyse révèle l'utilisation de solutions non mathématiques et nous organisons donc l'analyse autour de quatre types de stratégie de résolution.

1. Stratégies non mathématiques :

Candie (min 1) en donne un exemple. Elle s'appuie sur des arguments contextuels pour "induire" le tarif le moins onéreux en fonction du temps d'utilisation. Candie reste du côté de la rationalité quotidienne.

L'argument sur lequel repose son argumentation est le suivant : "Le tarif le moins onéreux pour l'utilisateur dépend de la manière et du nombre de fois par mois qu'il compte l'utiliser".

2. Stratégies de nature arithmétique :

Karine et Denis utilisent de telles stratégies, mais leurs traitements diffèrent par les types de calcul utilisés : par l'exemple ou par la détermination des intervalles permettant de comparer les tarifs.

2.1 Résolution à base d'exemples : C'est le cas de Karine (min2) qui reste du côté de la rationalité quotidienne.

Karine organise la comparaison des tarifs en calculant les coûts pour trois durées : "pour une durée de 2 mois pour une utilisation de 2 heures par semaine", "pour 4 heures par semaine en deux mois", "pour 30mn par semaine en deux mois". Elle déduit des calculs réalisés dans ces cas particuliers le tarif le plus intéressant en fonction d'une durée d'utilisation qualitatitive "très importante", "moyenne" et "minime". Remarquons la différence de résolution comparativement à celle du "prestidigitateur" et la volonté de Karine pour rentrer dans le jeu du symbolisme, un mois plus tard.

2.2 Résolution par le calcul : C'est le cas de Denis (min3) qui propose une résolution numérique et calcule les bornes des intervalles utilisés pour comparer les tarifs. L'écriture peut être pas à pas séparée ou enchaînée en succession d'opérations.

La résolution de Denis est arithmétique et utilise une écriture pas à pas séparée en succession d'opérations. La résolution reste incomplète car il ne compare pas les tarifs *B* et *C*.

Donnons d'exemple du calcul pour comparer les tarifs *A* et *B*.

"388-147 = 233
233÷0,20 = 1165   1165 mn
1165 ÷60 = 19,42   19 h."

A = 380F
B = 147 (0,20 x nnn connexions)
C = 0,45 x nbres connexions

Le tarif le moins onereux pour l'utilisateur dépend de sa manière et ~~de~~ nbre de fois par mois qu'il compte l'utiliser

S'il l'utilise frequement le tarif A sera + interessant car il paye un tarif unique.
S'il l'utilise moyennement, le tarif B sera interessant car le px de la connection est peu élevée

S'il l'utilise pratiquement pas le tarif C, est interessant car la connexion est assez élevé mais il n'y a pas de sommes fixe à payer tous les mois qui pourraient leur revenir plus chere que la somme totale

min 1 : Candie

TARIF A : 380F
TARIF B : 147 + 0,20F /mn
TARIF C : 0,45F

TARIF B :
380 - 147 = 233
233 : 0,20 = 1165 — 1165 mn
1165 : 60 = 19,42 — 19 H

TARIF C :
380 : 0,45 = 844 — 844 mn
844 : 60 = 14 — 14 H

Si on ne veut pas dépasser le tarif A, pour utiliser ce service l'utilisateur doit s'en servir que pendant 19 h et avec le tarif C il ne peut s'en servir que 14 h alors qu'avec le tarif A il peut s'en servir aussi longtemps qu'il le veut.

min 3 : Denis

Tarif A : $x = 380$ F

Tarif B : $147 + 0,20x$

Pour 5 minutes de connection les utilisateurs choisissant le tarif B payeront : $147 + 0,20 \times 5 = 148$ F.

Tarif C : $0,45x$

Pour 5 minutes de connection les utilisateurs choisissant le tarif C payeront : $0,45 \times 5 = 2,25$ F

Le tarif le moins onereux pour l'utilisateur le tarif C, mais cela depend du temps d'utilisation.

min 4 : Eric B.

Duree De 2 mois pour une utilisation de 2 heures par semaine

Calcul pour le Tarif A
380 F → somme globale (on imagine que c'est un paiement qui s'effectue tous les 2 mois

Tarif B
2 heures ~~soit~~ 120 mn
120 X 8 = 960
Soit 960 mn en 2 mois
(960 X 0,20) + 147 = 339
Soit 339 F

Tarif C
méthode identique au tarif B
960 X 0,45 = $\boxed{432}$
Soit 432 F

pour le thème 2 heures par semaine en deux mois la méthode B est la moins onereuse mais si la ~~Durée~~ était plus importante le tarif A sera le plus interessant.
pour 4 heures par semaine

le tarif B = 531 F
le tarif C = 864 F
le Tarif A = $\boxed{380 F}$

Mais si la Durée d'utilisation est très minime le Tarif C sera le moins onéreux
ex pour 30 mn par semaine en deux mois

Tarif A → 380 F
Tarif B → 195
Tarif C → $\boxed{108}$

Ce px A sera le plus interessant si la Durée d'utilisation est très importante, si elle est moyenne le Tarif B sera le plus intéressant et si la Durée est très minime le prix C sera le moins onereux.

min 2 : Candie

3. Stratégies de nature algébrique

On propose une traduction de l'énoncé pour exprimer le coût en fonction du nombre de minutes de connexion. Si x désigne le nombre de minutes de connexion, à partir d'une écriture linéaire globale, on obtient trois expressions selon les tarifs : 380 pour le tarif *A*, $147+0{,}20x$ pour le tarif *B* et $0{,}45x$ pour le tarif *C*. La suite du traitement dépend de l'interprétation associée aux expressions : formules à calculer, expressions pouvant intervenir dans une équation, fonctions du premier degré voire équations de droite. Nous retrouvons les cas envisagés dans le problème "le coût du voyage".

3.1 Formules : les coûts sont des formules que l'on peut calculer en attribuant au nombre-grandeur x des valeurs numériques. Cette interprétation renvoie à une résolution numérique à base d'exemples.

C'est le cas pour Eric B (min4). : Eric calcule les formules obtenues pour 5 mn et conclut que le tarif le moins onéreux est le tarif *C*. Il rajoute non convaincu "mais cela dépend du temps d'utilisation".

3.2 Equations : Les coûts sont des expressions utilisées pour exprimer des relations entre les différents tarifs. x désigne dans ce cas une inconnue. Il est possible de déterminer pour quelle valeur de x, tel tarif est moins onéreux que tel autre.

On est conduit à résoudre deux équations du premier degré en x : $147+0{,}20x=0{,}45x$ et $147+0{,}20x=380$. Dans ce cas, comme dans l'exercice "le coût du voyage", nous devons envisager les règles de résolution incorrectes.

Donnons le cas de Sandrine F. (min5) : elle interprète d'abord les coûts comme des formules. Elle y substitue d'abord des valeurs numériques pour comparer numériquement les coûts en fonction du tarif et du nombre de minutes. Pour 588, elle note la même valeur numérique pour les deux tarifs.

Elle résoud ensuite l'équation $147+0{,}20x=0{,}45x$ pour le vérifier algébriquement.

Elle propose parallèlement une résolution graphique. Ni le cadre fonctionnel, ni le cadre graphique ne semblent disponibles. x ne semble pas avoir le statut de variable.

Les points de coordonnées (x, $147+0{,}20x$) sont joints en une "ligne brisée". Il en est de même pour les points de coordonnées (x, $0{,}45x$).

Elle s'appuie sur une lecture graphique pour conclure et déterminer les trois intervalles.

Sandrine F. semble associer ici à l'algèbre deux fonctions: substituer des valeurs numériques dans des formules et résoudre des équations.

3.3 Fonctions : Les coûts sont interprétés comme des fonctions du nombre de minutes de connexion. x a le statut de variable.

Pour le tarif *A* : $x \longrightarrow 380$ est une fonction constante,

Pour le tarif *B* : $x \longrightarrow 147+0{,}20x$ est une fonction affine,

Pour le tarif *C* : $x \longrightarrow 0{,}45x$ est une fonction linéaire.

Une résolution algébrique (cf ci-dessus) peut suivre cette modélisation.

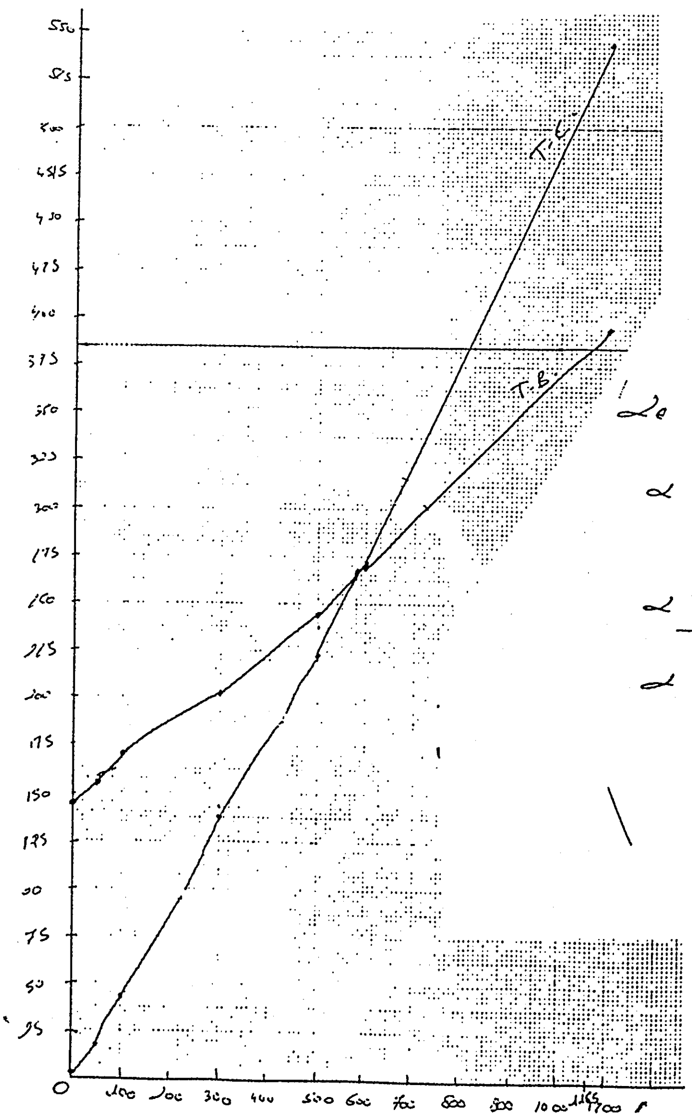
Il est aussi possible d'associer à chaque fonction sa représentation graphique, ce qui mène à une résolution graphique.

T.A. : 380
T.B. : 147 + 0,20 x
T.C. : 0,45 x

x : minutes de connexion.

x	0	50	100	300	500	588	600	1200
T.B.	147	137	167	207	247	264,60	287	387
T.C.	0,45	22,50	45	135	223	264,60	270	540

$$147 + 0,20x = 0,45x$$
$$0,20x - 0,45x = -147$$
$$-0,25x = -147$$
$$x = \frac{147}{0,25} \quad \boxed{\text{soit } x = 588.}$$



Le tarif le plus onéreux est :

– pour jusqu'à 588 minutes : le TARIF C.

– Puis c'est le TARIF B jusqu'à 1165 minutes.

– et ensuite à partir de 1165 minutes c'est : le TARIF A.

Min 5 : Sandrine

3 tarifs proposés par le service minitel :

- Tarif A : Paiement d'une somme globale de 380^F.

Soit y le prix à payer ce qui donne :

$y = 380^F$

- Tarif B : Paiement d'une somme de 147^F et $0{,}80^F$ par minute

Soit x le nombre de minutes et y le prix à payer :

$y = 147 + 0{,}80\,x$

- Tarif C : Paiement à "la minute" c'est à dire $0{,}45^F$ par minute :

$y = 0{,}45^F x$

La représentation graphique du tarif A est une droite parallèle à l'axe des abscisses et coupant l'axe des ordonnées au point :

$y = 380$

Celle du tarif B qui est une fonction affine est une droite ne passant par l'origine

x	0	100
$f(x)$	147	167

Celle du tarif C, fonction linéaire, est une droite passant par l'origine :

x	0	200
$f(x)$	0	90

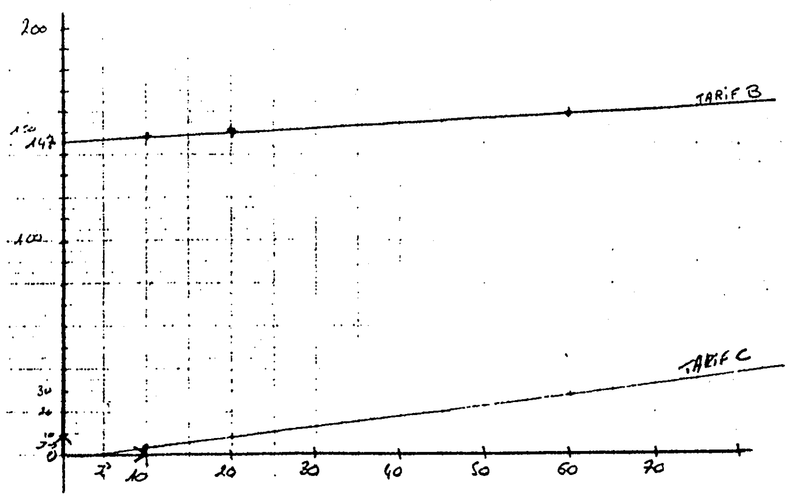
~~Le tarif le plus intéressant est le tarif C~~

Tarif C = Tarif B :

$\Leftrightarrow\ 147 + 0{,}2x = 0{,}45x$

$\Leftrightarrow\ 147 = 0{,}45x - 0{,}2x \Leftrightarrow 147 = 0{,}25\,x$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{147}{0{,}25} = 588$



Tarif B = Tarif C.

$147 + 0{,}2x = 380$

$\Leftrightarrow\ 0{,}2x = 380 - 147$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{233}{0{,}2} = 1165$

Le tarif C est plus intéressant pour une durée inférieure à 588 min puis c'est le tarif B pour une durée supérieure à 588 et inférieure à 1165 min

Pour une utilisation sup. à 1165 min, ≃ 19 h., du service c'est le tarif A qui est le plus intéressant.

min 6 : Sébastien

Dans ce cas, il est nécessaire, pour différencier les solutions, d'envisager les règles de conversion utilisées par l'élève pour passer du registre des équations de droite à celui des représentations graphiques (cf chapitre 2, V).

Nicolas (min6) réalise une telle démarche : après avoir mis en évidence les coûts comme fonction constante (tarif*A*), linéaire (tarif *C*) et affine (tarif *B*), il résoud algébriquement puis graphiquement le problème. Ses remarques mettent en évidence l'association entre les variables visuelles du tracé et les unités symboliques de l'équation : "En effectuant cette opération, nous comprenons mieux l'évolution des droites sur le graphique, leur degré d'inclinaison et le temps de leur progression grâce à l'échelle".

3.4 Equations de droite: Suite à une traduction algébrique, les expressions algébriques sont associées à des équations réduites de droite, de la forme $y=ax+b$, y désignant le coût. Cette démarche conduit à une résolution graphique. On peut distinguer deux cas, selon que y désigne une variable ou une étiquette, dont la dénomination varie pour chaque tarif. Donnons en deux exemples :

Sébastien (min7) désigne par y le prix à payer en fonction du nombre x de minutes. Il obtient selon les tarifs :

Pour le tarif *A* : $y=380$,
Pour le tarif *B* : $y=147+0{,}20x$,
Pour le tarif *C* : $y=0{,}45x$.

La résolution graphique reste inachevée par choix d'une unité inadéquate. En revanche, il conclut grâce à la résolution algébrique.

Isabelle (min8) désigne par $y1$, $y2$, $y3$ les prix respectifs à payer en fonction du nombre x de minutes selon les trois tarifs. $y1$, $y2$, $y3$ sont des étiquettes[13]. Après avoir tracé, dans un repère donné, les droites correspondantes à partir de deux points, elle réalise une lecture graphique et donne, de façon "très grossière" des valeurs approchées des bornes des intervalles. En revanche, elle ne propose pas de résolution algébrique.

4. Stratégie graphique : Comme nous l'avons vu ci-dessus, trois cas peuvent se produire : représentation graphique suite à une démarche numérique (cf 3.2), représentation graphique de fonctions affines (cf 3.3), représentation graphique d'équations de droite (cf 3.4).

En résumé, cette analyse montre que les valeurs globales et locales associées aux critères mis en jeu dans l'analyse permettent de décrire les solutions envisageables a priori et celles effectives des élèves.

En conséquence, nous en déduisons la grille d'analyse associée à l'exercice "le minitel", qui reprend en la simplifiant celle du "coût du voyage" :

[13]Cette pratique correspond à l'enseignement reçu en BEP.

1 : Calcul algébrique

Pour calculer le tarif le moins onéreux pour l'utilisateur, il faut que je donne à x une valeur quelconque, x représentant le nombre de minutes utilisées mais tout dépend combien de temps l'abonné va utiliser le minitel c'est-à-dire si celui-ci l'utilisera :

- quotidiennement
- de temps en temps ?
- rarement

Et combien de temps l'utilisateur restera-t-il connecté au service ?
De toute évidence, l'utilisateur choisira le tarif qui lui convient le mieux.

Si x représente le nombre de minutes utilisées alors :

Tarif A : 380F/an
– Pourquoi 380F/an ? car je suppose que c'est un abonnement annuel car le tarif d'un service ne dépasse généralement pas plus de 1^F/mn donc 380F/an ne paraît convenir si bien entendu l'utilisateur est un particulier.

Tarif B : $147^F + (0,20x \times 12 \text{ mois})$
" C : $0,45x \times 12$ mois

Si l'abonné utilise le service de l'organisme sur minitel régulièrement et qu'il soit connecté pendant 60 mn à chaque fois donc je donne une valeur quelconque à x, dans ce cas 60 minutes.

$x = 60 \text{ mn} \times \boxed{12 \text{ mois}} \Longrightarrow$ si le montant du tarif A est 380F/an, je dois obligatoirement multiplier x par 12 mois des tarifs B et C (pour qu'il y ait cohérence entre les tarifs A, B et C).

x = 720 mn

Tarif A : 380F/an
Tarif B : $147^F + (0,20^F \times 720 \text{mn}) = 291^F$/an
Tarif C : $0,45^F \times 720 \text{mn} = 324^F$ l'an.

L'utilisateur choisira donc le tarif B avec 291F/an. Ce cas n'est valable que si l'abonné utilise le service du minitel régulièrement et qu'il soit connecté pendant 60 minutes à chaque fois.

2 : Représentation graphique

a) $y_1 = 380$ pour tout x
$y_2 = 147 + 0,20x$
$y_3 = 0,45x$

x	0	720
$y_2 = 0,20x + 147$	147	291
$y_3 = 0,45x$	0	324

$y_2 = 0,20x + 147$
$y_2 = 0,20 \times 0 + 147$
$0 + 147$
$\boxed{147}$

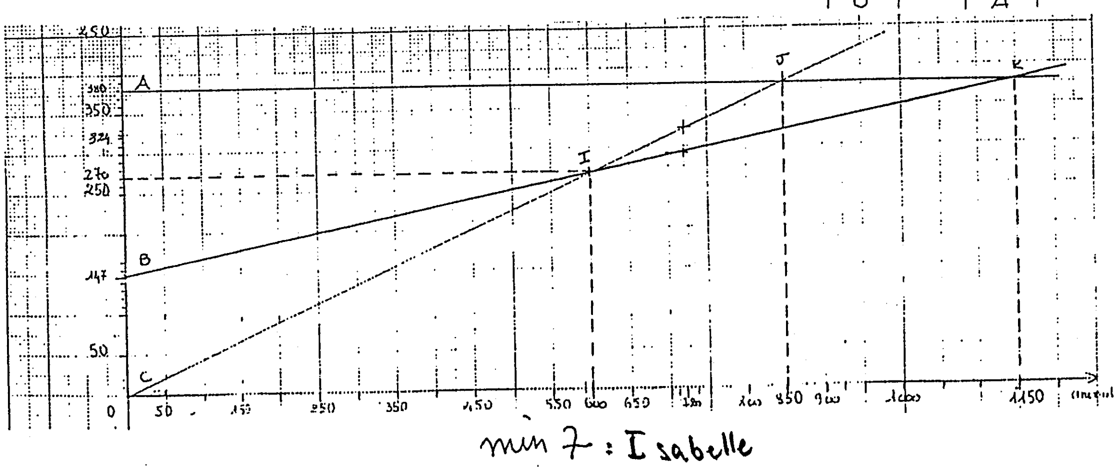
$y_2 = 0,20x + 147$
$y_2 = 0,20 \times 720 + 147$
$144 + 147$
$\boxed{291}$

(voir graphique ci-joint)

b) On détermine ~~les~~ les valeurs approchées des coordonnées des intersections des courbes deux à deux. On obtient
I (600 ; 270)
J (850 ; 380)
K (1400 ; 380)

c) Après la lecture du graphique, je peux en conclure

x	0	600	1150
Choix des tarifs	C	C ou B / B	B ou A / A



min 7 : Isabelle

3

Nous allons pouvoir formuler algébriquement les explications écrites précédemment.
Pour chaque Tarif, dépend une relation différente entre eux.

Pour le Tarif A :
Si l'on nomme y le prix à payer. Nous pouvons écrire la relation :
$y = 380$

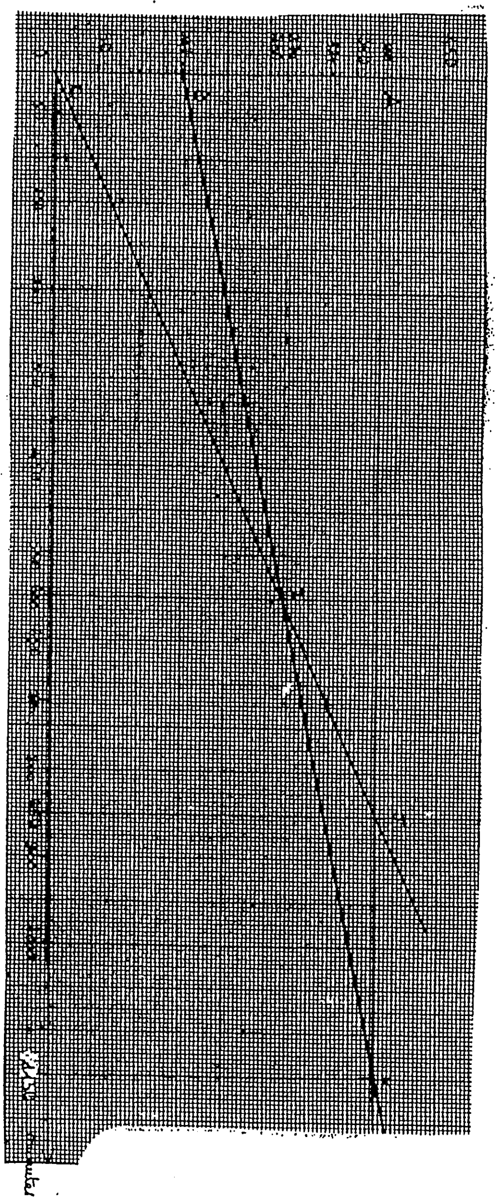
Pour le Tarif B :
Si l'on nomme x le nombre de minutes passées sur le minitel et y le prix à payer, la relation est :
$y = 147 + 0,20x$ c'est une fonction affine car elle répond à la relation $y = ax + b$ (fonction polynôme du 1er degré).
Le prix dépend du nombre x de minutes de connexion.
$x \longmapsto 147 + 0,20x = y$
x est associé par la relation tarifé.

Pour le Tarif C :
Si l'on nomme x le nombre de minutes de connexion au minitel et y la somme à payer la relation est :
$y = 0,45x$. c'est une fonction linéaire car elle répond à la relation $y = ax$. Graphiquement la courbe passe par l'origine O.

Cache numérique.

x	0	1200
f(x) = 147 + 0,20x	147	387

x	0	1200
f(x) = 0,45x	0	540



Pour répondre à la question posée dans l'énoncé : Quel est le Tarif le moins onéreux pour l'utilisateur ? Avec l'aide du graphique nous constatons que les courbes se croisent. Donc il nous est impossible de répondre à la question immédiatement.
Il est possible de déterminer le tarif le moins onéreux en tenant compte du nombre x de minutes. Pour cela j'ai "divisé" le graphique en intervalles.
Pour un temps d'intervalle [0 ; 588], le Tarif le moins onéreux est le Tarif C (vérification graphique)
$147 + 0,20x \geq 0,45x$
$147 = 0,45x - 0,20x$
$147 = 0,25x$ $x = \frac{147}{0,25}$; $x = 588$.

$0,45x$ est $\leq$ à $147 + 0,20x$ entre l'intervalle [0 ; 588].
les deux droites se coupent à la 588e minute.

Pour un intervalle [588 ; 844,4] le tarif le moins onéreux est le Tarif B
$380 = 0,45x$ $x = \frac{380}{0,45}$ $x = 844,4$.

Pour l'intervalle [844,4 ; 1165] le tarif le moins onéreux est le Tarif B. $380 = 147 + 0,20x$
$380 - 147 = 0,20x$ $x = \frac{233}{0,20}$ $x = 116$

Pour l'intervalle [1165 ; +∞[le Tarif le moins onéreux est le Tarif C

J'ai divisé le graphique en intervalles lorsque deux droites se croisent. En effectuant cette opération nous comprenons mieux l'évolution des droites sur un graphique, leur degré d'inclinaison et le temps de leur progression grâce à l'échelle.

mu 8 : Nicolas

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Grandeur Inconnue Variable
	Objets et statut des objets	Expressions algébr. 1^{er} degré Equations du 1^{er} degré Fonctions affines et linéaires Equations de droite Structural/procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	Ecriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations Ecriture pas à pas séparée en succession d'opérations Ecriture linéaire globale Toutes var. visuelles incorrectes Sens d'inclinaison incorrect Angle incorrect Position incorrecte
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Correct Sans parenthèse
	Type de traitement	(dans le numérique) Par essais (dans l'algébrique) Règle de trsp add($ax=b \longrightarrow x=b-a$) Règle de trsp mult($ax=b \longrightarrow x=b/(-a)$ Règle d'inversion ($ax=b \longrightarrow x=a/b$)
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour substituer nombres dans formule - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre liée au contrat didactique
Rationalité algébrique	Type de justification	Argumentation Appel au contexte Appel au calculatrice Appel à numérique Appel au calcul algébrique Appel au cadre fonctionnel Appel à la représentation graphique

Tableau n°14 : Grille d'analyse associée au problème "le minitel"

d) Synthèse

La structure d'analyse semble bien jouer le rôle que nous lui avions attribué : elle permet de décrire les solutions effectives des élèves à partir de la grille d'analyse obtenue pour un exercice analogue, mettant en jeu les mêmes traitements et les mêmes objets mathématiques.

III TEST SUR LES EXERCICES DE "RECONNAISSANCE" INTERNES AU CADRE ALGÉBRIQUE

Nous analysons ici plus particulièrement l'aspect *sémiotique* de l'algèbre. Dans les exercices suivants, nous cherchons donc à tester nos choix principalement vis à vis des composantes *gestion dans registre algébrique* et *rationalité mathématique.*

III. 1 EX N°2 DU TEST D'ENTRÉE 1991-92

III.1.1 Enoncé

Est-il exact que :

	Vrai/Faux	Justifiez votre réponse
$-9^2 = -81$		
$(-9)^2 = -81$		
$-9^2 = 81$		
$(-9)^2 = 81$		

III.1.2 Analyse de la tâche

• *Situation et objectifs de l'exercice*

C'est un exercice de reconnaissance figurant dans le test proposé aux élèves à l'entrée en Première G d'adaptation. Il vise à rechercher si -9^2 et $(-9)^2$ désignent des nombres différents, c'est-à-dire, si les calculs s'effectuent correctement en conformité avec les règles de formation du registre des écritures numériques parenthésées.

Dans le cas d'une identification incorrecte, l'analyse doit permettre de :

• repérer des règles de formation du registre des écritures numériques parenthésées utilisées par l'élève,

• mettre en évidence les types de justification proposées par les élèves, car nous attendons divers types de justification.

Cet exercice met en jeu les composantes *gestion dans registre algébrique* et *rationalité algébrique.*

• *Solutions attendues*

Les règles de formation mises en jeu dans les expressions -9^2 et $(-9)^2$ font intervenir les parenthèses, le signe -, l'exposant 2 et les priorités opératoires.

Nous attendons a priori plusieurs formes de justification, principalement deux types : appel à des propriétés opératoires énoncées, réécriture.

Grille descriptive de la tâche

Voici les critères et valeurs globales descriptives de la tâche :

Composantes	Critères	Valeurs globales
Gestion ds registre algébrique	Type de formation	*Rner* *RF*(Z, -,2, ())
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel à propriétés opératoires énoncées Réécriture

Tableau n°15 : Grille descriptive associée à l'ex2 du test d'entée 1991-1992

III.1.3 Analyse des solutions envisageables

Pour éviter des redites, nous regroupons ici dès le départ l'analyse a priori et celles des productions écrites des élèves. Nous envisageons aussi des identifications incorrectes liées au rôle des parenthèses, du signe - ou de l'exposant 2 qui interviennent dans la formation des expressions -9^2 et $(-9)^2$.

Ceci nous conduit à distinguer cinq cas qui s'articulent autour du *rôle des trois signes* précédemment cités. Voici un tableau récapitulant les cinq identifications envisagées et leur répartition sur un échantillon de 15 élèves :

Type de formation	**Elèves**
Correct	Fabien, Isabelle, Sébastien
Système sans parenthèses et priorité au signe -	Didier, Pascal
Système sans parenthèses et priorité au carré	Karine, Nicolas, David
Système avec parenthèsage personnel et priorité au signe -	Denis, Eric B, Eric M., Nouara, Sandrine F., Sandrine P.
Carré duplication	Candie, Nadia

Tableau n°16 : Répartition des solutions des 16 élèves

Présentons brièvement les règles de formation construites autour des rôles différents attribués à ces trois signes. Dans chaque cas, nous nous appuyons sur les productions d'élèves pour illustrer les différents types de justification proposés.

1) Interprétation correcte des expressions en s'appuyant sur une identification correcte des règles de formation du registre numérique :

Les justifications de Fabien et de Sébastien s'appuient sur une description des opérateurs utilisés dans l'expression à l'aide d'une réécriture de l'expression :
$-9^2 = -(9 \times 9)$ et de même $(-9)^2 = (-9)(-9)$. La priorité opératoire est disponible.
Celle d'Isabelle fait référence, pour la seconde expression $(-9)^2$, au concept de carré : un carré est toujours un nombre positif .

2) Interprétation incorrecte liée à une non distinction entre une écriture parenthésée ou non : -9^2 et $(-9)^2$ désignent le même nombre

Nous distinguons deux cas :

$-9^2 = -81$	O
$(-9)^2 = -81$	O
$-9^2 = 81$	N
$(-9)^2 = 81$	N

Tableau cas n°1

$-9^2 = -81$	N
$(-9)^2 = -81$	N
$-9^2 = 81$	O
$(-9)^2 = 81$	O

Tableau cas n°2

• *la présence d'un signe - provoque un résultat négatif* (cas n°1) : les deux expressions -9^2 et $(-9)^2$ valent -81.

Pascal justifie sa réponse en faisant appel à deux règles : "la présence d'un signe moins entraîne un résultat négatif" ou bien "c'est identique, puisque on enlève les parenthèses". Ces règles construites pas Pascal portent sur le rôle de certains signes, ici le signe'-' et les parenthèses, et sont énoncées en langage naturel. Nous dirons que ce sont des règles énoncées "au niveau de la forme".

• *la présence d'un carré provoque un résultat positif* (cas n°2) : les deux expressions -9^2 et $(-9)^2$ sont égaux à 81.

Karine et David justifient leurs réponses en faisant appel à la règle des signes.

Nicolas donnent plusieurs justifications : d'abord une justification par appel à la propriété "le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif" ou encore par appel à la règle au niveau de la forme "les parenthèses n'interviennent pas dans le résultat".

En résumé, l'analyse montre que les valeurs des critères *type de formation* et *type de justification* doivent être complétées.

Nous définissons, pour le critère *type de formation* les valeurs suivantes :

- la valeur <u>sans () et priorité au signe -</u>, lorsque le système de représentation fonctionne comme s'il n'y avait pas de parenthèse, la priorité opératoire étant attribuée au signe - (cas n°1)

- la valeur <u>sans () et priorité au carré</u> lorsque le système de représentation fonctionne comme s'il n'y avait pas de parenthèse, la priorité opératoire étant attribuée à l'exposant (cas n°2)

Nous ajoutons pour le critère *type de justification* la valeur <u>appel à des règles énoncées au niveau de la forme</u>, par exemple, "la présence d'un signe - entraîne un résultat négatif". Les règles énoncées au niveau de la forme construites par les élèves semblent indiquer une disparition du statut opératoire des signes.

Soulignons qu'il n'est pas toujours facile de distinguer entre règles énoncées au niveau de la forme et appel à des propriétés. Les propriétés sont énoncées en langage naturel mais enseignées explicitement dans les classes, par exemple "la règle des signes", alors que les règles au niveau de la forme sont construites par les élèves.

3) <u>Interprétation incorrecte liée à un système de représentation où les parenthèses ont un rôle spécifique (cas n°3) : elles préservent le signe -</u>, $(-9)^2$ est un nombre négatif et en revanche, $-9^2= -9x-9$.

Eric justifie par appel à une propriété du carré : "le carré d'un nombre est un nombre positif".
Denis, Nouara, Sandrine F., Sandrine P., justifient par appel à la règle des signes ou bien à la règle au niveau de la forme "les parenthèses préservent le signe moins". Sandrine P. écrit "il faut respecter la règle des signes".

$-9^2 = -81$	N
$(-9)^2 = -81$	O
$-9^2 = 81$	O
$(-9)^2 = 81$	N

Cas n°3

$-9^2 = -81$	N
$(-9)^2 = -81$	N
$-9^2 = 81$	N
$(-9)^2 = 81$	O

Cas n°4

4) Interprétation incorrecte liée à un traitement personnel de l'exposant 2 quand il n'y a pas de parenthèses (cas n°4): $-9^2 = -9 + -9$, en revanche, $(-9)^2 = (-9)(-9)$ c'est à dire 81. L'exposant 2 semble associé à une itération ou duplication. On retrouvera aussi cette interprétation pour l'expression a^2. En revanche, la présence de parenthèses redonne à l'opérateur carré sa définition correcte.

Nadia et Candie, qui sont dans ce cas, justifient leurs interprétation en réécrivant les expressions avec l'opérateur d'addition en tenant compte de leur règle de formation personnelle concernant l'exposant 2.

En résumé, il est nécessaire de rajouter deux valeurs pour le critère *type de formation* :

- la valeur () personnelle et priorité au signe -, lorsque le système de représentation fonctionne comme si les parenthèses avaient un rôle spécifique, la priorité opératoire étant au signe - (cas n°3)

- la valeur carré duplication lorsque la règle de formation $a^2 \longrightarrow a + a$ est utilisée. Cette règle de formation ne conserve plus aux opérateurs + et x leur sens opératoire.

Cette étude aboutit à la grille d'analyse suivante :

Critères	Valeurs globales	Valeurs locales
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Sans () et priorité au signe - Sans () et priorité au carré () personnelle et priorité au signe - Carré duplication
	Non identifiable	
Types de justification	Appel à des règles au niveau de la forme	"Les parenthèses préservent le signe moins" "C'est identique, puisqu'on enlève les parenthèses" "Les parenthèses n'interviennent pas dans le résultat"
	Appel à des propriétés opératoires énoncées	"Le carré d'un nombre est un nombre positif" "Le produit de deux nombres négatifs est un nombre négatif" "La règle des signes"
	Appel à réécriture	

Tableau n°17 : Grille d'analyse de l'exercice n°2 du test

III.1.4 Synthèse

1) Pour ce nouveau type de tâche, la structure d'analyse s'avère adéquate pour décrire les solutions attendues et celles effectives des élèves à condition de rajouter des valeurs locales qui rendent compte des règles de formation et des types de justification utilisés.

2) L'analyse permet de montrer la diversité des justifications proposées mais aussi leur catégorisation en trois types : appel à des règles opératoires énoncées[14] , appel à des règles au niveau de la forme, réécriture.

Voici un tableau récapitulatif de la liste des valeurs des critères concernés dans cet exercice pour les 18 élèves :

	Candie	Cyril/David	Denis	Didier	Eric B.
Gestion dans registre algébrique					
Type de formation	Carré duplication	Sans () et priorité au carré	() personnelle et priorité signe -	Sans () et priorité signe -	() personnelle et priorité signe -
Rationalité algébrique					
Type de justification	Réécriture Règle des signes	Règle des signes	règle des signes	Réécriture	Règle des signes Réécriture
	Eric M.	**Daniel / Fabien**	**Isabelle**	**Karine**	**Nadia**
Gestion dans registre algébrique					
Type de formation	() personnelle et priorité signe -	Correct	Correct	Sans () et priorité au carré	Carré duplication
Rationalité algébrique					
Type de justification	Règle des signes	règle des signes Réécriture	Règle des signes Réécriture Prté opératoire	Règle des signes	Réécriture

[14]Nous considérons que la règle des signes fait partie des règles opératoires énoncées : elle est enseignée à partir de la classe de cinquième. Nous la faisons apparaître explicitement.

	Nicolas	Nouara	Pascal	Sandrine F./ Sandrine P.	Sébastien
Gestion dans registre algébrique					
Type de formation	Sans () et priorité au carré	() personnelle et priorité signe -	Sans () et priorité signe -	() personnelle e/ Sans parenthèse Priorité signe -	Correct
Gestion dans registre algébrique					
Type de justification	Règle des signes "Pas d'interv. des parenthèses"	règle des signes Règle opératoire	"On enlève les parenthèses"	"Parenthèse préserve signe-" Règle des signes	Réécriture

Tableaux n°18 : Liste des valeurs des critères décrivant les solutions des 18 élèves

III.2. EX N°3 DU TEST D'ENTRÉE 1991-92

III.2.1 Enoncé

Pour tout réel a, les égalités suivantes sont-elles vraies ? Donnez un contre-exemple si l'égalité est fausse.

	Vrai/Faux	Si Faux, justifiez votre réponse
$a^2 = a.a$		
$a^2 = 2a$		
$a^2 = a2$		
$a^2 = a+a$		
$a^2 = a \text{x} a$		

Exemple de réponse :

$a^3 = a + a + a$	Faux	Si $a = 1$, on a $a^3 = 1$ et $a + a + a = 3$

III.2.2 Analyse de la tâche

• *Situation et objectifs*

C'est un exercice de "reconnaissance" donné lors du test de prérentrée. Il vise à rechercher si les expressions a^2, $a.a$, $2a$, $a+a$, $a2$, axa sont ou non correctement interprétées. Dans le cas d'une identification incorrecte, l'analyse doit permettre de repérer les règles de formation du registre algébrique utilisées par l'élève.

Il est demandé de ne justifier la réponse que si l'*assertion est fausse*, et dans ce cas, de donner un contre-exemple. Il est à noter qu'un exemple de réponse est donné. Ce modèle n'est pas neutre : il permet de repérer si les élèves connaissent la notion de contre-exemple et s'ils peuvent articuler le registre des écritures algébriques et le registre des écritures numériques dans le sens algébrique vers numérique.

Il est possible, dans certains cas, de déterminer si le système des écritures algébriques permet d'attribuer une valeur correcte (leur dénotation) aux expressions algébriques mises en jeu dans les égalités et de mettre en relation la recherche de la valeur de vérité avec les conceptions que les élèves se font du signe d'égalité et des lettres.

L'exercice met en jeu les critères *reproduction de tâche d'ordre numérique* et *interprétation des expressions* de la composante *traitement algébrique*. Pour les composantes de caractérisation, ce sont les critères suivants qui interviennent :

- les critères *statut du signe d'égalité* et *statut des lettres* associées à la composante *rapport arithmétique/algèbre*,
- le critère *type de formation* associé à la composante *gestion du registre algébrique,*
- le critère type de justification associé à la composante rationalité algébrique.

• Solutions attendues

Même si nous demandons un contre-exemple pour justifier qu'une égalité est fausse, nous attendons, suite à l'exercice précédent, trois autres types de justification : réécriture, appel à des propriétés énoncées opératoires, appel à des règles au niveau de la forme.

• Grille descriptive de la tâche

En conséquence, nous en déduisons la grille descriptive suivante pour l'exercice n°3 du test d'entrée :

Composantes d'analyse	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Reproduction de tâche d'ordre numérique	Correct, incorrect, non traité
	Interprétation d'une expression algébrique	Correct, incorrect, non traité
Rapport arithmétique/algèbre	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Etiquette Nombres généralisés
	Statut des objets	Procédural Structural Pseudo-structural
Gestion du registre algébrique	Type de formation	RF ({a}, .,x,(),2)
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres*	Type de conversion entre registre algébrique et registre numérique	Registre algébrique—>registre numérique
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel à des règles au niveau de la forme Appel à des propriétés énoncées opératoires Réécriture Contre-exemple

Tableau n°19 : Grille descriptive de l'exercice n°3 du test

[15]L'étoile signifie que cette composante n'entre en jeu que dans le cas où l'élève propose un contre-exemple et passe du cadre algébrique au cadre numérique.

III.2.3 Analyse des solutions envisageables

Comme dans l'exercice précédent, nous regroupons dès le départ l'analyse a priori et celle des productions des élèves. Nous l'organisons par rapport aux règles de formation incorrectes et par rapport aux types de justification.

Une interprétation incorrecte peut reposer sur l'identification incorrecte des règles de formation du registre algébrique utilisant les quatre signes suivants : le point, les symboles opératoires + et x et l'exposant 2. En particulier,

• la notation "." parfois peu connue des élèves peut entraîner une idée de "duplication" ou d'"itération" si les lettres sont encore associées à des étiquettes, a^2 étant alors associée à $a+a$ (cf ex2 test).

• la confusion est fréquente entre l'écriture du carré d'un nombre et de son double. Certains didacticiens émettent l'idée qu'il y a, lors d'un calcul, glissement des nombres en position d'exposant en nombres en position de coefficient ou réciproquement pour permettre de regrouper en un seul terme des termes de degrés différents [Douady, 1993]. Le recoupement entre les réponses aux deux premières égalités et à la troisième donne donc a priori des informations intéressantes sur le système de représentation des expressions.

L'analyse des productions écrites des élèves met en évidence plusieurs comportements qui s'articulent comme attendu autour du *rôle des quatre signes* : le point, les symboles opératoires + et x et l'exposant 2. Voici un tableau récapitulant les identifications données pour un échantillon de 16 élèves :

Règle de formation	Elèves
Correct	Cyril, Daniel, Fabien, Sébastien, Isabelle, Nouara, Sandrine F.
Oral	Denis, Nicolas, Pascal, Sandrine P.
Point incorrect	Denis, Didier, Eric M.
Carré glissement	David, Eric B, Eric M., Sandrine P.
Carré duplication	Candie, Karine, Nadia

Tableau n°20 : Répartition des solutions des 16 élèves

Nous présentons pour chaque catégorie de solutions, les types de justification associés.

• <u>Interprétation correcte</u> (cas n°1) des expressions littérales a^2, $a.a$, $2a$, $a+a$, $a2$, axa. a^2 est le produit de a par lui même. Seules les égalités $a^2 = axa$ et $a^2 = a.a$ sont vraies, pour tout réel a.

Deux types de justification sont proposés dans ce cas lorsque l'égalité est considérée fausse : contre-exemple et réécriture. Dans les deux cas, c'est une validation en conformité à la dénotation ou en référence aux opérations en jeu sur les nombres.

• Cyril, Daniel, Fabien et de Sébastien proposent un contre-exemple comme demandé. Fabien change même de valeur numérique pour chaque contre-exemple. La validation s'appuie sur une articulation entre le cadre numérique et celui des expressions algébriques et sur la dénotation des expressions.

• Isabelle, Nouara et Sandrine F. font appel aux définitions du carré et/ou du double d'un nombre dans des réécritures. Nouara écrit $a^2=a \times a$. Isabelle déduit, à partir de l'égalité $2a = a+a$ que $a^2 \neq 2a$. Son raisonnement logique est bien mené. La validation est réalisée en référence aux opérations en jeu dans les expressions.

• Interprétation correcte des expressions a^2, axa, $2a$, $a+a$ et interprétation incorrecte de $a2$ et/ou $a.a$ (cas n°2 avec deux sous-cas) : Pour tout réel a, l'égalité $a^2 = axa$ est vraie et les égalités $a^2 = 2a$ et $a^2 = a+a$ sont fausses. En revanche, des difficultés sont rencontrées sur les règles de formation des écritures $a2$ et/ou $a.a$ moins familières. On retrouve dans ce cas les deux types de justification précédents.

Pascal et Nicolas donnent des contre-exemples pour justifier les deux égalités fausses.

Didier traite incorrectement $a.a$. On retrouve le même système de représentation que dans l'ex1 du test : si $a = 1$ alors $a.a = 1{,}1$. a est considéré comme un chiffre et non comme un nombre[16].
$a.a$ —> a,a , on peut parler d'une écriture "point décimal".
L'égalité $a^2 = a2$ est jugée fausse (cas n°2.1).
Didier propose des contre-exemples dans le cas où les égalités sont fausses.

Denis traite incorrectement les écritures $a2$ et $a.a$ sans justification. En revanche, pour justifier les égalités fausses, il rappelle la définition de $2a$ ou de $a+a$ qui contredisent les égalités.

$a^2 = a.a$	F
$a^2 = 2a$	F
$a^2 = a2$	F
$a^2 = a+a$	F
$a^2 = a \times a$	V

Cas n°2.1

$a^2 = a.a$	V
$a^2 = 2a$	F
$a^2 = a2$	V
$a^2 = a+a$	F
$a^2 = a \times a$	V

Cas n°2.2

• Interprétation correcte de a^2, axa et $a.a$: (cas n°3) : Les égalités $a^2 = axa$ et $a^2 = a.a$ sont jugées vraies et l'égalité $a^2 = a+a$ est jugée fausse. Le "." est associé à la multiplication. Mais, l'égalité $a^2 = 2a$ est jugée vraie. Il y a *glissement* du nombre en position d'exposant en nombre en position de coefficient et $2a$ n'est pas considérée comme l'écriture du double de a. C'est une validation en conformité à des règles qui peut révéler une conception pseudo-structurale des expressions.

16 De même, dans l'ex1 on pouvait lire $67.10^{-3} = 67{,}10 \times 0{,}001$. Il semble que le signe "." est associé à l'écriture décimale.

Un autre type de justification apparaît, l'appel au contrat, en plus des deux types précédents : l'élève donne un contre-exemple non approprié en imitant le modèle.

David propose un contre-exemple pour justifier que l'égalité $a^2 = a+a$ est fausse.

En revanche, Eric B. reprend le contre-exemple donné dans l'exemple sans l'adapter : il veut visiblement respecter les consignes mais ne comprend pas ce qu'on entend par contre-exemple. Il écrit : "Si $a = 3$ on a $a^2=9$ et $3+3+3=9$"

Sandrine P. reprend le modèle pour montrer que l'égalité $a^2 = a + a$ est fausse. Elle écrit "Si $a = 2$ alors $a^2 = 4$ et $a + a + a = 6$". Le contre-exemple proposé par Sandrine P. imite le modèle. Elle veut rentrer dans le jeu demandé mais ne semble pas avoir compris ce qu'on entend par contre-exemple.

Dans ces deux cas, c'est à notre avis une validation au contrat.

$a^2 = a.a$	V
$a^2 = 2a$	V
$a^2 = a2$	V ou F
$a^2 = a+a$	F
$a^2 = a \text{x} a$	V

Cas n°3

$a^2 = a.a$	F
$a^2 = 2a$	V
$a^2 = a2$	F
$a^2 = a+a$	V
$a^2 = a \text{x} a$	F

Cas n°4

• Interprétation incorrecte de a^2, $a\text{x}a$ et $a.a$ (cas n°4) : l'expression littérale a^2 n'est pas interprétée comme le produit de a par lui même : $a^2 = a+a$ est vraie.

Jusqu'à présent, les opérateurs x et ^{2} conservaient leur sens opératoire. Ce n'est plus le cas.

Pour Candie, $a^2 = a+a$ et $a^2 = 2a$ sont vraies, les autres égalités étant fausses. Elle justifie sa réponse par l'égalité $a+a = a^2$ Les deux expressions $a+a$ et $2a$ semblent être identifiées correctement. Les exercices 2 et 12 du test confirment cette interprétation.

Pour Karine et Nadia, l'égalité $a^2 = a+a$ est vraie et les égalités $a^2 = a\text{x}a$, $a^2 = 2a$ et $a^2 = a\,2$ sont fausses, l'égalité $a^2 = a.a$ étant vraie (Nadia) ou fausse (Karine). Déjà pour Nadia, on trouvait dans l'exercice 2 précédent du test une interprétation analogue pour -9^2, c'est à dire (-9) + (-9).

Karine propose un contre-exemple contradictoire ! On peut mettre en doute le raisonnement réalisé. Nadia propose la définition $a^2 = a+a$ comme justification.

En résumé, comme pour les exercices précédents, la structure d'analyse permet de décrire les solutions des élèves à condition de rajouter des valeurs locales pour les critères en jeu dans la tâche : c'est le cas pour le critère *type de formation* et dans une moindre mesure pour le critère *type de justification.*

Nous définissons les valeurs locales suivantes pour le critère *type de formation* :

- point décimal : le point désigne la virgule décimale
- oral : en liaison avec une habitude orale de prononciation, le rôle du signe "." et du coefficient numérique 2 ne sont pas correctement identifiés.
- carré duplication : $a^2 \longrightarrow a+a$
- carré glissement : $a^2 \longrightarrow 2a$, il y a glissement du nombre en position d'exposant vers un nombre en position de coefficient.

Nous ajoutons la valeur <u>appel au contrat</u> pour le critère *type de justification* : cette valeur code le cas où la justification proposée suit le modèle donné tout en étant incorrect. Il est vraiment possible de l'identifier lorsque le contre-exemple proposé est incorrect.

Nous en déduisons la grille d'analyse suivante pour l'exercice n°3 du test 1991-1992:

Critères	**Valeurs globales**	**Valeurs locales**
Rapport arithmétique/algèbre	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat Equivalence Dual
	Statut des lettres	Etiquettes Nombres généralisés
	Statut des objets	Procédural Structural Pseudo-structural
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Point incorrect (décimal) Oral Carré duplication Carré glissement
	Non identifiable	
Types de justification	Appel à règles énoncées au niveau de la forme	
	Appel au contrat	Recopie incorrecte du modèle
	Appel à des propriétés opératoires énoncées	
	Appel à réécriture	$a^2=a\mathrm{x}a$, $2a=a+a$, $a2=2a$, $a+a=2a$, $a^2=a.a$, $a\mathrm{x}a\neq 2a$, $a\mathrm{x}a\neq a+a$ $a^2=a+a$, $a+a\neq a\mathrm{x}2$ (dans un système incorrect)
	Appel à contre-exemple	

Tableau n°21 : Grille d'analyse de l'exercice n°3 du test

III.2.4 Synthèse

1) L'analyse effectuée recoupe et complète celles effectuées pour l'ex2 du test et pour l'exercice "Le prestidigitateur". Elle renforce notamment l'intérêt de la composante *gestion du registre algébrique* et du critère *type de formation* pour la description fine des pratiques algébriques et la recherche de cohérences de fonctionnement. Sur plusieurs exercices, en effet nous commençons à mettre en évidence des régularités sur les règles de formation du registre algébrique utilisées par les élèves.

2) L'identification correcte ou non du rôle attribué aux opérateurs +, x, ^{2}, au signe "." et leur lien nous permet de distinguer une manipulation formelle opératoire d'une manipulation non opératoire.

Nous définissons deux types de manipulation formelle que nous qualifions de manipulation formelle opératoire ou bien pseudo-opératoire. Ils sont caractérisés de la façon suivante :

• Du côté d'une manipulation formelle opératoire : les rôles des opérateurs *exposant 2*, *signe* x et *signe* + et le *coefficient* 2 sont correctement identifiés

• Du côté d'une manipulation formelle pseudo-opératoire : le rôle des opérateurs *exposant 2*, *signe* x et *signe* + n'est pas stable et, régulièrement, l'opérateur *exposant 2* peut être associé à la duplication ou au glissement du nombre en position d'exposant vers un nombre en position de coefficient. Les écritures se ramènent au 1er degré.

3) Cet exercice fait apparaître clairement que la validation d'une égalité peut s'appuyer sur des réécritures liées à une définition correcte ou non des règles de formation et non à la dénotation des expressions. Pour donner un contre-exemple, il est nécessaire de pouvoir articuler le registre des écritures algébriques et le registre des écritures numériques dans le sens algébrique vers numérique. Selon les justifications apportées, nous obtenons des informations sur le statut du signe d'égalité, le statut des lettres et des expressions.

Remarquons qu'aucun élève n'a donné de justification par appel à des propriétés opératoires énoncées. Nous pensons que le modèle a influencé leur résolution. Ce ne sera plus le cas dans le test suivant. Voici un tableau récapitulatif de la liste des valeurs des critères concernés dans cet exercice pour les 18 élèves :

	Candie	**David**	**Denis**	**Didier**	**Eric B.**
Traitement algébrique					
Substitution	Non	Oui	Non	Oui	Non
Interprétation	Incorrecte	Incorrecte	Correcte ss pt	Correcte ss pt	Incorrecte
Gestion dans registre algébrique					
Type de formation	Carré duplication	Carré glissement	Correct	Point décimal *aa—>a,a*	Carré glissement
Rationalité algébrique					
Type de justification	Réécriture	Contre-exemple (1sur 2)	Réécriture	Contre-exemple	Appel au contrat
	Eric M.	**Fabien/Cyril**	**Isabelle**	**Karine**	**Nadia**
Traitement algébrique					
Substitution	Non	Oui	Non	?	Non
Interprétation	Incorrecte	Correcte	Correcte	Incorrecte	Incorrecte
Gestion dans registre algébrique					
Type de formation	Carré glissement	Correct	Correct	Carré duplication	Carré duplication
Rationalité algébrique					
Type de justification	Appel au contrat	Contre-exemple (3)	Réécriture	Appel au contrat	Réécriture
	Nicolas	**Nouara**	**Pascal**	**Sandrine F.**	**Sébastien**
Traitement algébrique					
Substitution	Oui	Non	Oui	Non	Oui
Interprétation	Correct	Correct	Correct	Correct	Correct
Gestion dans registre algébrique					
Type de formation	Oral	Correct	Oral	Correct	Correct
Rationalité algébrique					
Type de justification	Contre-exemple (2)	Réécriture	Contre-exemple (2)	Réécriture	Contre-exemple (3)

Tableau n°22 : Valeurs des critères associées aux productions des élèves pour l'ex 4 du test d'entrée 1991-1992

IV. EXERCICES "TECHNIQUES"

Nous utilisons ici la structure d'analyse pour étudier les aspects techniques et syntaxiques mis en jeu pour manipuler formellement des expressions. Nous le mettons en relation avec les règles de formation mises en évidence.

IV.1 EX N°4 DU TEST D'ENTRÉE 1991-92 :

IV.1.1 Enoncé

Développer et réduire
$(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$

IV.1.2 Analyse de la tâche

• *Situation et objectifs*

C'est un des exercices du test d'évaluation à l'entrée en Première. L'exercice, non habituel, permet d'étudier les règles de formation et les règles de transformation mises en œuvre pour développer et réduire une expression algébrique de deux variables, mais aussi le degré d'automatisation des règles de transformation. C'est avant tout le côté technique et syntaxique de la manipulation formelle qui est analysé.

• *Grille descriptive de la tâche*

Le seul type de traitement algébrique mis en jeu par la tâche est la *reproduction d'une tâche algébrique non finalisée de niveau 1*, et plus particulièrement, le développement d'une expression algébrique. Nous associons donc à cet exercice les critères *type de formation* et *type de traitement* de la composante *gestion dans le registre algébrique* et leurs valeurs globales respectives.

En conséquence, voici la grille descriptive associée à cet exercice :

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Reproduction d'une tâche algébrique non finalisée de niveau 1	Développement
Gestion dans le registre algébrique	Type de formation	$RF(\{a,b\},-,+,x,^2())$
	Type de traitement	$RT_{développement}$

Tableau n°23 : Grille descriptive attachée à l'exercice 4 du test d'entrée 1991-1992

IV.1.3 Analyse des solutions envisageables

L'analyse a priori et celle des productions des élèves conduisent à différencier plusieurs types de traitement formel corrects ou incorrects. Nous les présentons ci-après en les illustrant comme précédemment par des productions d'élèves.

1. Traitement formel correct : les règles de formation et les règles de transformation du registre algébrique sont mises en œuvre correctement.

Il nous semble cependant nécessaire de distinguer a priori deux cas, suivant que le calcul s'effectue "à l'aveuglette" ou non :

- les étapes du calcul sont perçues et correctement décomposées et enchaînées,
- les identités remarquables sont disponibles et appliquées pour développer l'expression, ce qui correspond à la maîtrise technique attendue à un certain degré d'automatisation,
- les identités remarquables ne sont pas mobilisées,

De fait, parmi les élèves considérés, Sébastien est le seul à mobiliser l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ et à l'instancier correctement.

Pour prendre en compte cette distinction, nous complétons les valeurs globales du critère *type de traitement* par les valeurs locales correct et technique de niveau 0, correct et technique de niveau 1.

2. Traitement formel incorrect :

Nous distinguons deux cas : il y a développement du produit de facteurs par application du "geste de la distributivité" ou bien il y a réorganisation du calcul sans tenir compte du rôle des parenthèses et des symboles opératoires.

2.1 Développement du produit de deux facteurs :

Le calcul et la réécriture des expressions utilise des règles incorrectes que l'on peut rattacher soit à des règles de formation, soit à des règles de transformation[17].

• *Du côté des règles de formation incorrectes :*

Nous retenons les règles de formation identifiables suivantes :

- la non commutativité de la multiplication

Pour Karine :
$(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$
$ab - 2a - b^2 + 2b + 2b - ba - 4 + a + a^2 + ab - ba - b^2$
$2ab - a - 2b^2 + 4b - 2ba - 4 + a^2$
La distributivité de la multiplication par rapport aux opérations additives est appliquée mais sans connaissance de la commutativité de la multiplication. Les termes $2ba$ et $-2ab$ ne s'annulent pas.

[17] Il n'est pas toujours facile de distinguer les erreurs sur chaque type au vu des copies : parfois, nous décidons arbitrairement du type d'erreur qui nous semble le plus adéquat.

- la règle du carré glissement : le développement conduit à l'application de la règle $bb \longrightarrow 2b$, manipulation formelle qualifiée de pseudo-opératoire (cf paragraphe III)

Pour Sandrine P. :
$(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$
$ab - 2a - 2b + 2b\ \ + 2b - ab\ \ - 4 + 2a\ \ + a2 + ab - ba\ \ - b2$
On peut aussi associer cette erreur à la règle de formation carré glissement.

• *Du côté des règles de traitement erronées*

- identités remarquables incorrectes : $(a - b)(a + b) \longrightarrow a^2 + b^2$ étiquetée "différence/somme de deux carrés"

- réduction/assemblage de monômes du type $ma^p + na^q \longrightarrow (m+n)a^{p+q}$

Cette pratique assez fréquente revient à réduire deux monômes en "assemblant" respectivement coefficients et puissances et conduit à une manipulation formelle que nous avons qualifiée de pseudo-opératoire.

Par exemple pour Eric :
$(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$
$ab - 2a + b^2 - 2b\ \ + 2b - ab\ \ + 4 - 2a\ \ + a^2 - ab - ba + b^2$
$ab - ab - ab - ba\ \ - 2a\ \ - 2a\ \ + a^2 + b^2 + b^2 - 2b\ \ + 2b\ \ + 4$
$a^2 + b^4 + 4$
En plus d'autres erreurs, Eric réduit donc $b^2 + b^2$ en b^4

De même pour Sandrine F., l'expression $2b^2 + 4b$ devient $6b^3$ suite au traitement suivant :
$(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$
$(ab - 2a - b^2 + 2b) + (2b - ab\ \ - 4 + 2a) + (a^2 + ab - ab + b^2) =$
$2b^2 + 4b - 4 + a^2 =$
$6b^3 - 4 + a^2$

- erreur liée au signe - dans le développement d'un produit de facteurs étiquetée "erreur développement () et signe - "

Dans la solution ci-dessus, Eric semble utiliser la règle suivante :
pour tous a, b, c, $-a(b-c) = ab - ac$

2.2 Réorganisation du calcul

Le rôle des parenthèses n'est pas compris et le calcul ne respecte pas la priorité des opérations.

• *du côté des règles de formation*

- la non distinction entre écriture parenthésée et non parenthésée

• *du côté des règles de transformation*

- regroupement de termes

Dans ce cas, l'expression est réorganisée indépendamment des opérateurs et des blocs de calcul. Nous qualifions la manipulation formelle de non opératoire. Nous regroupons les types de comportement suivants :

Pour Nadia :
$(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$ devient
$(a\text{-}b)\text{x}(a\text{-}b)\text{x}(b\text{-}2)\text{+}(b\text{-}2)\text{x}(2\text{-}a)\text{x}(a\text{+}b)$.
Nadia ne tient pas compte des opérations et regroupe (ou assemble) les termes semblables sans tenir compte de l'ordre des opérations, et ceci, pour faire apparaître des identités connues à tout prix. Nadia semble vouloir montrer qu'elle sait qu'il faut appliquer un contrat en algèbre : appliquer des identités remarquables. L'expression devient
$(a^2\text{-}b^2) \text{ x } (b^2 - 4) \text{ x } (2\text{-}a) \text{ x } (a\text{+}b)$
Les formules appliquées sont de plus erronées : confusion entre $(a - b)^2$ et $(a^2\text{-}b^2)$.

Pour Eric M, il n'y a pas distinction entre écritures parenthésée et non parenthésée. Ensuite, après avoir supprimé les parenthèses, il regroupe les termes identiques entre eux et les réduit.
$(a - b)(b - 2) + (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$ devient
$= a - b \text{ x} b - 2 + b - 2 \text{ x } 2 - a + a - b \text{ x} a + b$ devient
$= a - a + \text{a x } a - 1b \text{ x } 1b + 1b - 1\,b + 1b\ -2 -2 \text{ x } 2$
$= 1a + b + 0$

En résumé, comme pour les deux autres types exercices, la structure d'analyse permet de décrire les solutions des élèves à condition de rajouter des valeurs locales pour les critères *type de formation* et *type de traitement*, valeurs qui permettent de décrire des comportements liés aux spécificités de la tâche. Nous définissons donc respectivement :

• pour le critère *type de formation* la valeur non commutatif ; les valeurs sans () et carré glissement ont déjà été proposées pour les exercices 2 et 3 du test.

• pour le critère *type de traitement*, les valeurs différence/somme de deux carrés, réduction/assemblage de monômes, erreur développement () et signe -, regroupement de termes ; la valeur réduction/assemblage de monômes peut être mise en relation avec la règle de traitement assemblage final.

En conséquence, nous en déduisons la grille d'analyse suivante pour l'exercice n°4 du test 1991-1992 :

Critères	Val. globales	Valeurs locales
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Sans () Sans commutativité Carré glissement
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	Technique de niveau 0 Technique de niveau 1
	(Op. incorrect) Identifiable (Pseudo-op) (Non op.)	Erreur développement, () et signe - Différence/somme de deux carrés Assemblage (réduction/assemblage de monômes) Regroupement de termes
	Non identifiable	

Tableau n°24 : Grille d'analyse de l'exercice n°4 du test d'entrée

IV.1.4 Synthèse

• La structure d'analyse sert encore d'appui pour discriminer les règles de formation et de traitement.

• Nous avons défini une nouvelle catégorie, qualifiée de non opératoire, pour caractériser un degré d'opérationnalité de la manipulation formelle : l'expression est réorganisée sans tenir compte des opérateurs et des blocs de calcul.

IV.2 EX III CE DU 25/11/91

IV.2.1 Enoncé

Développer et réduire

$A(x) = (2x\text{-}5)^2$ $\quad\quad$ $C(x) = (x\text{-}5)(x+5) + (2x\text{-}5)^2$

$B = 5a(a+3b) - 3a(a\text{-}2b)$ $\quad\quad$ $D(x)= 2(x\text{-}3)(x\text{-}4) - (x\text{-}5)^2$

IV.2.2 Analyse de la tâche

• *Situation et objectifs de l'exercice*

Cet exercice technique de manipulation formelle de niveau 1 (cf chapitre 2) a été posé lors du CE du 25/11/95. C'était la première évaluation relative à l'application des règles de calcul algébrique dans une tâche de développement d'expressions. Le développement ne comporte aucune difficulté et met en jeu l'application directe de savoir-faire de base : les règles de formation de l'ensemble $RF(\{a,b\},-,+,x,^2())$, les règles de traitement de l'ensemble $RT_{développement}$

Comme pour l'exercice précédent, l'analyse permet d'étudier les règles de formation et les règles de transformation mises en œuvre pour développer et réduire les expressions. C'est avant tout le côté technique et syntaxique qui est analysé.

• *Grille descriptive de la tâche*

Les critères *type de formation* et *type de traitement* de la composante *gestion dans le registre algébrique* permettent de décrire les diverses solutions.

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Reproduction d'une tâche algébrique non finalisée de niveau 1	Développement
Gestion dans le registre algébrique	Type de formation	$RF(\{x\},-,+,x,^2())$
	Type de traitement	$RT_{développement}$

Tableau n°25 : Grille descriptive attachée à l'exercice III du CE du 25/11/1991

IV.2.3 Analyse des solutions envisageables

Comme dans l'analyse précédente, nous regroupons l'analyse a priori et l'analyse a posteriori des solutions effectives en fonction d'un traitement correct ou incorrect. Nous différencions, dans la mesure du possible, les règles de formation et de transformation mises en jeu dans le calcul :

1. Traitement formel correct :

Comme dans l'exercice précédent, il est nécessaire de distinguer une manipulation formelle avec une technique de niveau 0 (Cyril, Sandrine F., Denis, Nicolas) ou de niveau 1. Remarquons que beaucoup plus d'élèves reconnaissent des identités remarquables, les instancient et les appliquent correctement.

2. Traitement formel incorrect :

Comme précédemment, nous distinguons deux cas selon qu'il y ait geste de développement du produit ou réorganisation du calcul.

2.1 Développement du produit

• *Du côté des règles de formation*:

Nous retrouvons des traitements que nous pouvons mettre en relation avec des règles de formation déjà rencontrées.

$(2x)^2 \longrightarrow 2x^2$: on reconnaît une règle relative à un système d'écritures algébriques non parenthésées notée sans () pour l'analyse des exercices précédents.

$2x^2 \longrightarrow 4x$ (David) : cette règle peut être liée à la règle de glissement de l'exposant en position de coefficient notée glissement carré

$nx.x \longrightarrow (n+1)x$ (Cyril) : on reconnaît la valeur locale duplication définie pour l'analyse de l'ex 3 du test

Ces deux dernières règles conduisent à une manipulation formelle qualifiée de pseudo-opératoire.

• *Du côté des règles de transformation*:

• concernant les identités remarquables

$(a-b)^2 \longrightarrow a^2 - b^2$ codée "fausse linéarité du carré"

$(a-b)^2 \longrightarrow a^2 + b^2$ (David) codée "carré d'une différence/somme des carrés"

$(a-b)^2 \longrightarrow a^2 - ab + b^2$ codée "simple produit"

$(a-b)^2 \longrightarrow a^2 + 2ab - b^2$ (Karine) codée "développement mixte"

$(a - b)(a+b) \longrightarrow a^2 + b^2$ codée "différence/somme de deux carrés" (déjà rencontrée dans l'exercice précédent)

• erreur dans développement du produit de deux facteurs mettant en jeu signe -: nous l'avons déjà étiquetée "erreur développement () et signe -"

• concernant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (Candie) :

a(b+c) —> *ab + a + c* : on peut rapprocher cette règle de distribution de la duplication Cette règle conduit à une manipulation formelle qualifiée de pseudo-opératoire.

2.1 Réorganisation du calcul (cf exercice précédent)

En résumé, il est seulement nécessaire de rajouter des valeurs locales pour le critère *type de traitement.* concernant le développement des identités remarquables. Nous les indiquons par un soulignement dans la grille d'analyse associée à l'exercice n°4 du test 1991-1992 :

Critères	**Val. globales**	**Valeurs locales**
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Sans () Carré glissement Carré duplication
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	Technique de niveau 0 Technique de niveau 1
	(Op. incorrect) Identifiable (Pseudo-op) (Non op.)	Erreur dans développement () et signe - Différence/somme de deux carrés Fausse linéarité du carré Carré d'une différence/somme des carrés Simple produit Développement mixte Distribution avec duplication Regroupement de termes
	Non identifiable	

Tableau n°26 : Grille d'analyse de l'exercice III du CE du 25/11/1991

IV.2.4 Synthèse

• Nous mettons en évidence une relative stabilité de l'ensemble des règles de formation. Les nouvelles règles de transformation dépendent de la spécificité du traitement formel mis en jeu dans l'exercice.

• Nous voyons apparaître chez quelques élèves, Candie, Karine, Nadia, des régularités et des cohérences de fonctionnement. En particulier, nous pouvons mettre en relation certains traitements formels avec une ou des règles de formation mises en évidence dans les exercices 2 et 3.

Voici des règles de formation utilisées "régulièrement" par ces élèves dans les exercices 3, 4 et 12 :

Karine	Candie	Nadia	Etiquettes
$a^2 \longrightarrow a+a$	$-9^2 \longrightarrow -9+-9$ $a^2 \longrightarrow a+a$ $a^2 \longrightarrow 2a$	$-9^2 \longrightarrow -9+-9$ $a^2 \longrightarrow a+a$ $2a^2 \longrightarrow 4a$	Carré duplication Carré glissement
$ax \longrightarrow a+x$			Désassemblage
$ab \neq ba$	$x\text{-}3\% \longrightarrow 0{,}03x$		Non commutativité
$a+x \longrightarrow ax$			Assemblage final

Tableau n°27 : Régularités dans les règles de formation chez trois élèves

V. CONCLUSION

Nous reterons trois éléments de cette expérimentation :

1) Ce test s'avère positif pour la structure d'analyse. Les composantes et critères associés choisis a priori permettent de décrire les solutions des élèves dans les trois types d'exercices définis au chapitre 2 et permettent de mettre en évidence la multidimensionnalité de l'activité algébrique. La structure permet d'éclairer certaines pratiques arithmétiques, de mettre en évidence l'importance de l'écriture et de la formulation dans tout traitement algébrique puis les divers degrés d'opérationnalité de la manipulation formelle, de faire apparaître différentes formes de justification qui peuvent cohabiter et diverses fonctions jouées par l'algèbre.

2) L'expérimentation montre la nécessité de rajouter des valeurs locales aux valeurs globales des critères définis a priori. Elles permettent à la fois de décrire certaines spécificités liées aux tâches mais aussi des comportements personnels des élèves.

La comparaison de l'analyse de tâches voisines peut permettre de faire l'hypothèse que cet ajout ne va pas être permanent et ne va pas conduire à une explosion du nombre des valeurs locales.

3) Cette première expérimentation semble bien mettre en évidence, via le recoupement des descriptions des productions de chaque élève aux différentes tâches, des régularités et des cohérences dans leurs pratiques, en particulier dans leur rapport personnel à l'algèbre, cohérences que la structure d'analyse avait justement l'ambition de mettre à jour. Les composantes et critères de la structure d'analyse semblent bien jouer le rôle qui leur a été attribué dans le chapitre 2.

Illustrons-le pour deux élèves : Karine, et Sandrine F.

Tableau récapitulatif pour Karine :

Karine	Prestidigit /ex7 12/11)	les pompistes	Test ex5 / CE 23/11/91	Le coût du voy / minitel	Test ex2	Test ex3
Traitement	**algébrique**					
Niveau de traitement :						
Ordre numériq	Non	Non		Oui		Non
Reproduct niv1			Incorrect	Non		
Reproduct niv2	Incorrect					
Interprétation	Non	Non		Incorrect	Incorrect	Incorrecte
Production				Incorrect		
Outil preuve						
Rapport	***arithmétique/algèbre***					
Démarche de résolution	Algébrique	Algébrique		?		
Statut du signe d'égalité	Annonce résultat	Annonce résultat				Equivalence
Statut des lettres	Nombre Mesure	Etiquette Nombre		Pas de variable		Nombres
Objets, statut des objets	Procédural	Procédural		Aucun		Pseudo-structural
Gestion	***dans le registre algébrique***					
Type de formation			*ab≠ba*		Sans () et priorité au carré	Carré duplication
Type de traitement	$x+a \longrightarrow xa$ Assembl. final $9+a^2 \longrightarrow 9am^2$		Dévelpt mixte	Non identifiable		
Articulatio	***n entre registre le algébrique et d'autres registres sémiotique***					
Type de conversion	pas à pas séparé	Pas à pas séparé		Tableau de pourcentage		
Fonction	***de l'algèbre***					
Fonction apparente de l'algèbre	Algèbre liée au contrat	Algèbre liée au contrat Algèbre pour sténographier		Algèbre liée au contrat Algèbre pour sténographier		
Rationalité	***algébrique***					
Type de justification	Appel à règles de réécriture	Réécriture Appel à règles		Ex (Minitel) Appel contexte Appel à proc. Appel graphique	Appel à règles	Appel au contrat

Tableau n°28 : Synthèse des descriptions des productions pour Karine

Tableau récapitulatif pour Sandrine F. :

Sandrine F.	Prestidigitat	les pompistes	Test ex5 / CE 23/11/91	Coût du voyag / Minitel	Test ex2	Test ex3
Traitement algébrique						
Type de traitement :						
Substitution	Oui	Oui		Oui		Non
Reprodt niv1			Incorrect	Oui (Minitel)		
Reprodt niv2						
Interprétation				Correct	Incorrect	Incorrect
Production	Incorrect	Incorrect		Correct		
Outil preuve	Non	Non		(Minitel)		
Rapport arithmétique/ algèbre						
Démarche de résolution	Algébrique	Algébrique		Algébr (Mini) Arithm (Coût)		
Statut du signe d'égalité	Annonce résultat	Annonce résultat		Dual		Equivalence
Statut des lettres	Nombre	Nombre Etiquette		Nombre Inconnue		Nombres
Objets, statut des objets	Procédural	Procédural		Exp, equation Procédural		Procédural Structural
Gestion dans le registre algébrique						
Type de formation			Correct	Correct	() personnelle et priorité au -	Correct
Type de traitement			Réd/assembl	essais (coût) Résol équat M		
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques						
Type de conversion	Pas à pas enchainée Globale non parenthésée	Globale additive abréviative (pas à pas numérique)		Pas à pas séparé (minitel) Linéaire global tracé : ligne brisée		
Fonction de l'algèbre						
Fonction apparente de l'algèbre	Algèbre pour substituer	Algèbre pour substituer		Algèbre pour substituer pour résoudre équation		
Rationalité algébrique						
Type de preuve Type de justification	Pragmatique Appel au numérique	Pragmatique Appel au numérique		Appel au numérique (M) Appel au calcul algébrique Appel au graphique	Règle énoncée au niveau de la forme "Les () préservent le -" Règle énoncée opératoire	Réécriture

Tableau n°29 : Synthèse des descriptions des productions pour Sandrine F.

CHAPITRE 4

L'ANALYSE DU CÔTÉ DE L'ÉLÈVE : TÂCHES DIAGNOSTIC

Dans ce chapitre, nous construisons des moyens opératoires de diagnostic pour cerner le rapport des élèves à l'algèbre élémentaire. Pour ceci, nous opérationnalisons la structure d'analyse multidimensionnelle relative aux compétences algébriques. Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre 1, un de nos objectifs est de définir des profils d'élèves relativement à l'algèbre élémentaire.

Dans le paragraphe I, nous présentons les critères de choix retenus pour construire un ensemble de tâches représentatives du domaine de problèmes algébriques mis en jeu à l'entrée en Première G appelées *tâches diagnostic*. Nous justifions leur répartition conformément à la structure d'analyse.

Dans le paragraphe II, nous présentons pour chacune des tâches diagnostic une fiche d'identité constituée d'une grille descriptive de la tâche et d'une grille d'analyse des productions des élèves. En dernier lieu, nous validons la définition des valeurs locales des critères après confrontation de l'analyse a priori et a posteriori.

I. ORGANISATION DU DIAGNOSTIC

I.1 LES OBJECTIFS DU DIAGNOSTIC

Rappelons d'abord les deux objectifs complémentaires attribués au diagnostic :

• un objectif d'évaluation "dans les grandes lignes" de la compétence algébrique des élèves par rapport à un niveau attendu,

• un objectif d'identification et de caractérisation des cohérences de fonctionnement des élèves en algèbre élémentaire pour cerner leur rapport personnel à l'algèbre.

La structure d'analyse permet donc un tel diagnostic.

I.2 LES TÂCHES DIAGNOSTIC

Comment opérationnalisons-nous la structure d'analyse multidimensionnelle pour réaliser ce type de diagnostic ? Nous prolongeons l'étude réalisée dans le chapitre 3 et construisons un ensemble de dix-neuf exercices, appelés *tâches diagnostic*, qui nous semblent représentatifs du domaine de l'algèbre élémentaire mis en jeu à l'entrée en Première G : ce sont les *instruments du diagnostic*. Elles doivent mettre en jeu les objets de l'algèbre élémentaire et leurs différents emplois dans des situations diverses, ceux définis au chapitre 2.

• *Grille descriptive d'une tâche diagnostic.*

Nous analysons chaque tâche *en fonction du type de solution attendu à ce niveau scolaire* en prenant en compte ses spécificités propres. En conséquence, nous caractérisons *chaque tâche* par :

- un ou des types de traitement algébrique,
- les démarches de résolution envisageables et les objets mathématiques à mettre en œuvre,
- le ou les registres sémiotiques mis en jeu et leur mode de gestion,
- l'emploi attribué à l'algèbre,
- le niveau et les formes de rationalité algébrique attendues.

Pour une tâche donnée, *le n-uplet des valeurs globales ou locales associées aux critères mis en jeu pour décrire la tâche et le type de solution attendu* constitue *la grille descriptive de la tâche diagnostic.*

• *Trois classes de tâches diagnostic*

Nous *regroupons les tâches diagnostic* en trois classes d'exercices selon les types de traitement algébrique : la classe des exercices *"techniques"*, celle des exercices de *"reconnaissance"*, celle des exercices de "*mathématisation*" (cf chapitre II, paragraphe III.1). Voici un tableau récapitulant les types de traitement algébrique mis en jeu dans les différentes classes d'exercices :

Type d'exercice	Type de traitement algébrique
Exercices techniques	Reproduction de tâches d'ordre numérique Reproduction de tâches alg. non finalisées niv1 Reproduction de tâches alg. non finalisées niv2
Exercices de reconnaissance	Interprétation d'une expression algébrique
Exercices de mathématisation	Utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner des notions mathématiques Utilisation de l'outil algébrique pour traduire situat. - branchement formule - Production guidée dans un contexte familier - Production dans contexte non familier Utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve

Tableau n°1 : Types de traitement algébrique mis en jeu dans les différentes classes d'exercices

• *Grille d'analyse d'une tâche diagnostic*

C'est à travers l'analyse des productions des élèves relatives aux tâches diagnostic des trois classes que nous cherchons à définir leur compétence en algèbre élémentaire et à faire apparaître leur rapport personnel à l'algèbre.

La *grille d'analyse* associée à chaque tâche diagnostic permet de décrire les productions des élèves relatives à chaque tâche, compte tenu des deux objectifs d'analyse rappelés plus haut. Elle est construite suite à une analyse a priori et a posteriori des solutions envisageables par rapport à une solution attendue. Cette étude continue le test du chapitre 3 et permet de conforter la pertinence de la structure d'analyse et de la définition des valeurs locales des critères.

Les valeurs *locales* des critères (cf chapitre3) décrivent soit des spécificités liées à chaque tâche, soit des spécificités locales du fonctionnement des élèves. Rappelons le rôle joué par les cinq composantes de caractérisation :

Composantes	**Objectifs**
Rapport arithmétique/algèbre	Positionner l'activité algébrique par rapport à celle en arithmétique
Gestion dans le registre algébrique	Etudier la gestion des expressions dans le registre des écritures algébriques
Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Etudier la gestion des représentations symboliques dans l'articulation entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres
Fonction de l'algèbre	Pointer différentes formes d'activité algébrique, différents rapports personnels des élèves à l'algèbre
Rationalité algébrique	Cerner le niveau de rationalité mis en jeu dans l'activité algébrique des élèves

Tableau n°2 : Rôle joué par les cinq composantes d'analyse

I.3 LA CONCEPTION DES TÂCHES DIAGNOSTIC

I.3.1 Premiers critères de choix

Nous désignons par $T_1, \ldots, T_{19}$ les 19 tâches diagnostic.

Les exercices retenus sont d'une difficulté volontairement limitée (cf chapitre 3). Nous avons construit quelques exercices (T4, T6, T10, T11, T12, T19). Les autres proviennent de diverses évaluations (évaluation à l'entrée en seconde en 1990 dans l'académie de Lille, évaluation à l'entrée en seconde générale et technologique en 1992). Il nous semblait en effet intéressant de tester notre structure d'analyse sur des exercices conçus par l'institution dans un strict objectif d'évaluation.

Nous avons conservé parmi les exercices candidats ceux dont la richesse potentielle comme instrument de diagnostic, richesse définie lors d'une analyse a priori, a été confortée lors de la première expérimentation (cf chapitre 3). Il nous restait à compléter l'ensemble des exercices retenus.

I.3.2 Répartition par type de traitement algébrique

Nous voulons situer la *compétence algébrique* d'un élève par rapport au niveau attendu à l'entrée en Première G. Etant donné la multidimensionnalité de la compétence algébrique, nous devons répartir l'ensemble des tâches diagnostic sur l'ensemble des types de traitement algébrique.

Nous avons donc d'abord "bouché" les trous en complétant l'éventail des tâches pour couvrir les différents types de traitement algébrique. Ce tableau montre la répartition des types de traitement algébrique sur l'ensemble des tâches diagnostic.

Type de traitement algébrique	Numéro de la tâche diagnostic dans le test
Reproduction de tâches d'ordre numérique	T1, T2, T12*, T13*, T19*
Reproduction de tâches non finalisées niv1	T5, T7 questions 1 à 3
Reproduction de tâches non finalisées niv2	T7 questions 4 et 5
Interprétation d'une expression algébrique	T1, T3, T4, T6, T10, T14, T15, T18
Utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner des notions mathématiques	T14
Production aidée d'une relation dans contexte familier pour traduire algébriquement un problème	T8*, T19
Production d'une relation dans contexte non familier pour traduire algébriquement un problème	T8, T11, T16, T17, T19
Utilisation de l'outil algébrique comme outil de preuve	T12, T13

Tableau n° 3 : Tableau récapitulant la répartition des tâches diagnostic par type de traitement algébrique

Nous avons choisi des types de situation diversifiés qui permettent d'étudier la mise en œuvre des divers emplois de l'algèbre attendus. Par exemple, pour étudier le niveau de justification des élèves, nous proposons les situations de validation suivantes :

• Prouver qu'un énoncé est faux,

• Conjecturer une propriété numérique, la généraliser puis la prouver,

• Analyser des représentations graphiques et déterminer celle correspondant à la situation de l'énoncé.

Pour faciliter une vue d'ensemble des tâches diagnostic, nous présentons leur répartition par classe de tâches. Le lecteur pourra constater que la répartition est relativement équilibrée.

Type d'exercice	Numéro de la tâche diagnostic dans le test
Exercice "*technique*"	T1, T2 questions 1à3, T5, T7 questions 1à4
Exercice de "*reconnaissance*"	T3, T4, T6, T9, T10, T14, T15, T18
Exercice de "*mathématisation*"	T8, T11, T12, T13, T16, T17, T19

Tableau n° 4 : Tableau récapitulant la répartition des tâches diagnostic par type d'exercice

I.3.2 Répartition selon les composantes de caractérisation

Le diagnostic doit permettre de *décrire qualitativement* des cohérences du fonctionnement cognitif d'un élève même si ce fonctionnement n'est pas conforme à celui attendu en Première G. Pour ceci il doit être possible, lors de l'analyse transversale à toutes les tâches diagnostic, de recouper les valeurs d'un même critère.

Nous avons donc réparti l'ensemble des tâches diagnostic selon les différentes composantes d'analyse. Le tableau ci-dessous indique la répartition des composantes selon les tâches diagnostic. Chaque composante est présente dans au moins cinq tâches.

Composantes d'analyse	Numéro de la tâche diagnostic dans le test
Rapport arithmétique/algèbre	T4, T6, T8, T12, T13, T15, T16, T19
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	T2, T3, T4, T6, T9, T8, T10, T11, T12, T13, T14, T15, T16, T17, T18, T19
Gestion dans le registre algébrique	T4, T6, T8, T12, T13, T17, T19 non explicitement* T5, T7 question 1 (développement), T7 question 2 (factorisation) T7 question 3 à 5 (résolution équation)
Fonction de l'algèbre	T8, T12, T13, T14, T16, T17, T19
Rationalité algébrique	T3, T4, T6, T15 (Prouver qu'un énoncé est faux) T12, T13 (Prouver une propriété numérique) T8, T17, T19 (Résoudre une équation puis vérifier un résultat) T14 (Faire un raisonnement par élimination)

Tableau n° 5 : Répartition des tâches diagnostic en fonction des composantes d'analyse

I.3.3 Répartition selon les registres sémiotiques en jeu dans une tâche

Nous avons montré que l'activité algébrique met en jeu de nombreux registres sémiotiques. Nous devons donc répartir les tâches selon différents registres sémiotiques. En particulier, pour un même type de tâche algébrique, nous "doublons" les exercices en changeant les registres en jeu afin de tester le degré de mobilité de l'activité mise en jeu pour articuler différents registres. La répartition des tâches diagnostic par registres sémiotiques mis en jeu montre bien tous les recoupements possibles.

Registres de sortie Registres d'entrée	des écritures numérique (3 registres)	des expres. algébriques	du langage naturel	des représ. graphiques	des algorithmes	des figures
des écritures numérique	T1, T3					
des écritures algébriques	T2, T4, T6, T7, T15	T5, T7	T4, T6, T9, T15	T14	T11	T10
du langage naturel	T8, T12, T13, T17 T19	T8, T9, T12, T13, T16, T17 T19		T19	T11	
des représ. graphiques	T14, T18	T14	T18			
des algorithmes						
des figures	T17	T10, T17				

Tableau n° 6 : Répartition des tâches diagnostic par registres sémiotiques mis en jeu

I.3.4 Présentation des critères pour l'ensemble des tâches diagnostic

Pour terminer, nous présentons une vue d'ensemble des critères mis en jeu dans l'ensemble des tâches diagnostic, les tâches diagnostic étant regroupées par types d'exercices. Apportons d'abord des précisions sur leur sélection.

Les critères sélectionnés pour l'analyse de chaque tâche diagnostic doivent décrire certaines caractéristiques de l'activité algébrique mises en jeu par l'exercice. Nous les avons définis dans l'étude théorique. Ce choix peut évidemment être discuté.

Nous avons retenu parmi les critères initialement sélectionnés ceux qui, après comparaison entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori d'une tâche, donnent sans trop d'ambiguïté les informations recherchées.

Exercices "techniques" — Exercices de "mathématisation"

	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
Type de traitement										
Repr tâche num.	X	XXX			X*	X*	X*		X*	X*
Reproduct. niv1	X	XXX	X	1,2,3		X	X		X	X
Reproduct. niv2				4,5						
Interprétation										
Fonctionnem[t]. autres notions										
Production aidée					X					X
Production						X	X	X	X	
Preuve						X	X			
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche résol					X	X	X		X	X
Statut signe =					X	X	X	X	X	X
Statut des lettres					X	X	X	X	X	X
Statut des objets				3, 4, 5	X	X	X	X	X	X
Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres										
Type de formation		X	X	XXXX X						
Type de traitement		X	X	XXXX X		X	X		X	X
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques										
Type convers.	X	X				X	X	X	X	X
Fonction de l'algèbre										
Fonct apparente					X	X	X	X	X	X
Niveau de justication										
Type de preuve										
Type justificat.					X	X	X		X	X

Tableau n° 7 : Répartition des critères pour les tâches techniques et tâches de mathématisation

Exercices de "reconnaissance"

	T3	T4	T 6	T9	T 10	T 11	T 14	T 15	T 18
Traitement algébrique									
Type de traitement / type de tâche									
Tâche numérique		2,3,4	2,3,4,5				XX	XXXX	X
Reproduct. niv1									
Reproduct. niv2									
Interprétation	XXXX	XXXX X	XXXX XX	XXXX XXX	X	X	XXX	XXXX	X
Fonctionnem^{t}. autres notions							XXX*		
Production aidée									
Production									
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité		X	X					XXXX	
Statut des lettres		X	X					XXXX	
Statut des expressions		X	X					XXXX	
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	X	X	X		X			XXXX	
Type de traitement							X*		
Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion				X	X	X	X		X
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente						X*	X*		X*
Rationalité algébrique									
Type de justification	X	X	X			X*	X*	X	X*

Tableau n° 8 : Répartition des critères pour les tâches de "reconnaissance"

I.4 EXPÉRIMENTATION

Les dix-neuf tâches diagnostic ainsi construites constituent le test dévaluation donné en classe de Première G en début d'année scolaire 1992-1993.

Cette classe de Première G est constituée de sept élèves venant de BEP tertiaire et de dix-sept élèves venant de seconde indifférenciée. Ces dix sept élèves ont été sélectionnés suite aux difficultés rencontrées, en mathématiques et dans les autres matières, en seconde indifférenciée.

Elèves	Section d'origine de BEP
Caroline	VAM
Alice	VAM
Mérième	CAS
Frédéric	ACC
Lucie	CAS
Virginie	CAS
Philippe	ACC

Nous avons fait passé le test d'évaluation quinze jours après la rentrée. Les élèves de BEP commençaient à découvrir les pratiques relatives à l'enseignement des mathématiques en Première G. Nous nous appuyons sur l'analyse des productions des élèves pour tester la structure d'analyse et la définition des valeurs locales de critères et valider les premiers résultats. Nous en déduirons les profils d'élèves au chapitre 6.

I.5. FICHE D'IDENTITÉ DES TÂCHES DIAGNOSTIC

Nous attribuons à chaque tâche diagnostic une fiche d'identité. Chaque tâche diagnostic est caractérisée par :

- son énoncé,
- les objectifs qui lui sont attribués en précisant bien les deux niveaux d'analyse,
- sa *grille descriptive*, c'est-à-dire, la classe d'exercices à laquelle elle appartient, le (ou les) type(s) de traitement algébrique attendu(s), les savoirs et savoir-faire, les registres sémiotiques et les cadres mis en jeu,
- sa *grille d'analyse*, les valeurs globales et locales associées à chaque critère étant définis après confrontation entre une analyse a priori et a posteriori. L'analyse a priori inclut les résultats de l'expérimentation réalisée pendant l'année scolaire 1991-1992. L'analyse a posteriori concerne l'expérimentation réalisée pendant l'année scolaire 1992-1993. Dans l'analyse a posteriori, nous indiquons d'abord les valeurs des critères concernés qui restent analogues, puis en second lieu, celles qui apparaissent nouvelles.

Pour éviter des redites nous organisons la synthèse en distinguant l'analyse globale par classe de tâches diagnostic de l'analyse spécifique de chacune d'entre elles.

Dans l'analyse globale, nous présentons les objectifs généraux attribués à l'ensemble des tâches diagnostic, en distinguant les objectifs en termes d'évaluation de ceux en termes de recherche de cohérences.

Puis, nous réalisons une analyse spécifique a priori en fonction des objectifs spécifiques visés par la (ou les) tâche(s) diagnostic. Précisons ce que nous entendons ici par analyse a priori. Les tâches diagnostic ont été conçues pour discriminer de façon pertinente et significative quant au diagnostic, différentes solutions prévisibles liées aux spécificités des tâches, en liaison avec l'enseignement reçu préalablement. L'analyse a priori a pour objectif de les prévoir. Dans le chapitre 3, nous avons montré le rôle essentiel de la structure d'analyse pour rendre compte des comportements non attendus et pour définir les valeurs locales des critères.

Or, l'analyse a priori ne permet pas de prévoir certaines solutions liées au fonctionnement personnel des élèves, à leur rapport personnel à l'algèbre. Dans ce but, nous terminons par une analyse a posteriori. Nous essayons de montrer que l'analyse a priori n'est pas trop perturbée et permet de décrire des comportements d'élèves non prévus à condition de spécifier plus finement certaines valeurs des critères.

II LES EXERCICES "TECHNIQUES"

II.1 OBJECTIFS GÉNÉRAUX ATTRIBUÉS À CETTE CLASSE DE TÂCHES DIAGNOSTIC.

• *Objectifs d'évaluation à l'entrée en Première G* :

Nous déterminons si les élèves réussissent à mettre en œuvre correctement des savoirs et savoir-faire de base tant numériques que formels, c'est-à-dire des procédures de calcul numérique et de manipulation formelle attendues à l'entrée en Première G. Ici, ce sont les capacités techniques d'ordre syntaxique et algorithmique qui sont surtout évaluées. Pour la tâche T7 question 5, nous évaluons aussi des capacités d'ordre stratégique.

Ces exercices mettent donc essentiellement en jeu, les deux premiers types de traitement algébrique : *reproduction de tâches d'ordre numérique*, *reproduction de tâches algébriques non finalisées* mettant en jeu *des savoir-faire algorithmiques.*

• *Objectifs en termes de recherche de cohérences* :

Nous mettons essentiellement en rapport la manipulation formelle et la gestion syntaxique des écritures algébriques. Ce sont les critères *type de formation et type de traitement* de la composante *gestion dans le registre algébrique* qui permettent cette mise en relation. Plus précisément, nous cherchons à définir des règles de formation, des règles de traitement du registre algébrique (voire des règles de conversion entre les registres algébrique et numérique) utilisées par les élèves. Par recoupement, nous pouvons mettre en évidence des régularités dans la construction et la gestion des expressions numériques et algébriques utilisées dans un contexte d'application de savoir-faire calculatoires et formels. Nous définirons dans le chapitre 6 des *catégories décrivant des cohérences de fonctionnement tant en ce qui concerne la production des expressions que leur manipulation formelle.*

II.2 LES TÂCHES DIAGNOSTIC

Les exercices retenus couvrent l'ensemble des traitements numériques et algébriques retenus : comparaison de nombres exprimés dans différents registres, calculs numériques après substitution de lettres par des nombres, développement d'une expression algébrique, factorisation d'une expression algébrique, résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, résolution d'une équation du second degré se ramenant au premier degré.

Nous avons été très vigilante sur la présence de plusieurs registres d'écriture de nombres. Cela rend possible l'étude de la familiarisation des élèves avec les différents types d'écriture de nombres et leur articulation. Nous pouvons ainsi étudier les règles de formation ou les règles de conversion utilisées et leur rôle dans la gestion et le contrôle de calculs simples.

II.3. LES TÂCHES 1 ET 2

II.3.1 Enoncés

Numéro	Enoncé
T1	**Classer du plus petit au plus grand** $-5{,}67$; 13.10^2; $4{,}009$; $56{,}71.10^{-1}$; $4{,}09$; $0{,}67.10^3$; $4{,}1$; $7/2+7/3$ **Indiquer vos calculs intermédiaires.**
T2	**Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires:** $C = \sqrt{a^2+b^2}$ avec a=-3 b=4 $P = u + {}^n u$ avec u=150 u=6 $V = (-t^2+4x)^3$ avec t=3 x=2

II.3.2 Analyse des tâches diagnostic

• *Situation*

T1 consiste à classer des nombres écrits sous forme décimale, fractionnaire ou avec puissances de dix. T2 consiste à faire des applications numériques dans des formules.

Les savoir-faire et connaissances mathématiques visés ont été appris en troisième, approfondis en seconde et font aussi partie du programme de BEP. Les élèves doivent maîtriser, à l'issue du BEP plusieurs formes d'écriture des nombres, en particulier l'écriture d'un nombre en notation scientifique, et avoir une bonne familiarité avec les calculs numériques (cf programme de seconde et de BEP). La résolution de nombreux exercices en classe de Première G (en particulier calcul de l'image d'un nombre par une fonction) en nécessite la maîtrise.

Avant d'étudier la compétence des élèves en algèbre élémentaire, il nous semble indispensable de vérifier, au préalable, s'il manipulent correctement les nombres écrits sous diverses formes, l'ordre sur ces nombres et s'ils ont une certaine familiarité avec des calculs numériques simples.

• *Objectifs spécifiques attribués à ces tâches*

Nous cherchons à déterminer :

- les règles de conversion utilisées par les élèves pour passer d'un registre d'écriture à un autre ; T1 (respectivement T2) met en jeu le registre des écritures décimales et celui des écritures numériques avec puissance de dix (respectivement le registre des écritures algébriques et celui des écritures numériques parenthésées) ;
- les procédures de calcul utilisées pour effectuer le traitement demandé.

• *Grille descriptive de la tâche T1*:

Voici les critères et valeurs qui caractérisent la tâche et des solutions attendues :

Composantes d'analyse	**Critères**	**Valeurs**
Traitement algébrique	*Réalisation d'une tâche d'ordre numérique*	Réécrire un nombre avec une écriture décimale ou une écriture avec puissances de dix Comparer deux nombres écrits sous la même forme
Articulation entre registre algébrique et registres numériques	Registres	Registre des écritures décimales, des écritures fractionnaires Registre des écritures avec puissances de dix Registre d'affichage de la calculatrice*[1]
	Type de conversion	$R_{nf \to nd}$[2] $R_{np \to nd}$ $R_{np \to calculatrice}$
Gestion du registre algébrique	Type de traitement	$RT_{comparaison}$

Tableau n° 8 : Grille descriptive de la tâche T1

• *Grille descriptive de la tâche T2* :

[1]Suivant la résolution proposée par les élèves, la variable correspondante sera mise en jeu ou non

[2]Nous rappelons que la signification des codes relatifs aux règles de formation dans le registre des écritures numériques :
Rner: registre des écritures des nombres relatifs, *Rnd* : registre des écritures des nombres décimaux, *Rnp* : registre des écritures numériques avec puissance de dix, *Rnf* : registre des écritures fractionnaires, *Rni* : registre des écritures des nombres irrationnels.

Composantes d'analyse	Critères	Valeurs
Traitement algébrique	Reproduire des tâches algébriques non finalisées de niveau 1	Substituer des nombres dans une formule Calculer une somme de carrés, le cube d'une somme de relatifs
Articulation entre registre algébrique et registres numériques	Registres Type de conversion	Registre des écritures alg. Registre des écritures numériques *Ralgèbre—>écritures numériques parenthésées*
Gestion du registre algébrique	Type de traitement	dans registres numériques: *Rner, Rnf, Rnp, Rni*

Tableau n° 9 : Grille descriptive de la tâche T2

II.3.3 Analyse des solutions envisageables

Tâche T1 :

• *Analyse a priori*

Elle est organisée autour de l'étude des règles de conversion et de traitement.

Règles de conversion :

Nous relevons trois causes d'erreurs liées à l'identification de l'écriture d'un nombre avec puissances de dix :

- forme d'écriture non reconnue qui entraîne une lecture du point comme :
  * séparateur de nombres codée "point séparateur de nombres"
  * point décimal
- conversion de 10^n ou de 10^{-n} codée "conversion incorrecte puissance de dix/décimal" incorrecte
  10^{-n} interprété comme 0,0...1 avec n-1 chiffres décimaux
  10^n interprété comme 10...0 avec n+1 zéros
- conversion incorrecte de 10^{-n} interprété comme - 0,0...1 avec n chiffres décimaux codée "puissance d'exposant négatif négative"

Règles de traitement :

Les causes d'erreurs liées à l'utilisation de règles incorrectes portent sur les fractions et les décimaux :

- règles de calcul sur les fractions, par exemple :
  a /b + a / c —> a / (b+c) codée "addition fraction dénominateur"
  a /b + a / c —> 2a / (b+c) codée "addition fraction numérateur et dénominateur"
  a /b + c/ d —> a / (b+c)d codée "calcul de gauche à droite"

- règles de comparaison des décimaux :
  4,1 < 4,09 < 4,009 codée "ordre incorrect sur décimaux"

- "confusion entre valeur exacte" et valeur approchée d'un nombre.
Nous avons retrouvé cette erreur a posteriori.

• *Analyse a posteriori*

1) Nous retrouvons les règles de conversion et les règles de traitement envisagées a priori.

2) Mais nous voyons apparaître d'autres règles de conversion incorrectes mises en œuvre par les élèves :

- la "confusion entre les puissances de dix d'exposant négatif et celles d'exposant positif".

- a/b réécrit a,b avec a et b entiers, le signe / de fraction étant assimilé à la virgule décimale étiquetée "confusion écriture fractionnaire et décimale"
- "traduction calculatrice" de l'écriture avec puissances de dix d'un nombre : des élèves complètement démunis devant cette écriture d'un nombre ont utilisé la calculatrice d'une façon inattendue et non anecdotique : $56{,}71.10^{-1}$ est identifié à $(56{,}7110)^{-1}$ qui vaut 0,017[3].

En conséquence, nous en déduisons la grille d'analyse suivante pour la tâche T1 :

	Val. globales	**Valeurs locales**
Type de conversion	Correct	
	Identifiable	Confusion écriture fractionnaire et décimale Conversion puissance de dix/décimal incorrecte Puissance d'exposant négatif négative Confusion puissance de dix d'exposant positif/négatif Point séparateur de nombres Traduction calculatrice
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	
	Identifiable	Calcul de gauche à droite ($a/b + a/c \longrightarrow a/(b+c)/d$ Addition fraction dénominateur Addition fraction numérateur et dénominateur Ordre incorrect sur décimaux Confusion valeurs exacte et approchée
	Non Identifiable	

Tableau n° 10 : Grille d'analyse de la tâche T1

Tâche T2 :

• *Analyse a priori*

Lorsqu'on substitue des nombres aux lettres, l'utilisation de règles de conversion incorrectes pour passer du registre algébrique au registre numérique peut induire des calculs incorrects. Comme dans l'exercice précédent, nous organisons l'analyse autour de l'étude des règles de conversion et de traitement.

Règles de conversion :

Elles ont déjà été rencontrées pour les tâches 3 et 4 du test de 1991-1992 (cf chapitre 3) et sont liées au rôle des signes (), exposant n avec n=2 ou 3, '.' :

- non compréhension du rôle joué par les parenthèses pour différencier l'écriture du carré d'un nombre de celle de l'opposé du carré du nombre en distinguant deux cas :

  a^2 pour a=-3 s'écrit -3^2 soit 9 ; cette règle est codée "sans () et priorité au carré"

  a^2 pour a=-3 s'écrit -3^2 soit -9 ; cette règle est codée "sans () et priorité au -"

3La calculatrice permet d'afficher une écriture décimale d'un nombre écrit à partir d'une puissance et devient un moyen d'action pour attribuer une signification même incorrecte à une écriture. Pour afficher une écriture décimale des nombres $56{,}71.10^{-1}$, 13.10^2 et $0{,}67.10^3$, certains élèves ont tapé successivement tous les signes présents dans les écritures sans tenir compte des puissances de dix, l'écriture scientifique n'étant pas reconnue, les exposants étant rentrés avec l'opérateur puissance. L'affichage obtenu pour $56{,}71.10^{-1}$ correspond à la valeur de $(56{,}7110)^{-1}$ soit 0,017. Le deuxième point décimal tapé n'a pas provoqué d'erreur. L'affichage obtenu pour 13.10^2 correspond à $(13{,}10)^2$ soit 171,61. Avouons que nous avons mis beaucoup de temps à comprendre ces solutions !

- utilisation d'une règle de "glissement sur les puissances" que nous retrouvons dans de nombreux exercices : sous forme littérale, a^n est réécrit n.a avec a entier et n=3.

- conversion incorrecte de l'écriture multiplicative n.u, le signe x n'apparaissant pas ici contrairement aux écritures numériques en considérant deux cas :

le point est considéré comme le "point décimal"

le point est confondu avec l'opérateur d'addition, règle étiquetée "désassemblage"

Règles de calcul incorrectes :

Elles sont liées au calcul du cube d'une somme de deux nombres, de la racine carrée de la somme des carrés de deux nombres, du produit d'une nombre par une fraction. Nous ne recherchons pas l'exhaustivité mais les principaux types d'erreurs qui distinguent les modes de fonctionnement. Nous recherchons en particulier si les règles utilisées respectent les priorités opératoires, s'il est possible de les rapprocher de règles incorrectes liées à la pratique du calcul littéral. Nous définissons les règles suivantes :

Règles incorrectes d'"addition de nombres relatifs"

"Racine carrée d'un nombre négatif"

u + t.v transformé en (u+t)v, règle codée "calcul de gauche à droite"

$\sqrt{a^2+b^2}$ transformé en $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$ règle codée "fausse linéarité de $\sqrt{}$"

(a+b)3 transformé en a^3+b^3, règle codée "fausse linéarité de puissance 3"

$a.\frac{b}{c}$ transformé en $\frac{ab}{ac}$ étiquetée "produit nombre par fraction au numérateur et dénominateur"

• *Analyse a posteriori* :

1) L'analyse permet de retrouver les mêmes règles de conversion et d'en préciser l'usage lié à deux types de difficultés :

- Le rôle incorrect attribué aux parenthèses dans l'écriture d'une expression numérique n'est pas stable. Il peut dépendre du contexte du calcul (ici substitution de lettres par des nombres), de la mémoire conservée par l'élève de l'enchaînement opératoire indépendamment de l'écriture numérique.

Donnons un exemple : pour un même élève, -3^2 peut prendre, dans un système non parenthésé, les valeurs 9 ou -9 selon le contexte, calcul de a^2 pour $a = -3$ et calcul de $-3t^2$ pour $a = 3$.

2) L'analyse des productions des élèves montre un manque évident de familiarité, de technicité et d'automatisme avec des calculs même très simples chez un grand nombre d'entre eux, ce qui peut constituer un gros handicap. Il est assez fréquent de trouver des calculs numériques s'appuyant sur une lecture arithmétique de gauche à droite de l'expression numérique. Présentons deux types de traitement non envisagés dans l'analyse a priori :

- une règle de calcul incorrecte sur les fractions. Il s'agit de la règle transformant

$\frac{a}{b} \times c$ transformé en $\frac{a}{bc}$ étiquetée "produit nombre par fraction en croix"

- la confusion racine carrée et carré d'un nombre.

En résumé, les valeurs globales et locales des critères *type de conversion* et *type de traitement* permettent de définir la grille d'analyse des productions associée à T2.

Critères	**Val. globales**	**Valeurs locales**
Type de conversion	Correct	
	Identifiable	Sans () et priorité au carré Sans () et priorité au - Point addition ou désassemblage($ab \longrightarrow a+b$) Point coefficient 2/carré ($a.2 \longrightarrow a^2$) Puissance n glissement, n=2 ou n=3
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	
	Identifiable	Addition incorrecte des relatifs Confusion racine carrée et carré Racine carrée d'un nombre négatif Calcul de gauche à droite Fausse linéarité de racine carrée Fausse linéarité de puissance Produit nombre par fraction num/dén Produit des fractions en croix
	Non identifiable	

Tableau n° 11 : Grille d'analyse de la tâche T2

II.4 LES TÂCHES DIAGNOSTIC 5 ET 7

Nous proposons ces deux exercices simples de calcul algébrique pour évaluer le niveau de manipulation formelle des élèves. Les élèves doivent avoir consolidé en BEP les savoir-faire de base de calcul algébrique enseignés en classe de troisième. La résolution de nombreux exercices en classe de Première G nécessite la disponibilité de ces savoir-faire et leur maîtrise correcte.

II.4.1 Enoncés

Tâche	Enoncé
T5	Développer et réduire $(a - b)(b - 2)-(b - 2)(2 - a)+(a - b)(a + b)$
T7	1) Le développement de $(9-x)^2$ est $81 - x^2$ $81 - 18x + x^2$ $81 - 18x - x^2$ $81 - 9x + x^2$ 2) L'expression $(x+1)(x+2) - 5(x+2)$ a pour forme factorisée $x^2 - 2x - 8$ $(x+2) + (x-4)$ $(x+2)(x-4)$ $(x+2)(-5x-5)$ 3) L'équation $4x = 3(10-x)$ a pour solution 23 6 30/7 -30/7 4) L'équation $(3-2x)(x-2) = 0$ a pour solution(s) 2/3 et 2 2 3/2 et 2 5/3 5) L'équation $(x+1)(x-3) = -3$ a pour solution (s) -1 et 3 -4 et 0 0 et 2 0 et 1

II.4.2 Analyse des tâches

Ces deux exercices mettent en jeu le registre des écritures algébriques de une ou de deux variables.

T7 est un Q.C.M à choix multiple, chaque réponse proposée correspondant à la solution ou à une solution erronée cataloguée. Cette forme d'exercice permet de limiter le nombre de valeurs locales des critères. Pour les questions 3, 4 et 5, cette forme peut inciter les élèves à vérifier que les nombres proposés vérifient l'égalité donnée[4]. Dans ce cas, cette démarche nécessite l'articulation du registre des écritures algébriques vers le registre numérique.

• *Objectifs spécifiques d'analyse*

Deux objectifs essentiels sont visés dans ces deux tâches dans le cas d'une solution incorrecte :

• déterminer les principaux types de traitement incorrects utilisés par les élèves dans la manipulation formelle,

• définir les règles de formation incorrectes dans le registre des écritures algébriques mises en œuvre par les élèves pendant les calculs et les mettre en relation avec les types de traitement.

• *Grille descriptive de la tâche T5*

Ce tableau résume les composantes d'analyse, critères et valeurs mis en jeu dans T5 :

4Cette démarche de résolution, liée à une conception plutôt structurale, est l'une des deux solutions attendues.

Composantes	Critères	Valeurs
Traitement algébrique	Reproduction de tâches non finalisées de niveau 1	Développement d'une expression algébrique
Gestion dans le registre algébrique	Type de formation Type de traitement	$RF(\{a,b\},-,+,x,^2())$ $RT_{développement}$

Tableau n° 12 : Grille descriptive de la tâche T5

• *Grille descriptive de la tâche T7*

De même, tableau résume les composantes d'analyse, critères et valeurs mis en jeu dans T7 en liaison avec les solutions attendues :

Composantes	Critères	Valeurs
Traitement algébrique	Reproduction de tâches non finalisées de niveau 1	Substitution lettres/nombres q3,4,5* Manipulation formelle : - Développement d'une exp. algébrique q1 - factorisation d'une exp.alg.q2 - Résolution d'une équation 1er degré (q3) - Résolution d'une équation 2nd degré se ramenant à une équation 1er degré (q4)
	Reproduction de tâches non finalisées niveau2	idem (q5)
Gestion dans le registre algébrique	Registres	Registre des expressions algébriques Registre des écritures numériques parenthésées*5
	Type de formation	$RF(\{x\},-,+,x,^2())$
	Type de traitement	$RT_{développement}$ $RT_{factorisation}$ $RT_{équations\ 1er\ degré}$

Tableau n° 13 : Grille descriptive de la tâche T7

II.4.3 Analyse des solutions envisageables

Tâche T5 :

Analyse a priori

Cet exercice a été légèrement modifié par rapport à celui du premier test. Nous voulions aussi tester les règles de transformation appliquées lors de la suppression d'une parenthèse précédée du signe -. Nous organisons l'analyse comme les exercices précédents.

5Suivant la solution proposée par les élèves, le registre indiqué par un astérisque sera mis en jeu ou non.

Règles de formation :

Les élèves n'ont pas l'habitude de manipuler des expressions de deux variables et peuvent laisser apparaître des pratiques non visibles habituellement, en particulier l'utilisation de règles de formation incorrectes. Rappelons que les règles de formation mises en évidence par l'analyse précédente s'appuient sur le rôle des signes +, '.' , exposant ^{n} :

- la non application de la commutativité d'un produit,
- la règle de désassemblage, la règle du carré glissement qui conduisent à une manipulation pseudo-opératoire (cf chapitre 3).

Règles de transformation :

Les savoir-faire mobilisables sont ceux utilisés dans le développement d'une expression algébrique, c'est-à-dire, reconnaissance de blocs (ou d'expressions bien formées), distributivité de la multiplication par rapport aux opérations additives, développement de l'identité remarquable (a+b)(a-b). Indiquons et étiquetons les principales règles de transformation erronées que l'on peut envisager selon le niveau de manipulation formelle. Pour ceci, nous mettons en relation les règles de transformation et le rôle attribué aux signes opératoires, à l'exposant 2 ou 3, aux () (cf chapitre3) et tenons compte des types de manipulation formelle définis dans le chapitre 3.

• *Opératoire correct*:
Pour rendre compte de la nom familiarité des élèves avec le calcul algébrique, nous envisageons les deux types de traitement correct :
- technique de niveau 0 : les identités remarquables ne sont pas appliquées directement mais sont développées,
- technique de niveau 1 : les formules connues sont directement appliquées.

• *Opératoire incorrect* :
"différence/somme de deux carrés" : $(a-b)(a+b) \longrightarrow a^2+b^2$

"- non distribué" : suite à la modification de l'exercice, nous devons voir apparaître une transformation incorrecte prévisible : le signe - opère sur le premier terme de l'expression développée et non sur l'expression entière. On peut décrire ce traitement erroné par la règle littérale suivante :
-(a+b)(c-d) —> - ac-ad+bc-bd. Le développement peut être effectué en une ou deux étapes.

"erreur développement () et signe -" : une erreur de signe apparaît pendant le développement d'un produit de facteurs mettant en jeu un signe -.

"erreur de calcul" : une erreur de calcul est faite pendant la réduction de l'expression.

• *Pseudo-opératoire :*
"regroupement assemblage final" : après avoir appliqué la règle de distributivité, l'élève assemble deux termes à partir d'une règle de formation du type "$a+b$ se réécrit ab" ou bien a^n+a^p se réécrit a^{n+p}. Cette règle sera traitée comme une règle de formation par analogie avec la règle d'assemblage final.

• *Non opératoire* :
"regroupement des termes" : les termes sont regroupés incorrectement sans tenir compte des priorités opératoires sur les expressions bien formées initiales

Analyse a posteriori :

Nous retrouvons bien les règles de formation et de traitement envisagées, en particulier celles liées au changement d'énoncé. L'analyse a posteriori a permis de conforter un point important : des élèves peu familiarisés avec le calcul algébrique, ayant une faible habileté à manipuler les transformations algébriques, éprouvent le besoin de redémontrer par le calcul des formules telles les identités remarquables plutôt que de les appliquer directement. Ce détour leur sert de moyen de contrôle. Nous utilisons donc les valeurs locales du critère type de traitement définies lors du premier test lorsque le traitement formel est correct.

En conséquence, la grille d'analyse associée à la tâche 5 est constituée des critères et valeurs globales et locales suivants :

Critères	**Val. globales**	**Valeurs locales**
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Sans () Sans commutativité Carré glissement Assemblage (réduction/assemblage de monômes) Désassemblage
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	Technique de niveau 0 Technique de niveau 1
	(Op. incorrect) Identifiable (Non op.)	- non distribué Erreur de calcul Erreur développement, () et signe - Différence/somme de deux carrés Regroupement de termes
	Non identifiable	

Tableau n° 14 : Grille d'analyse de la tâche T5

Tâche T7 :

• *Analyse a priori*

Les solutions proposées dans ces Q.C.M correspondent à des erreurs attendues cataloguées. Nous indiquons les règles de formation et de traitement erronées que nous voulons mettre en évidence. Ils constituent les valeurs locales attribuées respectivement au critère *type de formation* et *type de traitement.*

Questions 1 et 2 :

T7.1 consiste à développer une expression algébrique par application directe d'une identité remarquable. T7.2 consiste à factoriser une expression algébrique par mise en facteur d'un facteur commun évident. Ces deux tâches ne présentent pas de difficultés vu les capacités exigibles en fin de BEP.

Question 1 :

- la solution $81-x^2$, codée "fausse linéarité du carré" correspond au développement incorrect de l'expression $(a-b)^2$ en a^2-b^2 pour $a = 9$ et $b = x$;
- la solution $81-18x-x^2$, étiquetée "développement mixte", correspond au développement incorrect de l'expression $(a-b)^2$ en $a^2-2a.b-b^2$ pour $a = 9$ et $b = x$;
- la solution $81-9x-x^2$, étiquetée "simple produit", correspond au développement incorrect de l'expression $(a-b)^2$ en $a^2-a.b-b^2$ pour $a = 9$ et $b = x$;

Question 2 :

- la solution x^2-2x-8, codée "confusion entre développement" et factorisation est liée à une confusion entre les deux termes développement et factorisation ;
- la solution $(x+2)+(x-4)$, étiquetée "réduction additive", renvoie à l'utilisation de la règle de formation "assemblage" ;
- la solution $(x+2)(-5x-5)$, étiquetée "réduction multiplicative" renvoie à une réécriture et à un calcul dans un système non parenthésé, -5 étant considéré comme un facteur multiplicatif ;

Questions 3 et 4 :

Ces exercices proposent la résolution d'équations simples du premier degré ou du second degré se ramenant au premier degré.

Question 3 :

Pseudo-opératoire :

- pour 23 : cette solution, étiquetée "règle de transposition additive", est obtenue en résolvant l'équation $ax=b$ par transposition de a dans le deuxième membre en changeant de signe, c'est-à-dire, $x=b-a$

Opératoire incorrect :

- pour 6 : cette solution, étiquetée "erreur de calcul" est obtenue en développant l'expression qui constitue le deuxième membre ; $4x = 30-x$ d'où $5x = 30$ c'est-à-dire soit $x = 6$.
- pour -30/7 : cette solution est obtenue en résolvant l'équation $ax = b$ par transposition ou division par $-a$, c'est-à-dire, $x = b/(-a)$; cette solution est codée "règle de transposition multiplicative".

Question 4 :

Opératoire incorrect :

- pour 2/3 et 2 : cette solution est codée "règle d'inversion" ; la propriété du produit nul est appliquée correctement, mais l'équation $ax = b$ a pour solution $x=a/b$, vu que l'inconnue est située dans le deuxième membre.

Pseudo-opératoire :

- pour 2 : cette solution est codée "carré glissement vers premier degré"; une règle de formation de type "carré glissement" ou "carré duplication" est utilisée pour se ramener à la résolution du premier degré. Par exemple, après développement, l'équation initiale est équivalente à l'équation du second degré $-2x^2 - 6 + 7x = 0$; après l'utilisation de la règle de formation "carré glissement" l'équation devient l'équation du premier degré $-4x+7x= 6$.
- pour 5/3 : cette solution est codée "différence vers 1er degré" c'est-à-dire que résoudre l'équation $(3-2x)(x-2) = 0$ devient résoudre l'équation du premier degré $(3-2x)-(x-2) = 0$

Question 5 :

- pour -1 et 3 : cette solution est codée "comme produit nul" car la résolution se ramène à un produit de facteurs nuls.

- pour -4 et 0 : cette solution est codée "produit constant" car la propriété si AB est nul alors $A=0$ ou $B=0$ est remplacée par *si* AB est égal à c alors $A=c$ *ou* $B=c$
- pour 0 et 2 : correct.

Analyse a posteriori

Elle montre aussi le manque de familiarité des élèves dans le traitement des identités remarquables. Ce détour leur sert de moyen de contrôle

Le croisement des tâches T5, T7 question 1 et question 2 avec les exercices de reconnaissance T3, T4, T15 permet de mettre en évidence des régularités dans les systèmes d'écritures algébriques utilisés.

Récapitulons les valeurs globales et locales des critères mis en jeu dans les tâches T7.

Questions 1 et 2 :

Critères	Val. globales	Valeurs locales
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Confusion développement/factorisation Sans ()
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	Technique de niveau 0 Technique de niveau 1
	Identifiable	Fausse linéarité du carré Développement mixte Simple produit Réduction additive "$a.b-a.c \longrightarrow a+(b-c)$" Réd. multiplicative "$a.b-a.c \longrightarrow a.(b(-c))$"

Tableau n° 15 : Grille d'analyse de la tâche T7.1,2

Questions 3, 4 et 5 :

Critères	Val globales	Valeurs locales
Type de formation	Correct	
	Identifiable	^{2}duplication Sans () Assemblage
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	Par transformation Par substitution
	Identifiable	Règle de transp additive ($ax=b \longrightarrow x=b-a$) Règle de transp mult. ($ax=b \longrightarrow x=b/(-a)$) Règle d'inversion ($ax=b \longrightarrow x=a/b$) Différence vers 1er degré ($ab=0 \longrightarrow a-b=0$) Erreur de calcul Carré glissement vers 1er degré Comme produit nul Produit constant

Tableau n° 15 bis : Grille d'analyse de la tâche T7.3,4,5

III LES EXERCICES DE "RECONNAISSANCE"

III.1 OBJECTIFS GÉNÉRAUX ATTRIBUÉS À CETTE CLASSE DE TÂCHES DIAGNOSTIC.

• *Objectifs d'évaluation à l'entrée en Première G* :

Nous déterminons si les élèves identifient et interprètent correctement ou non des expressions algébriques dans le registre algébrique ou en liaison avec d'autres registres. Ce sont des capacités interprétatives d'ordre syntaxique et sémantique qui sont évaluées (cf chapitre III, paragraphe II.1.5).

Ces exercices mettent donc essentiellement en jeu le type de traitement algébrique *interprétation des expressions algébriques en liaison avec un cadre ou un contexte.*

• *Objectifs en termes de recherche de cohérences*

Nous voulons mettre en évidence les éléments sur lesquels s'appuie l'activité interprétative des élèves. De l'étude bibliographique, nous avons retenu le rôle crucial de l'activité d'interprétation dans la résolution des problèmes algébriques, mais aussi sa dépendance étroite des systèmes sémiotiques construits. Elle permet à l'élève d'élaborer les éléments indispensables pour concevoir, anticiper et contrôler les différentes étapes d'une résolution non indiquées explicitement, en particulier pour nommer les objets mobilisés et pour transformer les expressions.

Nous voulons identifier :

• les règles de formation utilisées par les élèves dans le registre algébrique,

• les règles de conversion du registre algébrique vers d'autres registres (registre du langage naturel, registre des représentations graphiques, registre des figures) mobilisés pour associer deux représentations d'un même objet,

• les moyens techniques privilégiés pour justifier les réponses.

Nous pourrons ainsi par recoupement, si c'est possible, mettre en évidence des systèmes de représentation construits par les élèves et déterminer le degré de mobilité de l'activité mise en jeu pour articuler différents registres ou cadres.

III.2. LES TÂCHES DIAGNOSTIC

Les exercices proposés ne sont pas habituels et ne correspondent pas à une pratique mathématique usuelle, que ce soit au collège, en BEP ou au lycée. Les exercices retenus sont complémentaires par la diversité des registres mis en jeu dans les tâches et par la diversité des types de tâche proposés : recherche de validité d'une égalité, analyse critique d'une situation, association entre diverses représentations dans des registres de représentation distincts. Cela rend possible l'étude de la mobilité des élèves à articuler différents registres.

Précisons que nous avons accès aux règles de formation et de conversion construits par les élèves de *façon indirecte.* Les solutions permettent aussi d'obtenir d'autres informations pertinentes concernant l'activité interprétative mise en jeu par les élèves telles que

- le statut des lettres et des expressions, le statut du signe d'égalité,
- des éléments sur lesquels les élèves s'appuient pour prouver des assertions fausses, par exemple, l'articulation du cadre algébrique vers le cadre numérique pour calculer des valeurs numériques d'expressions algébriques, le *sens* des expressions algébriques dans l'acception de J.P. Drouhard,
- des éléments pour mettre en lumière des raisons pour lesquelles des contradictions mathématiques ne sont pas détectables par certains élèves.

III.3 LES TÂCHES T3, T4, T6 ET T15

III.3.1 Enoncés

Tâche T3 :

Est-il exact que :

Justifiez votre réponse

$-9^2 = -81$		
$(-9)^2 = -81$		
$-9^2 = 81$		
$(-9)^2 = 81$		

Tâche T4 :

Pour tout réel a, les égalités suivantes sont-elles vraies ?

Vrai/Faux **Si Faux, justifiez votre réponse**

$a^2 = a.a$		
$a^2 = 2a$		
$a^2 = a2$		
$a^2 = a+a$		
$a^2 = a\text{x}a$		

Tâche T6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	**Si Faux, dire pourquoi**
$x^2x^3 = x^5$		
$x^2x^3 = x^6$		
$x^2+x^3 = x^5$		
$4x^2+3x^3 = 7x^5$		
$2x^2 = (2x)^2$		
$(x^2)^3 = x^6$		
$(x^2)^3 = x^5$		

Tâche 15

Indiquer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

	Vrai/Faux	**Si Faux, dire pourquoi**
$3+\mathrm{m} = 3m$		
$ab = a+b$		
$b-2\times c = (b-2)c$		
$3+2m = 5m$		

III.3.2 Analyse des tâches

• *Situation*

Ces exercices consistent à rechercher si les égalités portant sur des expressions numériques ou algébriques de complexité diverse sont vraies ou fausses. La tâche T3 met en jeu le registre numérique, les tâches T4, T5 et T15, le registre des expressions algébriques.

On demande uniquement aux élèves de justifier les égalités fausses. Dans le cas des tâches T4, T5 et T15, pour prouver qu'une égalité est fausse, il suffit de donner un contre-exemple. Cette démarche nécessite d'associer à une expression algébrique des valeurs numériques et met en jeu l'articulation du cadre algébrique vers le cadre numérique. On attend en priorité ce type de justification.

Nous le demandions explicitement pour la tâche T4 en 1991-1992. Nous avons supprimé cette question ainsi que le modèle donné en 1992-1993 : nous risquons de perdre des informations, telles que les validations au contrat, mais nous pensons en obtenir d'autres, les élèves n'étant plus influencés par un modèle.

Ces quatre tâches sont des Q.C.M à choix multiple et chaque réponse proposée correspond à un comportement correct ou à des comportements erronés catalogués.

• *Objectifs spécifiques attribués à ces tâches*

Deux objectifs essentiels sont visés :

- rechercher les règles de formation dans les registres concernés sur lesquels s'appuient les interprétations réalisées par les élèves, et plus particulièrement, le *rôle attribué aux quatre signes* , le point '.', les symboles + et x et aux exposants (ici 2 et 3) et aux *parenthèses*,

- déterminer les moyens techniques utilisés pour justifier qu'une égalité est fausse.

<u>pour les tâches T4, T6 et T15</u>

De plus, pour ces tâches, le contexte de validation permet de :

- déterminer si le système des écritures algébriques permet d'attribuer une valeur correcte (leur dénotation) aux expressions algébriques mises en jeu dans les égalités[6],

- mettre en relation la recherche de la valeur de vérité avec les conceptions que les élèves se font du signe d'égalité et des lettres.

• *Grille descriptive associée à ces tâches*

Composantes d'analyse	**Critères**	**Valeurs**
Traitement algébrique	Tâche d'ordre numérique Interprétation d'une expression algébrique	Substitution d'une lettre par un nombre* Oui
Rapport arithmétique/algèbre (T4, T6, T15)	Statut du signe d'égalité Statut des lettres	Relation d'équivalence Annonce de résultat Nombres généralisés
Gestion dans registre algébrique	Registres Type de formation Type de traitement (T6, T15)	T3 :Registre numérique T4, T6, T15: Registre algébrique T3 : Rn T4, T6, T15:$RF_{(\{a,...\},-,+,x,^{n}())}$ $RT_{puissances}$ $RT_{développement}$
Articulation entre registre algébrique et le registre des écritures numériques	Type de conversion*	T4, T6, T15: $R_{alg \longrightarrow > écr.\ num.}$
Rationalité algébrique	Type de justification	T3 : différents moyens techniques T4, T6, T15:Contre-exemple

Tableau n° 16 : Grille descriptive des tâches T3, T4, T6 et T15

III.3.3 Analyse des solutions envisageables

<u>Tâches T3 et T4</u> :

6Dans le cas d'un système incorrect, nous pouvons vérifier si les transformations utilisées sont compatibles et donnent des résultats non contradictoires.

Ces deux tâches ont été analysées dans le chapitre 3, II.2.1 et II.2.2. Nous confrontons, globalement pour ces deux tâches, les analyses a priori et a posteriori concernant les types de justification puis des règles de formation envisageables. Nous concluons par leurs grilles d'analyse respectives.

Les types de justification

• *Analyse a priori*

Suite à la première expérimentation, nous avons supprimé l'exemple de réponse. Il gênait l'accès aux types de justification personnels utilisés par chaque élève et pouvait pousser certains à donner une réponse au contrat.

A priori, pour ces deux tâches, en dehors du contre-exemple, nous envisageons les moyens suivants pour justifier les égalités fausses (il en est de même pour les tâches T6 et T15) :

- proposer une réécriture des expressions algébriques puis les comparer. La réécriture demande une certaine confiance avec le langage symbolique. Cette démarche mobilise l'application de transformations dans le registre des écritures algébriques. Les règles de formation utilisées dans la réécriture peuvent être correctes ou non ;

- proposer une justification en termes de conformité à des propriétés, à des règles opératoires énoncées. Cette démarche permet à l'élève d'appliquer des règles étudiées en cours sans avoir à manipuler effectivement des écritures algébriques ;

- proposer une justification en termes de conformité à des règles au niveau de la forme. Ces règles portent sur le rôle de certains signes, notamment sur les parenthèses, et sont énoncées en langage naturel. Ces règles "maison" ne font pas partie du corpus enseigné. On peut citer, par exemple, la phrase justificative "les parenthèses n'interviennent pas dans le résultat" ;

- proposer une justification par appel à des règles liées au légal comme "le coefficient doit être avant la lettre" ;

- proposer une justification au contrat. L'expérimentation précédente (cf chapitre 3) a montré que des élèves "recopiaient" le modèle pour donner un contre-exemple, sans en comprendre la signification.

Ces six types de justification correspondent aux valeurs globales du critère *type de justification*. Pour la tâche T4, la confrontation des règles de formation et des différents types de justification permet de déterminer, lorsque c'est possible, le statut du signe d'égalité, des lettres et des expressions algébriques.

Analyse a posteriori

1) L'analyse a posteriori a confirmé les comportements envisagés a priori. Nous avons trouvé un autre moyen de justification faisant appel au numérique par l'intermédiaire de l'emploi de la calculatrice.

L'analyse des productions a permis de constituer une liste de justifications prototypiques correspondant à chaque type de justification envisagé préalablement. Nous les donnons dans les grilles d'analyse attachées à chaque tâche. Elles constituent les valeurs locales du critère *type de justification.*

2) Contrairement à la première expérimentation, nous n'avons pas retrouvé des justifications de type "contrat", l'exemple de réponse ayant été supprimé. En revanche pour la tâche T4, nous trouvons un autre moyen technique de justification : la "calculatrice" qui permet de calculer les valeurs des expressions pour des valeurs données.

Mettons en évidence une difficulté et le rôle essentiel joué par la structure d'analyse pour la lever. Il n'est pas possible d'envisager a priori ni même a posteriori toutes les phrases justificatives proposables par des élèves. La catégorisation préalable des types de justification nous aide à associer à une phrase justificative donnée un type de justification. correspondant. Nous pensons ainsi pouvoir, via le type de justification, classer les nouvelles phrases justificatives susceptibles d'intervenir.

Les règles de formation

Nous avons déjà donné les règles de formation mises en jeu par les tâches T3 et T4 (cf chapitre 3, II.2.1 et II.2.2). La nouvelle analyse a posteriori confirme globalement les comportements déjà observés. Nous détaillons les spécificités associées à chaque tâche avant la présentation de la grille d'analyse associée à chaque tâche.

• *Grille d'analyse de T3* :

La grille d'analyse indique les quatre règles de formation incorrectes dans le registre des écritures numériques liées aux rôles attribués aux signes '-', aux () et à l'exposant 2, puis des justifications prototypiques.

Critères	**Valeurs globales**	**Valeurs locales**
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Sans () et priorité au signe - Sans () et priorité au carré () personnelle et priorité au signe - Carré duplication
	Non identifiable	
Type de justification	Appel à règles énoncées au niveau de la forme	"les parenthèses préservent le signe moins" "c'est identique, puisqu'on on enlève les parenthèses" "les parenthèses n'interviennent pas dans le résultat"
	Appel à des propriétés opératoires énoncées	"le carré d'un nombre est un nombre positif" "le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif" "la règle des signes"
	Appel à réécriture	Dans système d'écriture correct $-9^2 = - 9x9$, $(-9)^2 = (- 9)x(-9)$ Dans système d'écriture incorrect $-9^2 = -9+-9$ (additif), $-9^2 = (- 9)x(-9)$ (système non parenthésé), ...

Tableau n° 17 : Grille d'analyse de la tâche T3

Tâche 4 :

Analyse a posteriori

L'analyse des productions a permis d'identifier une nouvelle règle de formation des écritures algébriques déjà vue dans les tâches T1 et T2 : le point peut être considéré, non pas comme un signe opératoire mais comme la virgule décimale. *a.a* désigne le nombre *a,a* avec *a* chiffre dans l'écriture décimale, par exemple 2.2 est le décimal 2,2 (cf Didier chapitre 4)[7]. Cette règle de formation est codée "point décimal".

• *Grille d'analyse de T4*:

La grille d'analyse indique les quatre règles de formation incorrectes dans le registre des écritures algébriques liées aux rôles attribués aux signes suivants : le point, les symboles opératoires + et x et l'exposant 2, puis des justifications prototypiques.

Critères	**Valeurs globales**	**Valeurs locales**
Rapport arithmétique/algèbre	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat Equivalence Dual
	Statut des lettres	Etiquettes Nombres généralisés
	Statut des objets	Procédural Structural Pseudo-structural
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Point décimal Oral Carré duplication Carré glissement
	Non identifiable	
Type de justification	Appel au numérique	Appel à calculatrice
	Appel à règles énoncées au niveau de la forme	"Le chiffre doit toujours être avant la lettre"
	Appel au niveau légal	Utilisation des termes "doit", ...
	Appel au contrat	Recopie incorrecte du modèle
	Appel à des propriétés opératoires énoncées	Appel à définition opératoire du carré, du double, du type "a^2 veut dire axa", "$2a$ veut dire $a+a$", "la puissance 2 indique qu'on multiplie le nombre 2 fois par lui-même", ...
	Appel à réécriture	a^2=axa, $2a$= $a+a$, $a2$=$2a$, $a+a$=$2a$, a^2=$a.a$, axa≠$2a$, axa≠$a+a$ a^2=$a+a$, $a+a$≠ax2 (dans un système incorrect)
	Appel à contre-exemple	

Tableau n° 18 : Grille d'analyse de la tâche T4

Tâche T6 :

T6 est un Q.C.M à choix multiples. En voici une brève synthèse :

• Analysons à part la cinquième égalité. Si l'égalité $2x^2 = (2x)^2$ est jugée vraie alors le système d'écritures algébriques utilisé est "non parenthésé".

7L'utilisation de la calculatrice joue certainement un rôle important dans ce comportement.

• Nous analysons les six autres réponses globalement en fonction du diagnostic recherché. Les réponses dépendent du rôle attribué aux exposants et des types de justification sur lesquels reposent l'attribution de la valeur de vérité des égalités.

D'après l'analyse concernant la tâche T4, deux rôles principaux ont été attribués à l'exposant, un rôle de *duplication* ou un rôle *multiplicatif.* Six types de justification (autres que justification par appel à contrat) sont prévus. Nous présentons les réponses envisageables en fonction de ces deux axes d'analyse.

1) L'exposant entier n désigne le nombre de fois où x est multiplié par lui-même, c'est-à-dire, $x^n = xxx\ldots xx$, n fois$x$)

1er cas : Les six réponses sont correctes. Les six types de justification sont envisageables.

$x^2x^3 = x^5$	Vrai
$x^2x^3 = x^6$	Faux
$x^2+x^3 = x^5$	Faux
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	Faux
$(x^2)^3 = x^6$	Vrai
$(x^2)^3 = x^5$	Faux

Cas n°1

$x^2x^3 = x^5$	Vrai
$x^2x^3 = x^6$	Faux
$\mathbf{x^2+x^3 = x^5}$	**Vrai**
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	Faux
$(x^2)^3 = x^6$	Vrai
$(x^2)^3 = x^5$	Faux

Cas n°2

2ième cas : La réponse pour l'égalité $x^2+x^3 = x^5$ est incorrecte et les cinq autres réponses sont correctes.

Deux raisons peuvent expliquer ce comportement.

• Le signe égal garde encore le statut de signe d'effectuation et le résultat d'une opération ne peut conserver de signe opératoire (cf Collis).

• La justification est réalisée en terme de conformité à une règle de calcul. Ici c'est une règle de transposition de l'addition des puissances aux exposants, codée "règle de transposition additive", qui est appliquée.

Règle de transposition additive : si on considère l'application f qui à n entier associe x^n, $f(n)+f(p) = f(n+p)$).

3ième cas : Les réponses aux deux premières égalités sont fausses, les réponses aux deux dernières étant correctes. Dans ce cas, les égalités $x^2x^3 = x^6$ et $(x^2)^3 = x^6$ sont jugées vraies simultanément.

• Ces deux formes d'écriture x^2x^3 et $(x^2)^3$ correspondent à la même expression faisant intervenir un opérateur multiplicatif. Cette interprétation incorrecte peut être renforcée par une justification en conformité à des règles, plus particulièrement la règle codée "règle de transposition multiplicative".

Règle de transposition multiplicative : si on considère l'application f qui à n entier associe x^n, $f(n)\times f(p) = f(n\times p)$).

• Si de plus, le signe "égal" garde encore le statut d'effectuation, l'égalité $x^2+x^3 = x^5$ peut être considérée vraie en mobilisant la règle de transposition additive, celle précédemment indiquée.

$x^2x^3 = x^5$	Faux
$\mathbf{x^2x^3 = x^6}$	**Vrai**
$x^2+x^3 = x^5$	F ou V
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	Faux
$(x^2)^3 = x^6$	**Vrai**
$(x^2)^3 = x^5$	Faux

Cas n°3

$\mathbf{x^2x^3 = x^5}$	**Faux**
$x^2x^3 = x^6$	Faux
$\mathbf{x^2+x^3 = x^5}$	**Vrai**
$\mathbf{4x^2+3x^3=7x^5}$	**Vrai**
$(x^2)^3 = x^6$	Vrai
$\mathbf{(x^2)^3 = x^5}$	**Vrai**

Cas n°4

4ième cas : Toutes les réponses sont fausses excepté la réponse à l'égalité $(x^2)^3 = x^6$

Les transformations utilisées ne sont pas compatibles et conduisent à des résultats contradictoires. En particulier, l'expression $(x^2)^3$ prend deux valeurs x^5 ou x^6. Le signe d'égalité n'est pas symétrique. L'exposant n'apparaît plus avoir de sens en ce qui concerne le nombre de termes du produit.

Dans ces $3^{ième}$ et $4^{ième}$ cas, on peut se demander si les calculs n'excluent pas l'indéterminée x du champ de calcul : il y aurait transposition de l'opération sur les puissances à une opération sur les exposants.

2) L'exposant a un rôle de duplication, c'est-à-dire qu'il indique le nombre de fois que a est dupliqué : $a^n \longrightarrow a+a+\ldots+a$, n fois. Nous retenons deux principaux cas.

$5^{ième}$ cas : La réponse à l'égalité $x^2+x^3 = x^5$ est fausse, la règle de formation ne permettant pas d'attribuer des valeurs correctes aux expressions, et les autres réponses sont correctes.

Cette interprétation ne met pas en jeu d'articulation entre le cadre numérique et le cadre algébrique.

La règle de formation est compatible avec la valeur des autres expressions obtenues par les transformations algébriques correctes. Une expression peut avoir plusieurs représentations mais une seule référence. Il est possible de proposer des justifications "correctes" par réécriture des expressions dans un système de formation incorrect.

En voici un exemple : justifications proposées par Caroline pour montrer que les égalités $x^2x^3 = x^6$ et $4x^2+3x^3 = 7x^5$ sont fausses. Rappelons que Caroline utilise la règle de formation "x^2 se réécrit $2x$".

L'égalité $x^2x^3 = x^6$est fausse "car $(x+x) + (x+x+x) = 2x+3x$" (et $5x \neq 6x$ dans le système construit)

L'égalité $4x^2+3x^3 = 7x^5$ est fausse "car $(4x+4x) + (3x+3x+3x) = 8x+9x$" (et $17x \neq 35x$ dans le système construit).

L'exposant apparaît bien avoir un sens en termes de nombre de termes d'une somme.

$x^2x^3 = x^5$	Vrai
$x^2x^3 = x^6$	Faux
$\boldsymbol{x^2+x^3 = x^5}$	**Vrai**
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	Faux
$(x^2)^3 = x^6$	Vrai
$(x^2)^3 = x^5$	faux

Cas n°5

$x^2x^3 = x^5$	Vrai
$\boldsymbol{x^2x^3 = x^6}$	**Vrai**
$\boldsymbol{x^2+x^3 = x^5}$	**Vrai**
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	V ou F
$(x^2)^3 = x^6$	Vrai
$(x^2)^3 = x^5$	Faux

Cas n°6

$6^{ième}$ cas : Les transformations utilisées ne sont pas compatibles et donnent des résultats contradictoires. En particulier, l'expression x^2x^3 prend deux valeurs x^5 et x^6. Le signe d'égalité n'est pas symétrique. L'exposant n'apparaît plus avoir de sens en termes de nombre de termes d'une répétition

Ici, deux règles incompatibles semblent coexister simultanément :

- l'exposant garde un rôle de duplication ce qui entraîne une règle d'addition sur les exposants,
- l'opérateur multiplicatif sur des puissances d'exposant 2 et 3 provoque un glissement vers une règle de multiplication sur les exposants, c'est-à-dire, l'application d'une règle de transposition multiplicative.

Les calculs semblent s'effectuer en dehors des indéterminées x.

L'analyse a posteriori a confirmé les comportements que nous envisagions.

• *Grille d'analyse de T6* :

Critères	**Valeurs globales**	**Valeurs locales**
Rapport arithmétique/algèbre	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat Equivalence Dual
	Statut des lettres	Etiquette Nombres généralisés
	Statut des objets	Procédural Structural
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Carré glissement Carré duplication Sans ()
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	
	Identifiable	Assemblage Règle de transposition additive Règle de transposition multiplicative
	Non identifiable	
Type de justification	Appel au numérique	Appel à calculatrice
	Appel à règles énoncées au niveau de la forme	"Parce que $2x^2$ c'est pour une multiplication alors quand entre parenthèse le résultat sera une addition $(2x)^2$"[8]
	Appel au niveau légal	Utilisation des termes "on doit", "on ne peut"... Recopie incorrecte au contrat
	Appel à des propriétés opératoires énoncées	n, p entiers, $x^2x^3=x^{2+3}$ ou $x^nx^p=x^{n+p}$ $(x^2)^3=x^{2\times3}$ ou $(x^n)^p=x^{n\times p}$, "On additionne les puissances (ou les exposants)" "On multiplie les puissances (ou les exposants)" "On ne peut additionner les puissances, dans le cas d'une addition"
	Appel à réécriture	n entier, avec n=2 ou n=3 - dans un système correct : $x^n=x\times x\times\ldots\times x$, n fois, - dans un système incorrect avec duplication : $x^n=x+x+\ldots+x$, n fois Ex : "car $(x+x)$ + $(x+x+x)$ = $2x+3x$"
	Appel à contre-exemple	

Tableau n° 19 : Grille d'analyse de la tâche T6

[8]C'est une phrase justificative donnée par un élève.

Tâche 15 :

Grille d'analyse :

Critères	Valeurs globales	Valeurs locales
Rapport arithmétique/algèbre	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat Equivalence Dual
	Statut des lettres	Etiquette Nombres généralisés
	Statut des objets	Procédural Structural
Type de formation	Correct	
	Identifiable	Assemblage Désassemblage Lecture de gauche à droite
	Non identifiable	
Type de justification	Appel au numérique	Appel à calculatrice
	Appel à règles énoncées au niveau de la forme	"car on ne peut mélanger les m avec les nombres sans m"
	Appel au niveau légal	Utilisation des termes "on doit", "on ne peut"... "on doit commencer par calculer la multiplication"
	Appel à des propriétés opératoires énoncées	
	Appel à réécriture	Dans système incorrect : $3+m = 3m$ est faux sinon $3\text{x}m = 3m$" Dans système correct : "Parce que $ab=axb$"
	Appel à contre-exemple	

Tableau n° 20 : Grille d'analyse de la tâche T15

III.4 LES TÂCHES 9, 10 ET 11

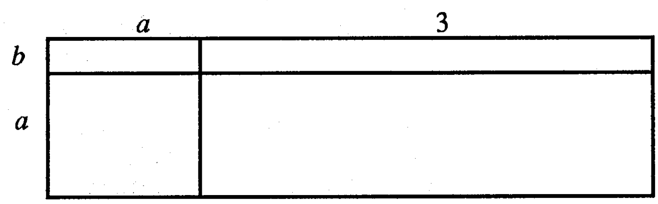
III.4.1 Enoncés

Tâche 9

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celles de droite (si c'est possible).

L'inverse de la somme des inverses de x et de y	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
La somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
La somme des carrés de x et de y	$2x-3y$
Le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	x^2+y^2
La différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
L'inverse de la somme de x et de y	$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
Le carré de la somme de x et de y	$(x+y)^2$

Tâche 10



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire** S **de ce rectangle. Justifier** votre réponse.

$S = a + b(a+3)$	$S = a^2b + 3ab$	$S = a+3(a + b)$
$S = 3a^2b$	$S = (a + b)(3 + a)$	$S = 6ab + a^3b$
$S = a^2 + ba + 3b$	$S = ab + 3b + a^2 + 3a$	$S = 3ab + 3a^2$
$S = (a+3)(b+ a)$	$S = a^2 + ab$	$S = 3ab^2 + 3a^3$
$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$		

Tâche 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante: $(3 + 5n) \times 2 - 6$.

III.4.2 Analyse des tâches

T9 consiste à associer deux représentations du résultat d'un enchaînement opératoire, l'une dans le registre du langage naturel, l'autre dans le registre algébrique, ces deux représentations n'étant pas sémantiquement congruentes. Les erreurs réalisées par les élèves sont fréquentes : priorités opératoires non respectées, confusion entre l'inverse et l'opposé, application de transformations incorrectes (fausse linéarité), ...

T10 consiste à rechercher parmi les expressions algébriques proposées, celles qui représentent l'aire du rectangle dessiné. Parmi la liste des expressions algébriques, nous trouvons des expressions correspondant à des erreurs fréquentes connues : expressions dans un système non parenthésé, expressions dans lesquelles les opérateurs + et x sont confondus, expressions dont certains termes sont réduits par assemblage.

• *Objectifs spécifiques à ces tâches*

C'est la capacité d'interpréter des représentations qui est mise en jeu dans ces deux tâches. Pour ces trois tâches, nous cherchons essentiellement à identifier lorsqu'une interprétation conduit à des associations incorrectes :

- les règles de conversion entre le registre des écritures algébriques et le registre du langage naturel pour la tâche T9,
- les règles de conversion entre le registre des écritures algébriques et le registre des figures pour la tâche T10,
- les règles de conversion entre le registre des écritures algébriques et le registre des programmes de calcul pour T11,
- les types de traitement utilisés.

Pour la tâche T10, l'interprétation nécessite la disponibilité des connaissances entres les cadres algébrique et géométrique.

Pour la tâche T11, il est possible d'accéder au rôle attribué par l'élève à l'algèbre, ce rôle dépendant évidemment de l'interprétation donnée à l'expression algébrique et du statut des lettres et des expressions.

• *Grille descriptive des Tâches T9, T10 et T11*

Composantes d'analyse	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Interprétation d'une expression algébrique	
Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres	Registres	Registre algébrique Registre du langage naturel (T9) Registre des figures (T10) Registre des programmes de calcul
	Type de conversion	T9 : R_{alg} <—> *lg nat* T10 : R_{alg} <—>*figure* T11 : R_{alg} <—>*prg. calcul*

Tableau n° 21 : Grille descriptive des tâches T9, T10, T11

III.4.3 Analyse des solutions envisageables

Tâche T9

• *Analyse a priori*

Nous appelons respectivement (p_i) et (f_i) la i$^{\text{ème}}$ phrase et la i$^{\text{ème}}$ formule.

Nous envisageons a priori des erreurs correspondant à l'utilisation des règles de conversion incorrectes suivantes :

• une fausse linéarité respectivement de l'opérateur carré notée fausse linéarité du carré" et de l'opérateur inverse notée "fausse linéarité de l'inverse",

• une non association entre la somme des opposés des carrés de x et de y et la formule $-(x^2+y^2)$ notée "sans anticipation distributivité".

• *Analyse a posteriori*

Nous avons trouvé des erreurs auxquelles nous ne attendions pas. Certains élèves ont en effet associé les opérateurs inverse et opposé, par exemple,

(p_1)<—>(f_5), (p_6)<—>(f_5), (p_2)<—>(f_1), (p_2)<—>(f_6),

Grille d'analyse de T9 :

Critères	Valeurs globales	Valeurs locales
Type de conversion	Correct	
	Identifiable	Confusion inverse opposé Fausse linéarité du carré Fausse linéarité de l'inverse Sans anticipation distributivité
	Non identifiable	

Tableau n° 22 : Grille d'analyse de la tâche T9

Tâche T10 :

Nous étudions a priori des stratégies envisageables pour associer des expressions algébriques représentant l'aire du rectangle. Pour ceci, nous organisons l'analyse autour de *l'identification des points de vue utilisés et des règles de conversion entre le registre des écritures algébriques et le registre des figures.*

• Cet exercice met en jeu deux cadres de résolution, le cadre géométrique et le cadre algébrique. Selon le point de vue adopté, on obtient une expression algébrique développée ou factorisée pour calculer l'aire d'un rectangle[9]. Le choix des expressions algébriques associées à l'aire du rectangle parmi celles proposées dans l'exercice dépend du nombre de points de vue mobilisés, de la capacité à reformuler les expressions d'une forme développée à une forme factorisée ou vice versa et du système d'écritures algébriques utilisé.

• Selon le ou les points de vue adoptés :

Dans le cas d'une expression correcte, le traitement permet d'obtenir l'aire du rectangle soit avec une écriture factorisée, soit avec une écriture développée, soit avec les deux écritures.

Dans le cas d'une expression incorrecte, c'est-à-dire, non référentiellement équivalente à l'aire du rectangle, nous identifions les règles erronées utilisées par les élèves pour calculer l'aire du rectangle.

Pour ceci, nous déterminons :

- si le système des écritures algébriques utilisé pour exprimer le produit de deux sommes est parenthésé ou non : les expressions algébriques $a+3(a+b)$, $a+b(a+3)$ correspondent à l'aire du rectangle dans un système non parenthésé.

- si le rôle des opérateurs est correctement attribué : la confusion entre les opérateurs + et x conduit à l'expression $3a\text{x}3b\text{x}a^2\text{x}ba$

- si les expressions algébriques exprimant l'aire du rectangle sont obtenues comme résultat d'un assemblage partiel ou final de lettres. Par exemple, l'expression $3a^2b$ correspond à l'aire du rectangle de longueur $a+3$ et $a+b$ avec les conventions

$a+3$ s'écrit $3a$ comme écriture d'assemblage final,

$a+b$ s'écrit ab

Donnons les règles de conversion utilisables pour fabriquer les expressions incorrectes proposées dans l'énoncé :

$a^2+ba+3b$: c'est une expression algébrique partielle correcte dans un système d'écriture correct,

$3a\text{x}3b\text{x}a^2\text{x}ba$: c'est une expression algébrique développée dans un système d'écriture où le signe de multiplication est confondu avec le signe d'addition,

a^2b+3ab, $3ab+3a^2$: ces expressions construites avec une règle d'assemblage partiel correspondent respectivement aux expressions algébriques correctes $(a+b)b+(a+b)3$, $(a+3)b+(a+3)a$,

a^2+ab : c'est une expression algébrique correcte mais partielle de l'aire,

$6ab+a^3b$, $3ab^2+3a^3$: ces deux expressions algébriques sont aberrantes.

Voici un tableau récapitulant les expressions proposées en fonction des points de vue et systèmes d'écriture utilisés.

9 Pour obtenir l'aire d'un rectangle on calcule, soit le produit des longueurs des côtés du rectangle, soit la somme des aires des domaines constituant le rectangle.

1 pt de vue	Toutes les exp.	Réf. équival.	Développée	$ab+3b+a^2+3a$
			Factorisée	$(a+3)(b+a)$, $(a+b)(3+a)$
		Non réf. équiv	Développée	$3a \times 3b \times a^2 \times ba$, a^2b+3ab, $3ab+3a^2$, les autres ...
			Factorisée	$a+3(a+b)$, $a+b(a+3)$
	Pas toutes	Réf. équiv.	... ...	
		Non réf. équiv	... ...	
2 pts de vue	Toutes les exp.	Réf. équival.	Dév., Fact.	$ab+3b+a^2+3a$, $(a+3)(b+a)$, $(a+b)(3+a)$
		Non réf. équiv	Dév., Fact.	Voir tous les cas selon les règles de conversion
	Pas toutes			

Tableau n° 23 : Expressions proposées pour l'aire en fonction des points de vue et systèmes d'écriture utilisés

Analyse a posteriori :

Elle a confirmé les réponses que nous prévoyions. Certains élèves ont détaillé avec soin leur calculs. Deux éléments ressortent :

• Certains élèves utilisent un système non parenthésé pour effectuer les calculs d'aire. En prenant le premier point de vue, l'aire du rectangle est exprimée par l'expression factorisée non parenthésée $a+3 \times b+a$ (Lucie).

• Deux démarches ont été utilisées par les élèves (qui explicitent leur démarche) pour obtenir une expression développée de l'aire :

- soit en développant une expression factorisée de l'aire initialement trouvée, et dans ce cas, l'activité reste dans le cadre algébrique sans changement de point de vue ;
- soit en changeant de point de vue et dans ce cas, le cadre géométrique sert de moyen de contrôle.

• *Grille d'analyse de T10* :

Critères	Valeurs globales	Valeurs locales
Type de conversion	Correct	Ecriture factorisée Ecriture développée
	Identifiable	Ecriture partielle correcte Ecriture factorisée sans () Ecriture développée et confusion x et + Ecriture avec assemblage final Ecriture avec assemblage partiel
	Non identifiable	Ecriture aberrante

Tableau n° 24 : Grille d'analyse de la tâche T10

Tâche T11 :

Analyse a priori

A partir de cette tâche, nous cherchons d'abord à savoir si une expression algébrique est interprétée comme le résultat d'un enchaînement opératoire à partir du nombre *n*. En fait, cette tâche est très riche et permet d'obtenir des informations sur le rôle attribué par les élèves à l'algèbre et de mettre en lumière le statut attribué par les élèves à une expression algébrique.

• Si l'expression n'est pas considérée comme le résultat d'un enchaînement opératoire à partir du nombre *n*, plusieurs interprétations sont envisageables :

- cette expression est perçue comme une formule dans laquelle on peut substituer des valeurs numériques aux lettres et effectuer des calculs. Cette démarche indique ici un des rôles possibles attribué à l'algèbre, celui de faire des calculs numériques à partir des formules. Nous étiquetons ce type de solution "algèbre pour substituer". C'est pour certains élèves une première étape d'appropriation du problème.

- l'expression algébrique initiale est considérée comme une expression formelle à développer. L'énoncé n'a pas été compris. On peut imaginer que certains élèves se replacent dans un contexte de questionnement habituel et développent l'expression algébrique. La vue d'une expression algébrique peut déclencher un automatisme de calcul algébrique. Cette stratégie nous semble indiquer un rôle prédominant de l'aspect calcul formel attribué à l'activité algébrique. Nous étiquetons ce type de solution "algèbre pour faire du calcul formel".

• Si l'expression algébrique est interprétée comme le résultat d'un enchaînement opératoire, l'enchaînement écrit est soit correct, soit incorrect. Dans ces deux cas, l'algèbre est exploitée comme langage pour exprimer un enchaînement opératoire. Nous étiquetons ce type de solution "algèbre pour exprimer une relation".

Dans le cas d'un enchaînement incorrect associé à l'expression, la majorité des erreurs envisageables sont liées à une lecture de l'expression de gauche à droite ou bien à une lecture ne tenant pas compte du rôle prioritaire des parenthèses. Nous codons ces conversions "sans ()" ou "lecture de gauche à droite".

Voici parallèlement deux programmes de calcul associés à l'expression donnée, l'un correct, l'autre étant un exemple de programme incorrect.

Programme correct	Sous expr.	**Programme incorrect**
Soit *n* un nombre initial	n	Soit *n* un nombre initial
Multiplier ce nombre par 5 et additionner 3 au résultat	$3+5n$	Additionner 3 et 5 et multiplier le résultat par le nombre initial (R1)
Multiplier le résultat précédent par 2 et retrancher 5	$(3+5n)x2-5$	Multiplier le résultat par la différence de 2 et de 5 (R2)

Les règles R1 et R2 indiquent une lecture de gauche à droite.

Analyse a posteriori

Cet exercice a été très peu traité par les élèves, malgré la réalisation d'exercices analogues pendant la période qui a précédé le test. En plus des solutions envisagées, l'analyse a fait apparaître deux autres types de solutions.

1) Certains élèves se sont ramenés à la résolution d'une équation du premier degré. L'expression était donnée seule. Or, pour certains élèves, une expression semble incomplète si elle ne fait pas partie de l'un des membres d'une égalité. Pour s'y ramener, ils ajoutent "= 0" ou résolvent une équation (cf Wagner, Rachlin et Jensen 1984). Dans ce cas, une lettre a un statut d'inconnue.

Par exemple, l'expression algébrique $(3+5n) \times 2 - 6$ a été transformée par Samir de la façon suivante :

"$2(3+5n) - 6$
$6+10n-6$
$10n = -6-6$
$10n = -12$
$n = -12/10$
$n = -6/5$"

Réaliser un traitement algébrique semble, dans ce cas, être assimilé à "résoudre une équation". Nous retrouvons une fonction apparente de l'algèbre mise en évidence dans l'exercice "Le prestidigitateur". Nous étiquetons ce type de solution "algèbre pour résoudre équation". Nous utilisons les valeurs locales définies pour la tâche T7.3 pour décrire les résolutions incorrectes.

2) Certains élèves ont proposé un programme de calcul réalisé avec le langage de leur calculatrice. Ce point de vue est tout à fait compatible avec une conception procédurale des expressions algébriques. Nous avions utilisé la calculatrice avant le test dans le cadre du cours de mathématiques pour donner du sens à un enchaînement opératoire. Nous étiquetons cette conversion "programme calculatrice".

Il est à signaler que dans le cas d'un calcul effectué, nous obtenons des informations sur les règles de formation ou de traitement utilisées dans le registre des écritures algébriques, par exemple la règle d'assemblage vue dans l'exercice T4 et les règles de transformations incorrectes pour résoudre une équation données pour la tâche T7.3.

• *Grille d'analyse de T11* :

Critères	Valeurs globales	Valeurs locales
Statut des lettres	Nombres généralisés Inconnues	
Type de traitement	Correct	
	Identifiable	Calcul de gauche à droite
	Non identifiable	
Type de conversion	Correct	
	Identifiable	Lecture de gauche à droite Sans () Assemblage
	Non identifiable	
Fonction apparente de l'algèbre	Conforme	Programme de calcul en français Programme calculatrice Algèbre pour exprimer une relation
	Non conforme	Algèbre pour - substituer de nombres aux lettres - faire du calcul formel (dév) - résoudre équation

Tableau n° 25 : Grille d'analyse de la tâche T11

III.5 LES TÂCHES 14 ET 18

III.5.1 Enoncés (voir pages suivantes)

III.5.2 Analyse des tâches

De nombreuses études montrent les difficultés des élèves à travailler dans le cadre graphique ou en articulation avec lui. C'est un élément important que doit prendre en compte le diagnostic. Nous voulons donc étudier la familiarité des élèves à travailler en articulation avec ce cadre.

Les deux exercices proposés demandent d'associer des représentations distinctes de droites dans différents contextes :

• la tâche 14 consiste à choisir parmi une liste d'équations celle qui permet de définir une droite donnée par son tracé dans un repère. Cette tâche nécessite l'articulation entre les cadres graphique et algébrique et plus particulièrement les registres associés dans ces cadres à l'objet "droite". Nous attendons deux types de solution pour associer un tracé et une équation réduite :

- soit une interprétation globale avec association des variables visuelles du tracé et des coefficients a et b de l'équation réduite $y=ax+b$,

- soit une lecture des coordonnées de deux points de la droite et la recherche de l'équation réduite de droite associée.

• la tâche 18 consiste à analyser des représentations graphiques et à déterminer celle correspondant à la situation de l'énoncé. Cette tâche met en jeu l'articulation entre le registre du langage naturel, un contexte concret et le cadre graphique. Nous attendons une justification par élimination ou par association complète s'appuyant sur une interprétation globale des tracés.

• *Objectifs spécifiques à ces tâches diagnostic*

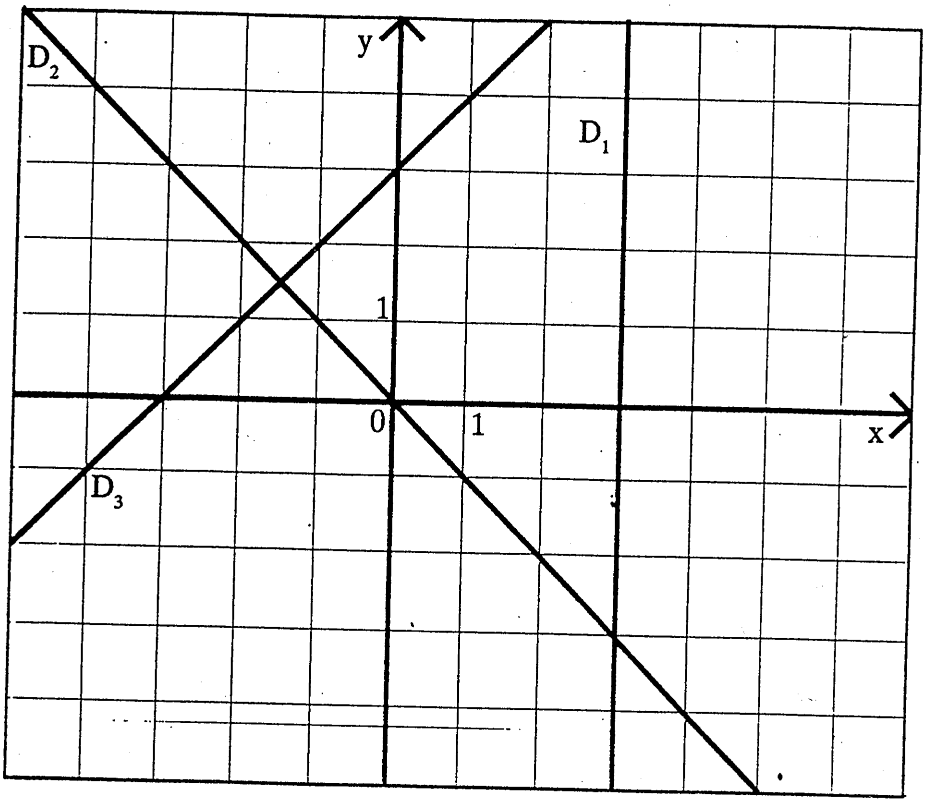
Ces deux tâches mettent en jeu des registres sémiotiques pour lesquels il n'y a pas de correspondance biunivoque entre les unités signifiantes correspondantes de chaque registre (cf chapitre II, paragraphe V).

Deux objectifs essentiels sont visés par l'analyse :

• identifier des règles de conversion incorrectes utilisées entre le registre des représentations graphiques et le registre des équations, d'une part, et entre le registre des représentations graphiques et celui du langage naturel associé à un contexte concret, d'autre part.

• déterminer les types de justification utilisés.

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

$y = 3$	$x = 3$
$y = x$	$y = -x$
$y = 3x$	$y = -3x$
$y = x - 3$	$y = x + 3$
$y = -x + 3$	$y = -x - 3$

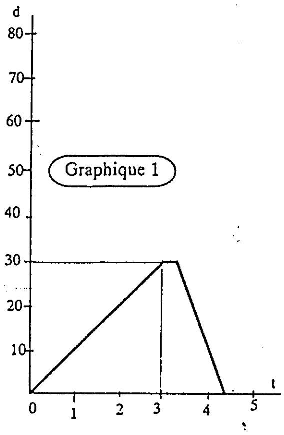
Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 :

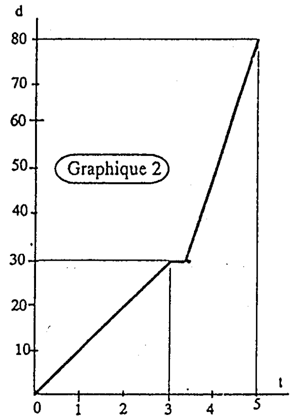
droite	équation de la droite
D_1	
D_2	
D_3	

Exercice 18

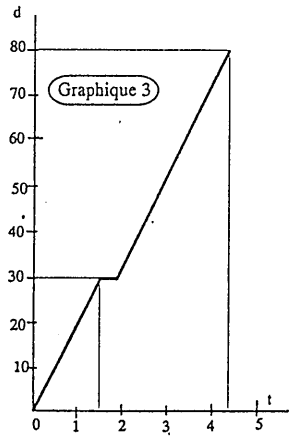
Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.





Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.



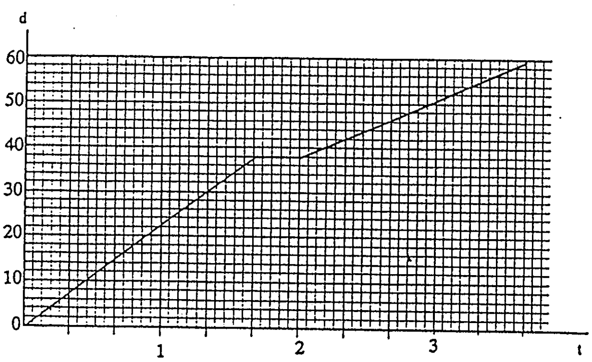
Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

Réponse :

Graphique n° ☐

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie.



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy.

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

• *Grille descriptive* :

Composantes d'analyse	Critères	Valeurs
Traitement algébrique	Reproduction d'une tâche d'ordre numérique* Interprétation d'une expression algébrique Utiliser l'outil algébrique pour étudier d'autres notions mathématiques (T14)*	Substitution de lettres par des valeurs numériques Oui Recherche l'équation réduite d'une droite dont on connaît le tracé dans un repère donné (t14)*
Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres	Registres Type de conversion	Registre des représentations graphiques Registre des équations de droite (T14) Registre du langage naturel (T18) T14, T18 : $R_{graphique} \longleftrightarrow alg$ T18 : $R_{graphique} \longleftrightarrow lg\ naturel$
Gestion dans le registre algébrique	Type de traitement (pour T14)*	
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel au calcul algébrique

Tableau n° 26 : Grille descriptive des tâches T14 et T18

III.5.3 Analyse des solutions envisageables

Tâche T14

Analyse a priori

• Nous déterminons si les valeurs des variables visuelles liées à une droite sont correctement associées aux valeurs des unités symboliques correspondantes. Rappelons les règles de correspondance entre le registre des représentations graphiques et celui des équations réduites de droites :

Variables visuelles	Valeurs	Unités symboliques correspondantes
sens d'inclinaison du tracé :	trait montant	$a > 0$
	trait descendant	$a < 0$
angles du tracé avec les axes :	partage symétrique	$a = 1$
	angle plus petit	$a < 1$
	angle plus grand	$a > 1$
position du tracé sur l'axe y :	coupe au dessus	$b > 0$
	coupe à l'origine	$b = 0$
	coupe au-dessous	$b < 0$

Fig n° 27 : Règles de correspondance entre les registres [Duval, 1988 b]

Pour chaque droite oblique, dans le cas d'une interprétation incorrecte, nous attribuons au critère *type de conversion* les valeurs suivantes correspondant à celles prises par les variables visuelles incorrectes :

- toutes les liaisons entre variables visuelles et unités symboliques incorrectes
- liaison entre signe de a et sens d'inclinaison incorrecte
- liaison entre IaI et angle incorrecte
- liaison entre b et position incorrecte

• Lors du passage du test, nous avions demandé oralement aux élèves de justifier par le calcul le choix des équations. Si le calcul des coefficients *a* et *b* est réalisé, nous notons la méthode mise en œuvre et nous indiquons si les valeurs calculées correspondent au tracé.

Rappelons les méthodes possibles pour déterminer une équation de droite oblique dont un tracé est donné dans un repère.

Méthode 1 : Déterminer l'équation réduite d'une droite oblique connaissant le coefficient directeur *a* et les coordonnées (x_0, y_0) d'un de ses points.
D a pour équation $y-y_0 = a(x-x_0)$

Méthode 2 : Déterminer l'équation réduite d'une droite oblique sachant qu'elle est de la forme $y=ax+b$. Pour ceci, il suffit de calculer le coefficient directeur *a* de la droite puis l'ordonnée à l'origine *b* sachant que les coordonnées (x_0,y_0) d'un des points de la droite vérifient l'équation réduite de la droite.

Méthode 3 : La droite oblique étant définie par deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.

Résoudre le système $\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$ d'inconnues *a* et *b*

pour obtenir l'équation réduite.

Dans ce cas, nous attribuons comme valeurs au critère *type de traitement* le nom des méthodes et nous retenons si elles sont correctes ou non, voire les erreurs réalisées. Citons les principales :
- calcul coefficient directeur incorrect
- résolution incorrecte d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues
- condition incorrecte d'appartenance d'un point à la droite

• *Grille d'analyse de la tâche T14* :

L'analyse a posteriori a montré que cette question était très mal réussie. Les justifications peu nombreuses sont descriptibles par les valeurs des critères introduites a priori.

Critères	**Valeurs globales**	**Valeurs locales**
Type de conversion	Correct	
	Identifiable	Toutes var. visuelles incorrectes Sens d'inclinaison incorrect Angle incorrect Position incorrecte
	Non identifiable	
Type de traitement	Correct	
	Identifiable	Méthode 1 Méthode 2 Méthode 3
	Non identifiable	
Type de justification	Aucun Appel au calcul algébrique	

Tableau n° 28 : Grille d'analyse de la tâche T14

Tâche T18

Question 1 :

Analyse a priori

Trois graphiques représentant une distance parcourue en fonction du temps sont proposés. L'énoncé suppose implicitement qu'un et un seul de ces graphiques représente la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps. Nous attendons une justification par élimination de deux graphiques ou une justification par association complète. Ici, les graphiques 1 et 3 ne répondent pas aux données de la situation. La représentation graphique correspondant à la situation de l'énoncé est le graphique 2.

Présentons l'analyse en identifiant a priori les types de justification utilisés en fonction de la solution retenue. Nous identifions en même temps des règles de conversion incorrectes.

1) Le graphique 2 est donné : Les types de justification utilisés nécessitent d'abord une interprétation de la vitesse de parcours comme le coefficient directeur d'une droite mais aussi une démarche d'interprétation globale. Dans ce cas, il est nécessaire de mobiliser les objets et outils du cadre graphique.

a) Une justification "par élimination" permet d'exclure les graphiques 1 et 3 qui ne correspondent pas aux données de la situation.

Distinguons les cas du graphique 1 et du graphique 3 pour préciser les arguments utilisés.
Graphique 1: Deux arguments permettent d'exclure ce graphique.

- A la fin du parcours, la distance parcourue est nulle ;
- La vitesse est négative pendant la descente.

Graphique 3 : Trois arguments permettent aussi d'exclure ce graphique.

- La vitesse pendant la montée est différente de 10 km/h (pente = 30/1,5) ;
- La vitesse pendant la descente est différente de 30 km/h (pente = (80-30)/ 2,5).
- Les vitesses sont les mêmes pendant la montée et la descente car les deux droites sont parallèles, alors que ce n'est pas le cas dans la situation.

b) Une justification par "association complète" permet d'associer le graphique 2 aux données de l'énoncé.

c) Aucune justification n'est donnée.

2) L'interprétation est incorrecte et la solution donnée est le graphique 1 :

Nous distinguons plusieurs types de justification.

- L'élève ne fait aucune justification.
- L'élève utilise une "justification par association incomplète". Ce type de justification s'appuie avant tout sur le contenu sémantique, sur le contexte.

Par exemple, la vitesse est de 10 km/h pendant la montée, ce qui correspond bien à la situation. En revanche, la descente n'est pas prise en compte pour faire apparaître des contradictions.

On peut penser que ce raisonnement s'appuie sur les éléments suivants. Le graphique 1 est sémantiquement congruent à la situation de l'énoncé mais ne lui est pas équivalent. Les termes de l'énoncé "montée", "pause", "descend" ont été respectivement associés aux sens d'inclinaison du tracé "montant", "horizontal", "descendant". Dans ce cas, le sens d'inclinaison "descendant" n'est pas associé à une valeur négative du coefficient directeur d'une droite, c'est-à-dire, avec une vitesse négative.

Nous attribuons au critère *type de conversion* la valeur "association congruente incorrecte".

3) L'interprétation est incorrecte et la solution donnée est le graphique 3 :

Plusieurs cas sont envisageables.

- L'élève ne fait aucune justification.
- L'élève propose une justification incorrecte reposant sur un raisonnement faux, par exemple, le calcul de la vitesse moyenne sur 80 km.
- L'élève propose une justification par association incomplète : c'est l'allure globale "à peu près correcte" du tracé qui est retenue même si les vitesses ne sont pas respectées.

L'interprétation réalisée ne prend pas en compte le parallélisme des tracés pendant la montée et la descente pour exclure ce graphique. Les vitesses pendant ces deux périodes seraient égales ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

<u>Question 2</u> :

Nous voulons identifier les difficultés rencontrées par les élèves lors d'une lecture graphique.

Dans cette question, un graphique est proposé sur lequel est porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures). Il est demandé de faire apparaître sur le graphique le temps t mis par le cycliste pour atteindre la ville Arudy distante de 30 km du point de départ. On demande de rechercher l'abscisse du point M de la courbe représentative de f ayant pour ordonnée 30.

Ici le contexte concret de l'énoncé, et plus particulièrement la donnée des unités, exclut la confusion entre abscisse et ordonnée d'un point. En revanche, une difficulté rencontrée par les élèves réside dans la lecture de l'unité choisie sur les axes, ici 20 *mn*, pour exprimer le temps mis par le cycliste pour atteindre la ville Arudy distante de 30 km du point de départ. Dans ce cas, nous codons cette erreur, <u>lecture unité incorrecte</u>.

Question 3 :

Nous déterminons si les élèves savent reconnaître une situation de proportionnalité sous ses aspects graphiques. Dans ce cas, nous retenons si les élèves associent une situation de proportionnalité graphiquement au segment passant par l'origine.

Analyse a posteriori

1) L'analyse des productions d'élèves a confirmé l'analyse a priori. Les élèves ont donné très peu de justification. Parmi les réponses dépouillées, on retrouve les types de justification proposés.

2) Elle a aussi permis, de trouver des justifications de type contrat.

Il est habituellement fréquent dans les devoirs que la question suivante reprenne le résultat de la question précédente. Or, l'un des arguments utilisés par des élèves pour retenir le graphique 3 est la donnée d'un graphique de même allure à la question suivante.

Dans ce cas, nous étiquetons ce comportement association contrat qui constitue une nouvelle valeur du critère *type de conversion*.

• *Grille d'analyse de T18* :

Critères	**Valeurs globales**	**Valeurs locales**
Type de conversion	Correct	
	Identifiable	Association congruente Association contrat
	Non identifiable	
Type de justification	Appel au contexte	Justification par association congruente Justification par association incomplète
	Appel au contrat	
	Appel à inférences logiques	Justification par association complète Justification par élimination

Tableau n° 29 : Grille d'analyse de la tâche T18

IV ANALYSE DES EXERCICES DE "MATHÉMATISATION"

IV.1.LES OBJECTIFS GÉNÉRAUX

• *Objectifs d'évaluation* :

Dans le cas d'une démarche algébrique, nous déterminons si les élèves utilisent le type de traitement algébrique attendu pour résoudre les tâches. Nous évaluons s'ils traduisent correctement ou non des problèmes dans le cadre algébrique et s'ils mettent en œuvre correctement ou non les outils adaptés à la résolution. Dans le cas d'une résolution algébrique non attendue, nous étudions les types de traitement algébrique mobilisés.

Ce sont toutes les formes de la compétence algébrique qui sont évaluées ici. Ces exercices mettent essentiellement en jeu les types de traitement algébrique *production d'une expression algébrique pour traduire une situation, utilisation de l'outil algébrique comme outil de résolution ou de preuve.*

• *Objectifs en termes de recherche de cohérences*

La résolution des problèmes de mathématisation soulève des difficultés importantes chez les élèves mises en évidence par des études didactiques (voir chapitre II, paragraphe IV). Ces difficultés recouvrent plusieurs composantes d'analyse.

La résolution algébrique d'un problème est un détour formel qui s'oppose aux démarches arithmétiques. Ce peut être une source profonde de difficultés pour les élèves. Nous voulons identifier le type de démarche, arithmétique ou algébrique, majoritairement utilisée par les élèves. Dans le cas d'une démarche algébrique, nous voulons dégager en quoi cette démarche est en continuité et/ou en rupture avec une démarche arithmétique. C'est la composante d'analyse *rapport arithmétique/algèbre* qui permet cette analyse.

La traduction algébrique d'une situation dépend de l'interprétation qui en est faite mais aussi des règles de conversion utilisées pour passer d'un registre de représentation à un autre et des règles de formation utilisées pour transformer les expressions algébriques. Nous voulons donc identifier les règles de conversion et de formation utilisées par les élèves. C'est la composante *articulation entre le registre algébrique et d'autres registres sémiotiques* qui intervient ici dans l'analyse.

Les solutions proposées par les élèves sont souvent différentes de celles attendues en Première G. La résolution d'exercices de mathématisation est liée à l'interprétation et à la construction des expressions algébriques traduisant une situation dans le ou les cadres mis en jeu. C'est au moment où l'on interprète l'énoncé ou des expressions intermédiaires lors de la résolution qu'il est possible de trouver une structure de données qui va permettre de changer de point de vue, de mobiliser des outils adaptés à la résolution ou bien de déclencher un algorithme utilisé dans une situation analogue. La composante d'analyse *fonction de l'algèbre* permet d'étiqueter à travers les types de solutions reconnus, le mode privilégié de fonctionnement algébrique. Nous pourrons ainsi le mettre en relation, dans le cas de solutions non conformes, avec l'enseignement reçu antérieurement.

Certains exercices de mathématisation mettent en jeu la recherche d'une conjecture puis sa preuve. Plusieurs types des justification sont proposés par les élèves en fonction de leur niveau de rationalité. La composante d'analyse *rationalité algébrique* permet de catégoriser les types de justification.

IV.2 LES TÂCHES DIAGNOSTIC

Deux des exercices posés (T8 et T19) correspondent à des exercices classiques posés en BEP. Ils peuvent être résolus de plusieurs façons, certaines méthodes étant privilégiées en BEP. Les autres ne sont pas des exercices habituellement posés en BEP mais ne présentent aucune difficulté mathématique. Ils nous servent d'appui pour rechercher les moyens techniques privilégiés par les élèves pour justifier.

Les exercices sont complémentaires par les registres mis en jeu et par les types de tâche proposés, conjecture d'une propriété générale puis preuve, production d'expressions dans différents registres de représentation, mise en équation de situations géométrique ou concrète puis résolution.

IV.3 LA TÂCHE T16

Nous voulons d'abord étudier comment les élèves interprètent puis produisent des expressions à partir d'autres expressions en changeant de registre de représentation ou de point de vue.

IV.3.1 Enoncé

<u>Tâche T16</u> :

> Ecrire une équation utilisant les variables *E* et *P* pour représenter la phrase suivante :
> **"Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée".**
> Utiliser *E* pour le nombre d'élèves et *P* pour le nombre de professeurs.

IV.3.2 Analyse de la tâche

Cet exercice propose de produire une expression dans un registre différent de celui donné initialement, du registre du langage naturel vers le registre des écritures algébriques.

• *Objectifs spécifiques à ces tâches diagnostic*

Les objectifs essentiels attribués à l'analyse de ces tâches sont :

• d'identifier les règles de conversion utilisées pour passer d'un registre à un autre,

• de dégager la fonction apparente et locale attribuée par les élèves au calcul algébrique pendant la production des expressions.

De plus, ces tâches permettent dans certains cas d'obtenir des informations intéressantes sur le statut des lettres.

• *Grille descriptive* :

Composantes d'analyse	Critères	Valeurs
Traitement algébrique	Production d'une expression pour traduire une situation	Oui
Rapport arithmétique / algèbre	Statut des lettres	Nombres généralisés Variables
	Registres	Registre des écritures algébriques, Registre du langage naturel
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	R_{lg} *naturel<—>alg*
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Formuler une situation intra ou extra mathématique

Tableau n° 30 : Grille descriptive de la tâche T16

IV.3.3 Analyse des solutions envisageables

Le but du problème est de traduire algébriquement une relation fonctionnelle entre deux variables, l'énoncé nécessitant une reformulation. En effet, les deux représentations ne sont pas congruentes. La relation fonctionnelle correcte entre les élèves et les professeurs est donnée par l'égalité $6P = E$. Dans ce cas, l'algèbre est utilisée pour exprimer et produire une relation opératoire. Nous étiquetons cette solution par la fonction locale jouée par l'algèbre, c'est-à-dire, <u>algèbre pour exprimer une relation</u>.

Ce problème "Elève-Professeur" a été analysé par de nombreux chercheurs en didactique. Dans la recherche de Clement [Clement, 1982], [Clement, Lochhead et Monk, 1981], 37% des élèves ont exprimé incorrectement la relation fonctionnelle entre les élèves et les professeurs et ont donné comme relation $6E = P$. E et P sont alors considérées comme des objets ou comme des étiquettes qui désignent les objets représentés et non comme des nombres dans une relation d'équivalence. Ces élèves écrivent une relation qui représente l'idée qu'il y a 6 élèves pour un professeur, un peu comme s'ils écrivaient $100cm = 1m$.

Cette conception des lettres comme étiquettes empêche une interprétation de l'égalité de façon structurale mais aussi de façon procédurale. Une conception procédurale de l'algèbre au sens de A. Sfard [Sfard, 1991] nécessite au minimum que l'élève considère E comme un nombre qui multiplié par 6 donne P.

Nous attribuons à cette conversion le code "traduction étiquette". Dans ce cas, l'algèbre sert aux élèves à abrévier des relations. On peut comparer ce rôle à celui attribué à l'algèbre par les publicitaires dans l'écriture de certaines publicités. Nous étiquetons ce type de solution algèbre "pour faire des abréviations".

Analyse a posteriori

L'analyse des productions de élèves a fait apparaître d'autres types de conversion pour passer du registre du langage naturel à celui des écritures algébriques.

• Certaines expressions algébriques correspondent à une traduction "proche" de l'énoncé comme, $6E+P$, $6E-P$, respectant l'ordre des lettres E et P données dans l'énoncé. La relation fonctionnelle entre E et P n'est pas pris en compte ou bien est incorrecte. L'énoncé demandait pourtant "Ecrire une équation ...". On peut se demander ce que signifie le terme "équation" pour ces élèves, lorsque ce terme est sorti du contexte habituel de résolution d'équations. Est-il relié à la notion d'égalité, à la recherche des valeurs de l'inconnue x pour lesquelles l'égalité est vraie ? L'algèbre est utilisée par les élèves pour donner une abréviation de l'énoncé. Nous attribuons à cette conversion le code "traduction faussement congruente".

• D'autres ont exprimé une inégalité, par exemple, $6E > P$. Nous attribuons à cette conversion le code "traduction inégalité".

• Certains élèves expriment une relation de proportionnalité entre les élèves et les professeurs en posant le rapport E/P. Mais cette solution reste inachevée dans les cas rencontrés. Nous attribuons à cette conversion le code "traduction quotient". Nous retrouvons cette démarche dans les tâches 8 et 19. Dans ce cas, les lettres E et P désignent des nombres. C'est une conception procédurale qui est à l'œuvre.

• *Grille d'analyse de T16*:

Critères	**Valeurs globales**	**Valeurs locales**
Type de conversion	Correct	
	Identifiable	Traduction faussement congruente Traduction étiquette Traduction inégalité Traduction quotient
	Non identifiable	
Statut des lettres	Nombre Etiquette Inconnue	
Statut des expressions	Procédural Structural Pseudo-structural	
Fonction apparente de l'algèbre	Conforme	Pour exprimer une relation
	Non conforme	Pour nommer Pour faire une abréviation

Tableau n° 31 : Grille d'analyse de la tâche T16

IV.4 LES TÂCHES T12 ET T13

Ces deux tâches ne correspondent pas à une pratique mathématique habituelle, que ce soit en BEP ou au lycée. Ces exercices proposent de conjecturer puis de généraliser une propriété sur des nombres et de la prouver. Donnons les énoncés avant de commencer l'analyse.

IV.4.1 Enoncés

Tâche T12 :

> Soient trois nombres entiers consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez-le.

Tâche T13 : "Le prestidigitateur"

> Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
> "Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7"
> L'affirmation est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

IV.4.2 Analyse des tâches

Ces deux tâches proposent une situation de validation. Les énoncés étant vrais, c'est une preuve intellectuelle qui est attendue, l'outil algébrique permettant ces preuves.

Ces deux tâches mettent en jeu les cadres arithmétique et algébrique. La mobilisation des objets et outils de l'un ou l'autre des cadres dépend des solutions proposées par les élèves.

La résolution fait appel au plus à trois registres sémiotiques : le registre du langage naturel, le registre numérique et le registre des écritures algébriques.

• *Objectifs spécifiques à ces tâches diagnostic*

Toutes les composantes d'analyse sont concernées. En effet, les objectifs suivants sont visés à travers l'analyse de ces tâches pour caractériser le fonctionnement algébrique des élèves. Rappelons qu'ils ont été définis au chapitre 3.

• Identifier une démarche de résolution privilégiée entre les démarches arithmétique et algébrique. Si un élève a recours à l'algèbre, l'étude des formes prises par la solution permet de mettre en évidence en quoi l'algèbre utilisée est en continuité et/ou en rupture avec les pratiques arithmétiques.

• Etudier la familiarité des élèves à utiliser le langage algébrique pour traduire des propriétés numériques, mettre en évidence les structures de données utilisées et montrer leur rôle dans la dynamique créée pour trouver la solution.

• Identifier, selon la démarche, les règles de conversion utilisées entre deux registres sémiotiques, le registre du langage naturel, celui des expressions numériques et celui des expressions algébriques. En effet, les énoncés ne sont pas sémantiquement congruents avec les autres représentations.

• Caractériser la fonction apparente attribuée par les élèves à l'algèbre.

• Définir le niveau de preuve utilisé car, étant donné que les énoncés sont vrais, c'est une validation intellectuelle et non pragmatique qui est attendue. Ici, un contre-exemple ne suffit pas à prouver. Les solutions des élèves peuvent donner des indications fines sur leur rapport à la rationalité mathématique.

• *Solutions attendues* :

Le problème T12 a été proposé par Y. Chevallard et Conne [Chevallard et Conne, 1984] à des élèves de collège pour étudier comment sont utilisées les lettres pour exprimer une propriété générale.

L'exercice énonce un calcul défini par le résultat d'un enchaînement opératoire mettant en jeu trois entiers consécutifs. La tâche proposée consiste à conjecturer l'invariance du résultat de ce calcul qui n'est pas donné dans l'énoncé puis à généraliser une propriété sur trois entiers consécutifs et à la prouver.

Nous attendons comme étapes de résolution :

- un test sur plusieurs triplets d'entiers consécutifs qui mènent au même résultat 1,
- le choix d'une variable x désignant un nombre et la traduction algébrique de l'énoncé prenant en compte l'écriture générique de deux entiers consécutifs puis la réduction de l'expression algébrique obtenue,
- le retour au problème initial pour conclure.

Nous renvoyons au chapitre 3 pour le problème T13.

• *Grille descriptive des tâches* :

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Réalis. de tâche d'ordre numérique Repr . de tâches formelles niv1 Repr. de tâches formelles .niv2 Interprétation d'une expression Branchement sur formule Production ds contexte familier Production ds contexte non familier Utilisation de l'algèbre pour prouver	Non Oui Non Oui Non Non Oui Oui
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat/équivalence
	Statut des lettres	Nombres généralisés
	Objet et statut des expressions	Expression algébr. 1er degré Structural/procédural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation Type de traitement	*RF*(Z, *x*, (), +,-,x,/,implicite) $RT_{développement}$
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres	Type de conversion	Registre lg naturel vers registre des écrit. algébriques Non congruent : T12 : - écriture linéaire globale générique T13 : - écriture linéaire globale parenthésée - écriture pas à pas séparé
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Prouver propriété numérique
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification	Intellectuelle Appel au calcul algébrique

Tableau n° 32 : Grille descriptive des tâches T12 et T13

IV.4.3 Analyse des solutions envisageables

Tâche T12 :

• *Analyse a priori*

Nous envisageons plusieurs types de solutions. Ces solutions dépendent de la stratégie mobilisée, stratégie liée au *type de preuve engagé, pragmatique ou intellectuelle ainsi qu'au type d'écriture utilisé.* Deux éléments déterminants interviennent dans le choix du type d'écriture et sa correction : *la prise en compte ou non de la relation liant trois entiers consécutifs* et *l'interprétation des termes "différence" et "produit".*

Le premier élément est essentiel. C'est ici que l'on voit si l'algèbre est vraiment disponible comme langage exprimant des propriétés numériques et permet un choix d'outils adaptés à la résolution algébrique. Dans la démarche arithmétique, le calcul permet d'obtenir directement le résultat de l'opération. Il n'est pas nécessaire de connaître l'écriture générique qui traduit la relation liant deux nombres entiers consécutifs (si x est un entier alors $x+1$ est l'écriture générique de l'entier suivant). En revanche, dans la démarche algébrique le choix de cette structure de données est déterminant pour faire avancer la preuve. Ce choix met en jeu une conception structurale des expressions algébriques.

Deuxièmement, l'énoncé est construit à partir du résultat d'opérations et non à partir des opérations elles-mêmes. La traduction algébrique nécessite une *reformulation opératoire pour passer du registre du langage naturel à celui du registre des écritures numériques ou algébriques.*

Nous organisons l'analyse autour de l'identification a priori des deux stratégies typiques de résolution, c'est-à-dire arithmétique ou algébrique et du type d'écriture utilisé. Nous n'allons pas présenter exhaustivement toutes les solutions mais nous allons décrire les principaux choix autour desquels elles s'articulent.

Commençons cette analyse par un tableau récapitulatif de tous les cas envisagés.

Type de stratégie	Type d'écriture		Type de solution
nature arithmétique	enchaînement opératoire écriture pas à pas en succession d'opérations	enchaînée ou séparée	
	résultat de l'enchaînement écriture globale linéaire	non générique	
nature algébrique	enchaînement opératoire	enchaînée	Repli vers le numérique
	écriture pas à pas en succession d'opérations	non générique séparée générique	Repli vers le numérique Traitement alg. correct Traitement alg. incorrect
	résultat de l'enchaînement	non générique	Substitution numérique
	écriture globale linéaire	générique parenthésée ou non parenthésée	Pas de réduction Réduction correcte Réduction incorrecte Repli vers numérique

Tableau n° 33 : Tableau récapitulatif des stratégies typiques de résolution de T12

1) Démarche arithmétique :

La justification engagée est de nature pragmatique. La conclusion dépend du type d'écriture utilisé et du nombre d'exemples numériques choisis. Le résultat n'étant pas donné dans l'énoncé, il est nécessaire de prendre au moins deux exemples pour faire une conjecture ou pour conclure une preuve pragmatique.

Nous distinguons deux cas en fonction du type d'écriture, l'écriture pas à pas en succession d'opérations ou l'écriture globale linéaire. Nous réalisons cette distinction vu le public étudié. Ce détail est mineur par rapport au choix déterminant qu'est celui de l'écriture générique.

• Ecriture pas à pas en succession d'opérations : nous envisageons encore deux cas selon la correction de l'écriture :

- dans un premier cas, l'écriture est incorrecte vis à vis de l'égalité et nous parlons d'"écriture écriture pas à pas en succession d'opérations enchaînée".

- dans un deuxième cas, l'écriture est correcte et nous parlons d'"écriture pas à pas en succession d'opérations séparée".

Le statut attribué au signe d'égalité est celui de signe d'effectuation d'un calcul. Par exemple, avec les trois entiers consécutifs 4, 5, 6 nous obtenons :

- avec l'écriture pas à pas en succession d'opérations séparée :

5^2=25; 4x6 = 24; 25 - 24 = 1

- avec l'écriture pas à pas en succession d'opérations enchaînée :

5^2=25 - 4x6 = 1

Dans ce cas, l'écriture est incorrecte vis à vis de l'égalité.

• Ecriture globale linéaire : l'élève écrit 5^2-4x6 = 1 avec l'exemple cité ci-dessus. L'enchaînement opératoire proposé ne nécessite pas de distinguer l'écriture parenthésée ou non parenthésée.

Les règles de conversion utilisées pour passer du registre du langage naturel au registre des écritures numériques peuvent être incorrectes. Dans ce cas, la stratégie de calcul conduit à une impasse si le calcul est réalisé sur plusieurs exemples ou bien à une conclusion fausse.

Nous ne cherchons pas à détailler tous les cas envisageables. Nous citons un cas qui nous semble être particulièrement fréquent : le calcul réalisé ne respecte pas l'ordre des opérations, par exemple,
4x6 - 5^2 : "produit des deux extrêmes - carré du médian".

2) Démarche algébrique :

C'est une justification intellectuelle qui est engagée. Nous envisageons deux principaux types de traitement selon que l'écriture générique soit utilisé ou non :

• L'écriture générique n'est pas utilisée :

Ce traitement conduit à une impasse dans le cadre algébrique.

Dans le cas de l'écriture linéaire globale, lorsque l'interprétation de l'énoncé est correcte, on obtient l'expression b^2-ac avec a, b, c, trois nombres entiers consécutifs. L'algèbre permet de nommer les nombres entiers consécutifs et ne conduit pas à exprimer une relation entre eux. Nous retrouvons une fonction apparente attribuée à l'algèbre par certains élèves. Un des moyens de sortir de l'impasse est de substituer des valeurs numériques aux lettres et de se replier vers une preuve pragmatique. L'activité algébrique est alors assimilée à substituer des valeurs numériques aux lettres.

• L'écriture générique est utilisée :

Ici, le calcul algébrique est exploité comme langage exprimant des propriétés numériques et joue le rôle déterminant qui lui est imparti. Les différents types d'écriture cités précédemment peuvent être envisagés. Les plus probables sont l'écriture globale linéaire parenthésée ou non parenthésée.

- Ecriture linéaire globale parenthésée :

x un entier, x+1 son consécutif, x+2 le consécutif de x+1, le résultat de l'enchaînement opératoire est traduit par $(x+1)^2 - x(x+2)$

Il est possible d'écrire les entiers consécutifs symétriquement par rapport au terme médian, c'est-à-dire, si x un entier, x-1 est le précédent de x, x+1 est le consécutif de x et le résultat de l'enchaînement opératoire est traduit par $x^2 - (x-1)(x+1)$

Deux cas peuvent se produire selon que le traitement algébrique soit correct ou non :

a) Dans le cas d'un développement correct, l'expression algébrique est égale à 1. On a effectivement prouvé que, pour trois entiers consécutifs, la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième est égal à 1.

• Soit la résolution est terminée : nous disons que c'est un "traitement algébrique correct" et conforme à la solution attendue. L'algèbre sert d'outil pour prouver une propriété générale.

• Soit l'élève éprouve le besoin de vérifier dans le cadre numérique : nous disons que c'est un "traitement algébrique correct avec repli vers le numérique". Ici le calcul algébrique est utilisé pour prouver par respect du contrat mais le sens est vraiment donné par les calculs numériques.

b) Un traitement algébrique incorrect, est lié à l'utilisation, soit de règles de formation incorrectes, soit de règles de traitement incorrectes. Dans ce cas, le calcul conduit à une impasse dans le cadre algébrique. Dans ce cas, un repli vers le numérique peut aussi être envisagé.

Indiquons une des règles incorrectes prévisibles : $(a+b)^2$ se développe en a^2+b^2 Nous avons déjà appelé cette règle formelle incorrecte "fausse linéarité du carré".

- Ecriture linéaire globale non parenthésée : elle peut garder un sens correct ou non (cf chapitre 3). Dans le premier cas, on se ramène à l'étude précédente. Dans le deuxième cas, les calculs sont incorrects.

• *Analyse a posteriori*

1) La structure d'analyse permet de décrire les stratégies de résolution des élèves et les nombreux types de traitement algébriques mis en jeu. Elle permet aussi de mettre en évidence les rôles différents que les élèves peuvent attribuer au calcul algébrique en liaison avec la conception qu'ils se font de l'activité algébrique.

2) En revanche, les valeurs du critère *type de conversion* doivent être complétées :

- la possibilité d'une écriture générique surcharge les types d'écriture mis en évidence dans le "prestidigitateur",

- la confusion entre les termes "différence", "produit", "carré" : nous ne attendions pas à ces conversions incorrectes.

Donnons en deux exemples :

- confusion entre produit et somme avec une écriture pas à pas en succession d'opérations : $4^2=16$, $3+5 = 8$,

- confusion entre différence et somme et avec une écriture globale linéaire : $4^2 + 3x5$.

Remarquons que l'ensemble des valeurs locales définies préalablement pour le critère *type de conversion* reste relativement stable.

• *Grille d'analyse de T12*:

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Traitement algébrique	**Type de traitement algébrique** via le type de tâche Tâche d'ordre numérique Reproduction tâche formelle niv1 Production d'une expression Outil de preuve	Correct, incorrect, non traité
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Nombre Indéterminée
	Statut des expressions	Structural Procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	Correct Confusion entre "différence", "somme", "produit" Ordre incorrect des opérations Ecriture pas à pas en succession d'opérations enchaînée Ecriture pas à pas en succession d'opérations séparée Ecriture linéaire globale Ecriture linéaire globale non générique Ecriture linéaire globale générique
	Type de formation	Correct Sans parenthèse Carré glissement
	Type de traitement	Fausse linéarité carré Carré simple produit
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme : - pour exprimer une propriété - pour prouver Non conforme : - pour substituer - pour nommer - liée au contrat
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification	Preuve pragmatique Preuve intellectuelle : Appel au numérique Appel au niveau légal Appel à des règles opératoires Appel au calcul algébrique

Tableau n° 34 : Grille d'analyse de la tâche T12

Tâche T13 :

Nous avons déjà analysé longuement ce problème dans le chapitre 3. L'analyse a posteriori a permis de retrouver les solutions identifiées a priori. La lecture des productions des élèves a bien montré le rôle et l'articulation des différents facteurs intervenant dans l'activité mathématique.

Les solutions obtenues en devoir à la maison en cours d'année scolaire sont plus riches que celles obtenues pendant le test. Dans le premier cas, nous voyons apparaître des comportements liés au contrat didactique explicité dans la classe de Première G.

Cette analyse met bien en évidence les différentes fonctions que les élèves peuvent attribuer localement au calcul algébrique en liaison avec la conception qu'ils se font de l'activité algébrique et le contexte de l'énoncé.

• *Grille d'analyse de T13* :

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Traitement algébrique	**Type de traitement algébrique** via le type de tâche Reprod. tâche d'ordre numérique Reproduction tâche alg. niv1 Trad/production d'une expression Outil de preuve	Correct, incorrect, non traité
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Inconnue Nombre généralisé
	Objets et statut des objets	Expression algébrique Equation Structural Procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion entre registre algébrique et registre du langage naturel	Ecriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations Ecriture pas à pas séparée en succession d'opérations Ecriture linéaire globale non parenthésée Ecriture linéaire globale parenthésée
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Correct Sans parenthèse Désassemblage Assemblage final
	Type de traitement	Correct Calcul avec mémoire Calcul sans mémoire Regroupement de termes Erreur recopie Règle transposition multiplicative
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour substituer nombres dans formule - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre pour résoudre équation - algèbre pour répondre au contrat
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification	Appel à argumentation Appel à exemples (pragmatique) Appel au contexte Appel à calculatrice Appel au numérique Appel à des règles Appel au légal Appel à réécriture Appel au calcul algébrique

Tableau n° 35 : Grille d'analyse de la tâche T13

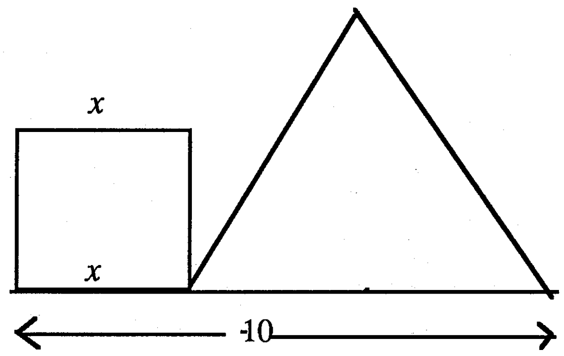
IV.5 LES TÂCHES T8, T17 ET T19

IV.5.1 Enoncés

Tâche T8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000^F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

Tâche T17 :



Déterminer x de telle sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

Tâche T19 :

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150^F le voyage aller et retour. Elle consent aux étudiants une réduction de 20% du prix du billet. D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400^F par an, on paie le billet à moitié prix. A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?

IV.5.2 Analyse des tâches

• *Solutions attendues*

Les tâches T8 et T19 sont des exercices familiers en BEP. Le premier met en jeu une situation de proportionnalité. Le deuxième est un problème du premier degré : les élèves de BEP savent résoudre le problème algébriquement et graphiquement. En BEP, l'énoncé est généralement proposé moins ouvert et découpé en questions intermédiaires.

La tâche T17 recouvre une situation géométrique utilisant la notion de périmètre.

Pour T8 nous attendons soit une solution utilisant des techniques numériques standard, soit la recherche, connaissant 3 nombres, de la quatrième proportionnelle. Cette démarche est fréquemment utilisée en BEP tertiaire.

Pour les deux autres problèmes, nous attendons une solution algébrique obtenue après mise en équation du problème. Pour T19, une solution graphique peut être proposée en liaison avec une résolution dans le cadre fonctionnel.

• *Objectifs spécifiques à ces tâches diagnostic*

Plusieurs objectifs sont visés :

• identifier une démarche de résolution privilégiée entre les démarches arithmétique et algébrique ;

• étudier la familiarité des élèves à reconnaître et à exprimer un phénomène de proportionnalité ; nous identifions les formes de représentation utilisées et les objets mathématiques correspondants ;

• étudier la familiarité des élèves à utiliser le langage algébrique pour traduire des situations du premier degré ; en particulier, nous étudions la capacité des élèves à mobiliser les structures de données adaptées à la résolution (ici, inconnue ou variable) ;

• identifier, selon la démarche, les règles de conversion utilisées entre le registre du langage naturel et celui des expressions numériques, entre le registre du langage naturel et celui des expressions algébriques. Etudier si le contexte de l'énoncé peut provoquer une interprétation incorrecte ;

• caractériser le rôle attribué à l'algèbre par les élèves et le mettre en relation avec les méthodes utilisées dans l'enseignement reçu antérieurement ;

• caractériser les types de justification utilisés pour la tâche 19.

• *Grille descriptive des tâches*

Lorsqu'un critère est spécifique d'une tâche, nous notons la tâche entre parenthèse.

Composantes	Critères	Valeurs globales
Traitement algébrique	Réalis. de tâche d'ordre numérique	Oui (pour T8)
	Repr . de tâches formelles niv1	Oui
	Repr. de tâches formelles .niv2	Non
	Interprétation d'une expression	Oui
	Branchement sur formule	Non
	Production ds contexte familier	Oui (T8, T19)
	Production ds contexte non familier	Oui (T17)
	Utilisation de l'algèbre pour prouver	Oui
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique (T8)* Algébrique (T8*,T17, T19)
	Statut du signe d'égalité	Annonce résultat/équivalence
	Statut des lettres	Inconnues Variables (T19)
	Objet et statut des expressions	Expression algébr. 1^{er} degré Fonctions linéaires ou affines (T19) Equations du 1er degré Structural/procédural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	$RF(Z, x, (), +,-,x,/,\text{implicite})$
	Type de traitement	$RT_{\text{développement}}$ $RT_{\text{résolution équations du 1er degré}}$
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres	Registres	Registre langage naturel vers registre des écritures algébriques Registre du dessin vers registre des écritures algébriques T17
	Type de conversion	Congruent

Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	Mathématiser une situation extra-mathématique et la résoudre (T8,T19) Mathématiser une situation intra-mathématique et la résoudre
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel au numérique* (T8) Appel au calcul algébrique Appel à la résolution graphique (T19)

Tableau n° 36 : Grille descriptive des tâches T8, T17 et T19

IV.5.3 Analyse des solutions envisageables

Tâche T8 :

C'est un problème classique de partage entre trois personnes proportionnellement à trois nombres (ici leur nombre d'enfants). C'est une situation de proportionnalité. On connaît la somme perçue par l'un d'eux et on peut calculer le coefficient de proportionnalité.

Les solutions dépendent de la reconnaissance d'une situation de proportionnalité, de l'interprétation qui en est faite puis du procédé et des objets mathématiques utilisés pour traduire la relation de proportionnalité.

1) L'élève reconnaît une situation de proportionnalité :

Nous organisons l'analyse autour de l'identification a priori des deux stratégies typiques de résolution, c'est-à-dire arithmétique ou algébrique et du traitement réalisé.

a) Démarche arithmétique : nous distinguons trois types de traitement.

a.1) la méthode numérique standard de recours à l'unité : le coefficient de proportionnalité est calculé et représente la somme reçue par enfant. Les deux sommes recherchées sont calculées directement en multipliant la somme reçue par enfant respectivement par 2 puis par 3.

Il se peut qu'une lettre soit utilisée pour désigner les sommes recherchées. Les lettres jouent alors le rôle d'étiquettes.

a.2) la méthode numérique standard de multiplication par le rapport : une situation de proportionnalité est associée à une proportion. La somme du premier employé est égale à : 12000 x 2/3, celle du troisième est égale à 12000 x 4/3.

a.3) une méthode artisanale : la somme recherchée pour quatre enfants (respectivement pour deux) est calculée en additionnant (respectivement en retranchant) à 12000 la somme reçue par enfant.

b) Démarche algébrique : nous distinguons aussi deux types de traitement.

b.1) La situation de proportionnalité est exprimée par une égalité entre rapports. Le calcul demandé se ramène au calcul de la quatrième proportionnelle connaissant 3 nombres en proportion.

Ici, deux lettres désignent respectivement les sommes recherchées. Ce sont des *inconnues*. Le schéma de "mise en équation" peut être réalisée en utilisant ou non un tableau de proportionnalité. On obtient, x et y désignant les deux sommes recherchées, les équations suivantes à résoudre :

$x/2 = 12000/3 = y/4$ d'où $x = 12000\text{x}2/3$, $y = 4000\text{x}4$. La résolution renvoie aux règles de traitement définies pour T7.3.

b.2) Cette situation de proportionnalité est mise en rapport avec une fonction linéaire. La mise en équation conduit à exprimer la situation par la fonction linéaire, qui à x nombre d'enfants associe l'image $y=4000x$, somme reçue pour x enfants. x a le statut de variable. Le calcul de la somme est envisagé pour

x enfants, x prenant ici les valeurs 2 puis 4. Le résultat peut être donné sous forme de tableau de valeurs. Ici, vu les usages, on ne s'attend pas majoritairement à ce type de solution, recourant à l'explication d'une relation fonctionnelle.

2) L'élève ne reconnaît pas une situation de proportionnalité ou la traduit incorrectement :

Dans le cas d'une stratégie algébrique, une mise en équation incorrecte est alors réalisée.

• *Analyse a posteriori*

L'analyse des productions des élèves a permis de retrouver les deux stratégies arithmétique et algébrique et les mêmes types de traitement. Aux différents types de traitement identifiés a priori, nous ajoutons une mise en équation incorrecte avec rapports et somme.

C'est le cas pour Nathalie qui a raisonné par analogie avec un problème semblable où c'est le total des trois sommes perçues qui est donné et non une des sommes perçues par les personnes.

Elle obtient l'équation "$\frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{4} = 12000$" avec A, B, C les sommes recherchées.

• *Grille d'analyse de T8*

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Etiquette Inconnue Variable
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	Recours à l'unité Multiplication par un rapport Fonction linéaire Quatrième proportionnelle Equation avec rapports et somme Equation incorrecte
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre pour résoudre équation proportion
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel à calcul numérique Appel à des notions et des propriétés mathématiques Appel à schéma de calcul et de résolution Appel au calcul algébrique

Tableau n° 37 : Grille d'analyse de la tâche T8

Tâche T17 :

La mise en équation d'une situation géométrique constitue l'objectif principal de cet exercice. Le problème se ramène à la résolution d'une équation du premier degré, celle résolue dans la tâche 7, question 3. Nous pouvons ainsi croiser les solutions dans des contextes différents. Nous attendons une solution algébrique. Cette démarche est sous-entendue par l'énoncé qui désigne par x l'une des deux inconnues.

Indiquons les stratégies de nature arithmétique et algébrique envisageables :

1) Stratégie de nature arithmétique par essai-erreur : elle conduit à une impasse car la solution du problème n'est ni entière, ni décimale.

2) Stratégie de nature algébrique : nous retrouvons les différentes étapes de la résolution, c'est-à-dire, le choix des inconnues, la mise en équation, la résolution de l'équation, la conclusion avec retour au contexte et aux conditions initiales.

Enumérons a priori des solutions erronées qui peuvent être réalisées dans les différentes étapes de la résolution.

• Choix des inconnues

Ce problème met en jeu deux inconnues liées par une relation affine. La somme des longueurs du côté du carré et du côté du triangle est égale à 10. L'inconnue x longueur du côté du carré est donnée. Certains élèves éprouvent des difficultés à exprimer la deuxième inconnue en fonction de x.

Deux raisons expliquent ces difficultés :

- il est nécessaire de transformer une égalité exprimant la relation entre les deux inconnues. Pour ceci, le signe égal doit avoir le statut de relation d'équivalence ;

- il s'avère difficile pour certains élèves de décomposer un problème en plusieurs relations, difficulté déjà soulignée dans son mémoire de DEA par E. Hébert [Hébert, 1992].

Nous étiquetons cette erreur "relation incorrecte entre inconnues"

Donnons des exemples d'expressions incorrectes relatives à la longueur des côtés du triangle :

$10-x$ pour la longueur du côté du carré et $x-10$ pour la longueur du côté du triangle équilatéral.

x pour la longueur du côté du carré et 10 pour la longueur du côté du triangle équilatéral.

Si y est la longueur du côté du triangle équilatéral, $x=10-y$ est la longueur du côté du carré et $y=10-x$ est la longueur du côté du triangle équilatéral (cercle vicieux conduisant à une impasse).

Soulignons qu'il est possible de conserver deux inconnues et de se ramener à la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

• Mise en équation :

- La mise en équation s'appuie sur des connaissances géométriques élémentaires qui ne sont pas forcément disponibles. Par exemple, certains élèves peuvent avoir oublié ce qu'est un triangle équilatéral, confondre périmètre et aire.

Dans le cadre géométrique, la confusion entre périmètre et aire n'est pas une erreur de conversion. Mais pour retenir cette erreur, abusivement, nous l'étiquetons comme une conversion incorrecte.

- La mise en équation nécessite d'exprimer algébriquement le périmètre d'un carré et d'un triangle équilatéral. Indiquons une écriture incorrecte non anecdotique : $4+x$ au lieu de $4x$, $3+x$ au lieu de $3x$ pour indiquer qu'on additionne 4 fois x. Nous la codons "écriture additive incorrecte"

- L'énoncé indique "que le carré et le triangle aient le même périmètre". Certains élèves ne comprennent pas cette phrase et ne l'interprètent pas comme "le périmètre du carré et le périmètre du triangle sont égaux".

- La traduction peut s'effectuer dans un système non parenthésé. Nous nommons cette règle conversion "sans parenthèse".

• Résolution :

- Pour les règles de transformation incorrectes, nous renvoyons à l'analyse faite pour la tâche T7 question3.

- Dans le cas d'une mise en équation inachevée, pour une des raisons soulignées précédemment, on peut envisager un repli vers le numérique.

Si un élève a trouvé $4x$ comme périmètre du carré, il peut remplacer x par des valeurs numériques et par essai-erreur tenter de trouver une valeur numérique pour laquelle les conditions de l'énoncé sont remplies. L'algèbre reste disponible pour substituer des nombres dans une formule. L'élève se replie sur le numérique.

• *Analyse a posteriori*

Nous avons été surprise par le très faible taux de réponse. La donnée d'une situation géométrique, même très simple, crée un obstacle. Majoritairement les solutions proposées sont de nature algébrique. Leur analyse recouvre les difficultés analysées a priori.

• *Grille d'analyse de T17* :

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Nombre Inconnue
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	Relation incorrecte entre inconnues Confusion aire périmètre Ecriture additive incorrecte Sans parenthèse
Gestion dans registre algébrique	Type de traitement	Règ de transp additive($ax=b \longrightarrow x=b-a$) Règ de transp mult.($ax=b \longrightarrow x=b/(-a)$) Règle d'inversion ($ax=b \longrightarrow x=a/b$) Erreur de calcul
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre pour résoudre type d'équation connu
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel au numérique Appel à des procédures Appel au calcul algébrique

Tableau n° 38 : Grille d'analyse de la tâche T17

Tâche T19 :

Nous avons déjà analysé cette tâche dans le chapitre 3.

L'analyse a posteriori a fait apparaître d'autres solutions liées à une interprétation incorrecte de l'énoncé en liaison avec le contexte, déjà mise en évidence.

Une interprétation incorrecte de l'énoncé consiste à considérer l'abonnement comme global. On n'achète pas de billet en plus de l'abonnement. Cette interprétation permet une résolution arithmétique directe de la tâche car la situation se ramène à une situation de proportionnalité.

Il peut être traité de deux façons multiplicativement ou par division :

- multiplicativement : on détermine par essais le nombre de voyages pour lequel la formule d'abonnement est plus intéressante que l'autre.

- par division: on divise l'abonnement par le prix du billet réduit. C'est une méthode purement arithmétique.

Nous nommons respectivement ces deux traitements "raccourci incorrect multiplicatif", "raccourci incorrect par division".

• *Grille d'analyse de T19* :

Composantes	Critères	Valeurs de critères
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution	Arithmétique Algébrique
	Statut du signe d'égalité	Annonce de résultat Relation d'équivalence
	Statut des lettres	Grandeur Inconnue Variable
	Objets et statut des objets	Expressions algébr. 1er degré Equations/inéquations du 1er degré Fonctions affines et linéaires Equations de droite Structural/procédural
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres sémiotiques	Type de conversion	Traduction faussement congruente Ecriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations Ecriture pas à pas séparée en succession d'opérations Ecriture linéaire globale abréviative parenthésée ou non Ecriture linéaire globale multiplicative Ecriture linéaire globale parenthésée ou non Toutes var. visuelles incorrectes Sens d'inclinaison incorrect Angle incorrect Position incorrecte
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Correct Sans parenthèse
	Type de traitement	(dans le numérique) Par essais Raccourci incorrect multiplicatif Raccourci incorrect par division (dans l'algébrique) Calcul avec mémoire Calcul sans mémoire Règle de transp add(ax=b—>x=b-a) Règle de transp mult(ax=b—>x=b/(-a) Règle d'inversion (ax=b—>x=a/b) Règle ordre et nombre négatif
Fonction de l'algèbre	Fonction apparente de l'algèbre	Aucune Conforme Non conforme : - algèbre pour substituer nombres dans formule - algèbre pour nommer - algèbre pour sténographier - algèbre liée au contrat didactique
Rationalité algébrique	Type de justification	Appel au contexte Appel à calculatrice Appel à numérique Appel au calcul algébrique Appel au cadre fonctionnel Appel à la représentation graphique

Tableau n° 38 : Grille d'analyse de la tâche T19

V. SYNTHÈSE

Nous retrouvons des résultats semblables à ceux obtenus lors du premier test :

1) Les composantes et critères associés à la structure d'analyse multidimensionnelle permettent de décrire les solutions effectives des élèves relatives aux trois classes de tâches, en mettant en évidence les différents comportements et les différentes formes de connaissances algébriques.

2) Comme dans le premier test, il a été nécessaire de rajouter quelques valeurs locales à certains critères mis en jeu dans des exercices faisant apparaître des spécificités non encore étudiées. Mais ce deuxième test semble confirmer l'hypothèse initiale : l'ensemble des valeurs locales relatives à un critère, pour des types de tâches analogues, semble rester relativement stable. L'ajout de valeurs semble ne pas être permanent.

3) La structure d'analyse semble bien jouer le rôle que nous lui avions attribué initialement. Le deuxième test semble confirmer, qu'à partir du recoupement des descriptions des productions de chaque élève aux différentes tâches, il est possible de mettre en évidence des cohérences de fonctionnement. Nous allons donner dans le chapitre 6, les notions nécessaires à la définition des profils d'élèves et montrer comment décrire ces cohérences à l'aide de modalités de fonctionnement relatives aux composantes de caractérisation.

CHAPITRE 5

APPLICATION A L'ÉTUDE DES RAPPORTS À L'ALGEBRE DANS LES DEUX INSTITUTIONS

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au savoir enseigné dans les classes de B.E.P. tertiaire, de seconde indifférenciée et de Première G d'adaptation.

Dans le paragraphe I, nous réalisons une étude comparative des programmes des classes de B.E.P. tertiaire et de seconde indifférenciée concernant les parties communes des programmes. Nous nous appuyons sur deux versions des programmes de BEP tertiaire. Nous mettons en évidence les objets d'enseignement commun en algèbre, ceux qui sont distincts. Puis en comparant les objectifs d'enseignement et les commentaires des programmes, nous mettons en évidence quelques différences subtiles entre les rapports institutionnels aux objets de l'algèbre communs aux deux programmes. Pour mener à bien cette analyse, nous avons besoin de faire une analyse a priori des mathématiques financières enseignées en BEP tertiaire.

Ensuite dans le paragraphe II, nous complétons cette étude comparative des programmes par une analyse des sujets de BEP tertiaire donnés de 1989 à 1991 ainsi que par celle des exercices de l'EVAPM de seconde indifférenciée correspondant au domaine algébrique et fonctionnel.

Dans le paragraphe III, nous analysons des cahiers d'élèves de B.E.P tertiaire pour dégager des caractéristiques de l'enseignement reçu par chaque élève et plus particulièrement du rapport institutionnel à certains objets de l'algèbre.

Dans le paragraphe IV, nous mettons en relation les résultats de l'analyse précédente avec les objectifs visés par le programme de mathématiques de Première G.

I. LES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES DE SECONDE INDIFFÉRENCIÉE, DE BEP TERTIAIRE

I.1 ETUDE COMPARATIVE DES PROGRAMMES DE SECONDE ET DE B.E.P. TERTIAIRE.

Rappelons d'abord le contexte de la recherche.

Les élèves qui ont participé à la recherche sont rentrés en Première G d'adaptation soit en Septembre 1991, soit en Septembre 1992. C'était une période transitoire : le programme de mathématiques de BEP tertiaire en vigueur était celui réédité en 1983. Mais dans la pratique des classes, ce programme n'était plus vraiment appliqué. Les manuels de B.E.P avaient anticipé le nouveau programme et le faisait vivre depuis plusieurs années.

En revanche, les élèves venant de Seconde indifférenciée qui sont rentrés en Première G ont suivi le nouveau programme de mathématiques effectif à la rentrée de Septembre 1990.

Nous remarquons que le texte du programme de B.E.P. réédité en 1983 ne contient aucun commentaire. Sa rédaction est typique de celle des années 1970 : l'accent est mis sur le contenu et non sur l'organisation de l'enseignement ou les types d'activité proposés en classe. En revanche, la description du programme de Seconde indifférenciée de l'édition 1990 est plus importante. Le texte du programme contient, en plus des contenus mathématiques, des instructions de programme constituées des objectifs du programme, de l'organisation de l'enseignement, des commentaires sur les objets d'enseignement et sur leur emploi. Cette évolution était déjà visible dans la réédition de 1987 des programmes de Seconde indifférenciée.

En conséquence, il nous a semblé nécessaire d'étudier à la fois les anciens programmes de BEP tertiaire et les nouveaux, tout en accordant cependant plus d'importance aux nouveaux programmes. Nous en tenons compte pour mettre en évidence, dans les parties du programme se rapportant à notre recherche, les objets d'enseignement communs aux programmes de seconde indifférenciée et de BEP tertiaire et ceux qui sont distincts.

I.1.1 Les programmes officiels de BEP tertiaire dans leur version 1983

I.1.1.1 Les objets d'enseignement mathématiques

Nous présentons dans un tableau à deux colonnes les textes des programmes en BEP tertiaire et en Seconde indifférenciée, en mettant en italique les parties distinctes.

Cette mise en relation tient compte des horaires et de l'organisation de l'enseignement de mathématiques qui sont distincts dans les deux classes. Le programme est réparti sur deux années en B.E.P. tertiaire, l'horaire d'enseignement étant de trois heures (deux pour la section CAS) par semaine en première année et deux heures par semaine en deuxième année. L'horaire en seconde est de quatre heures trente par semaine.

Les objets d'enseignement communs aux deux classes appartiennent aux trois rubriques *Calcul littéral et calcul numérique, Systèmes d'équations linéaires et Fonctions* du programme de Seconde indifférenciée, aux deux rubriques *Calcul numérique et calcul algébrique, Fonctions numériques, Equations numériques* en première année de BEP et au chapitre *Fonctions d'une variable réelle* en deuxième année.

Version 1983 du programme officiel de mathématiques en BEP tertiaire	Version 1990 du programme officiel de mathématiques en Seconde indifférenciée
Première année **I. Calcul numérique et calcul algébrique** Le professeur introduira la pratique au fur et à mesure des besoins ; autant que possible ces notions seront motivées. Révision du calcul algébrique (N, Z, Q, R) Système de numération Tables numériques, carré, cube, racine carrée... Interpolation	**I. Problèmes numériques et algébriques** **1. Calcul littéral et calcul numérique** a) Calcul sur les puissances Formules : $(ab)^m = a^m b^m$ $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n = a^{mn}$, où m et n sont des entiers relatifs. **b) Opérations sur les inégalités** Signe de $ax+b$. Signe d'un produit, d'un quotient Passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée dans une inégalité entre deux nombres positifs. Position relative de a et a^2, selon que $a \geq 1$ ou $0 \leq a \leq 1$. **c) Valeur absolue, intervalles, approximations.** Valeur absolue, distance Inégalité triangulaire : $\lvert a+b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ Valeur absolue d'un produit, d'un quotient Intervalles, notations des divers types d'intervalles Pratique sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre a : lorsque $b \leq a \leq c$, on dit que b et c encadrent a. (...) **Travaux pratiques** Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou inéquation à une inconnue à coefficients numériques. Exemples simples d'emploi de factorisation pour leur résolution. Pratique des opérations portant sur des nombres (puissances, fractions, radicaux ...). L'encadrement de l'opposé d'un nombre, de la somme de deux nombres, du produit de deux nombres positifs.
II. Fonctions numériques. Equations numériques Fonction numérique d'une variable réelle conçue comme une application d'une partie de R vers R (distinction entre notation f et $f(x)$). Sens de variation Fonction linéaire $x \longrightarrow ax$ critères de linéarité) : grandeurs directement proportionnelles Fonction affine $x \longrightarrow ax + b$ Fonction $x \longrightarrow a/x$: grandeurs inversement proportionnelles Equations du premier degré à une inconnue dans R : cas général Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues dans R Inéquations du premier degré à une inconnue dans R (cas général)	**2. Systèmes d'équations linéaires** Résolution numérique et étude graphique de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques. Critère d'existence et d'unicité de la solution. **Travaux pratiques (...)** **II. Fonctions** **1. Génération et description des fonctions** Exemple de modes de génération de fonctions. Exemples de description d'une situation à l'aide d'une fonction. Représentation graphique d'une fonction dans un repère (orthonormal ou orthogonal) Parité, périodicité. Maximum, minimum d'une fonction. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes.

Deuxième année	
A) Mathématiques **I. Fonctions d'une variable réelle** 1. Notion de limite (tous les théorèmes relatifs aux limites sont admis). Nombre dérivé d'une fonction numérique d'une variable réelle. Fonction dérivée d'une fonction[1] Etude de la fonction $x \longrightarrow ax^2$. 2. Equation du second degré à une inconnue[2] (la résolution d'équation avec paramètre n'est pas au programme). **B) Calculs commerciaux** **I. Révision du cours première année** **II. Calculs commerciaux portant sur les prix et sur les taxes** **III. Intérêts simples, escompte, intérêts composés** 1° Intérêts simples. Formule générale : problèmes. 2° Escompte et crédit : a) Escompte commercial : pratique de l'escompte commercial : taux réel ou taux effectif d'escompte : Equivalence d'un capital à un autre capital : Equivalence d'un capital à un ensemble de capitaux : équivalence d'un ensemble de capitaux à un ensemble de capitaux. Bordereau d'escompte en (liaison avec l'informatique, ordinogramme). b) Autres modes courants de crédit : coût des crédits et taux annuels. 3° Comptes courants et crédits : (...) 4° Notions élémentaires sur les intérêts composés. **IV. Monnaies et changes** **V. Calculs numériques simples et calcul rapide**	**2. Fonctions usuelles** a) Variation et représentation graphique des fonctions : $x \longrightarrow ax+b$, $x \longrightarrow \lvert x \rvert$, $x \longrightarrow x^2$, $x \longrightarrow x^3$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$, $x \longrightarrow 1/x$ b) Etude des fonctions cosinus et sinus : périodicité, symétrie, sens de variation. Courbes représentatives. **Travaux pratiques (...)**

Tableaux n° 1 et 2 : Programmes de BEP Tertiaire (1983) et de Seconde indifférenciée (1990)

[1]Les dérivées ne seront étudiées que si le niveau de la classe le permet.
[2]Comme en classe de Seconde, on entraînera les élèves au calcul mental.

La majorité des objets d'enseignement relatifs à l'algèbre élémentaire sont communs aux deux classes (le calcul algébrique, les équations et inéquations du premier degré, les fonctions numériques, le sens de variation d'une fonction, les fonctions linéaires et affines, les fonctions $x \longrightarrow ax^2$, $x \longrightarrow a/x$, avec a réel, les systèmes d'équations linéaires).

Certains savoirs et savoir-faire sont développés en Seconde indifférenciée et non en BEP : les opérations sur inégalités, la valeur absolue, la parité et la périodicité des fonctions, les fonctions trigonométriques. En revanche, des notions mathématiques nouvelles sont présentes dans le programme de BEP tertiaire et non en Seconde indifférenciée : les notions de limite et de fonction dérivée d'une fonction, l'équation du second degré.

Les rédactions très différentes des deux programmes ne facilitent pas les comparaisons. Cette difficulté est d'ailleurs augmentée par la marque des années 1970 dans ceux de BEP. En apparence, il semble que le programme de mathématiques en BEP contient autant de notions mathématiques sinon plus que celui de Seconde indifférenciée dans les rubriques concernant le *Calcul littéral et calcul numérique,* les *Equations et Systèmes d'équations linéaires*, les *Fonctions*. Mais cette première approche ne permet pas de déterminer ce que recouvrent ces notions et donc de savoir quelle est la compétence algébrique effectivement visée dans chacune des institutions.

Nous voyons de plus apparaître dans le programme de BEP tertiaire un important paragraphe sur les calculs commerciaux. Ce paragraphe est une partie du programme de mathématiques de deuxième année de B.E.P. tertiaire. Les calculs commerciaux mettent en jeu un domaine mathématique spécifique, celui des mathématiques financières. Ces applications semblent jouer un rôle spécifique dans la formation des élèves et peuvent façonner de façon importante le rapport institutionnel à l'algèbre. Mais le rapport à l'algèbre en jeu dans les mathématiques financières n'apparaît pas de façon directement lisible dans la présentation des contenus dans le programme de BEP tertiaire. C'est pourquoi, il nous a semblé essentiel de porter une attention toute particulière à cette partie du programme. Nous consacrons donc un paragraphe à une étude a priori des problèmes de mathématiques dans ce domaine d'application.

I.1.1.2 Les mathématiques financières en B.E.P. tertiaire

Nous définissons a priori les spécificités des mathématiques financières enseignées en B.E.P. tertiaire. Cette étude, qui doit constituer un guide pour le lecteur lors de l'analyse des cahiers d'élèves qui suivra, est menée pour mettre en évidence différentes catégories de fonctionnement en algèbre mises en jeu dans les problèmes et qui ne sont pas visibles dans le programme.

Le paragraphe *calculs commerciaux* renommé "*exemples d'application dans le secteur tertiaire*" dans le nouveau programme comporte les thèmes suivants, *calculs commerciaux portant sur les prix et sur les taxes, monnaies et changes, intérêts simples, escompte, intérêts composés.* Le domaine mathématique qui traite des intérêts, de l'escompte est nommé communément le domaine des mathématiques financières.

En voici une définition donnée par M. Lauton [Lauton, 1994] :

"Les mathématiques financières constituent une branche des mathématiques appliquées servant à calculer des opérations portant sur des flux et des stocks monétaires, ainsi que sur leur rentabilité réelle ou espérée. Les mathématiques financières mettent en jeu l'argent, le temps et l'homme. Des conventions régissent les rapports entre l'argent et le temps. Les mathématiques financières se distinguent d'autres domaines en prétendant décrire une réalité basée sur des conventions, et non sur l'observation de la nature."

Etudions avec soin ce que recouvrent les problèmes dans un contexte financier en B.E.P. tertiaire.

a. Les problèmes dans un contexte financier

a.1 Le programme comporte d'abord les problèmes portant sur la formation des prix, sur les monnaies. Ces problèmes peuvent se ramener à des *situations de proportionnalité.* Prenons l'exemple des calculs de formation des prix. Ils se décomposent en deux phases, chacune donnant lieu en général, à un calcul de pourcentage. Voici les deux étapes et les principaux calculs en jeu :

Phase d'achat :

Prix d'achat net hors-taxe = Prix d'achat brut hors taxe - Réductions

Coût d'achat = Prix d'achat net hors-taxe + Frais d'achat

Phase de vente :

Prix de vente hors-taxe = Coût d'achat + Marge brute

Prise de vente taxe comprise = Prix de vente hors-taxe + T.V.A.

Donnons quelques exemples :

<u>Exercice 1</u> (Mathématiques BEP[1] p90 Edition Foucher 1986):

Un grossiste accorde à un commerçant une remise de 10% et un escompte de règlement de 2% sur les achats.

a) Sachant que le prix d'achat net est de 264,60^F, calculer son prix d'achat brut hors-taxe.

c) Pour obtenir son prix de vente taxe comprise, le commerçant applique le coefficient multiplicateur 2,06 au prix d'achat brut hors-taxe. Sachant que la TVA s'élève à 33 1/3%, calculer :

- le prix de vente taxe comprise,

- le prix de vente hors-taxe,

- le taux de marque appliqué par le commerçant.

Exercice 2 :

Un objet dont le prix de vente hors-taxe est 780^F laisse au commerçant un bénéfice de 20% du coût de revient. Calculer sur cet objet le coût de revient et le bénéfice du commerçant.

Exercice 3 :

Un commerçant achète une marchandise sur laquelle on lui accorde une remise de 5% et un escompte de 2%. Quel était le montant brut de cette marchandise pour laquelle 248,40^F de réductions totales ont été consenties ?

Tous ces problèmes mettent en jeu des calculs de *pourcentage*. Les problèmes de pourcentage entrent dans le cadre général des problèmes de proportionnalité mais leur résolution présente sans doute des spécificités. Dans son étude sur les pourcentages, P. Buisson [Buisson, 1981] propose une classification des problèmes de pourcentages et distingue

1) les trois problèmes élémentaires de pourcentage (*a%*):

1er type : calcul de l'image, $x \xrightarrow{a\%} ?$

2^{ième} type : calcul de l'antécédent, $? \xrightarrow{a\%} y$

3^{ième} type : calcul du taux de pourcentage, $x \xrightarrow{?\%} y$.

Indiquons dans un tableau les données, les inconnues et les outils mathématiques en jeu pour résoudre chaque type de problème.

Problème et inconnue	Données	Outils mathématiques
Calcul de l'image	Valeur initiale, pourcentage (coefficient proportionnalité	Multiplication
Calcul de l'antécédent	Valeur finale, pourcentage (coefficient proportionnalité	Opérateur inverse ou équation
Calcul du pourcentage	Valeurs initiale et finale	Equation, recherche de la 4^{ième} proportionnelle

Tableau n°3 : Les trois problèmes élémentaires de pourcentage

Les outils mathématiques utilisés relèvent du *calcul numérique ou algébrique.*

2) Sur ces trois problèmes élémentaires peuvent se greffer des problèmes de hausse et de baisse de pourcentage, des problèmes de hausse et/ou de baisse successives de pourcentage (composition d'opérateurs multiplicatifs). Ces paramètres vont contribuer à créer différents niveaux de complexité dans la résolution des problèmes.

a.2 Les problèmes de mathématiques financières constituent les autres problèmes du secteur financier étudiés dans le programme de BEP tertiaire. M. Lauton a proposé dans sa thèse [Lauton, 1994] une typologie des problèmes de mathématiques financières. Elle identifie trois types de problèmes :

- 1er type : <u>rechercher un capital</u> :
  * trouver un capital acquis,
  * trouver un capital initial,
  * trouver une suite d'annuités (très marginal ou non présent en B.E.P. tertiaire)
- 2^{ième} type : <u>rechercher un taux</u>
- 3^{ième} type : <u>trouver une durée</u>.

Les problèmes peuvent être proposés avec des intérêts simples ou des intérêts composés. Donnons quelques exemples :

<u>Exercice 4</u> :

Calculer le capital placé pour obtenir une valeur de 8932^F après 120 jours à un taux de 8%.

<u>Exercice 5</u> (ex p 100 Mathématiques BEP2, Ed Nathan) :

A quel taux est escompté un effet dont la valeur actuelle est 4295F et dont la valeur nominale dans 30 jours sera 5000F.

<u>Exercice 6</u> (ex p 101 Mathématiques BEP2, Ed Nathan) :

Le 14 Décembre, la banque verse 8640F au possesseur d'un effet de commerce dont la valeur nominale est 9000F.

Sachant que le taux d'escompte est 16%, quelle est son échéance ?

<u>Exercice 7</u> (ex p 101 Mathématiques BEP2, Ed Nathan) :

Pour acheter un appareil ménager, un client se voit proposer deux modes de paiement :

1. paiement comptant de 4590F

2. Versement immédiat de 1200F et le solde en 6 traites mensuelles d'égale valeur nominale, la première payable dans un mois.

Le taux d'escompte pratiqué étant de 20%, quelle est la valeur nominale de chaque traite ?

Exercice 8 (cahier de Denis)

Un capital de 10000F a été divisé en deux parts. La première est placée à 8% et la deuxième à 9%. L'intérêt produit par la première part en 90 jours est le double de l'intérêt produit par la seconde en 60 jours.

1. Calculez les deux parts et les deux intérêts.

2. Exprimez les deux intérêts i1 et i2 en fonction du nombre de jours de placement x et représentez sur un même graphique les variations de i1 et i2 en fonction de x (1cm = 10 jours, 1 cm = 20F).

3. Déterminez graphiquement le temps à l'issue duquel l'intérêt du 1er équivaudra à l'intérêt produit par le second au bout de 60 jours.

Tous ces problèmes mettent en jeu un vocabulaire lié à l'économie, au langage financier et au droit.

Les problèmes nécessitent la mise en œuvre de notions et d'outils économiques[3], d'outils mathématiques pour leur résolution. En B.E.P. le type d'intérêt utilisé dans les problèmes est l'intérêt simple.

Résumons dans un tableau, les données, les notions spécifiques des mathématiques financières utilisées et les outils mathématiques en jeu pour résoudre chaque type de problème [Lauton, 1994].

Problème	Données constantes	Outil spécifique	Outils mathématiques
Déterminer capital acquis	Capital initial, taux , durée	Valeur acquise	Opérations, proportionnalité
Déterminer capital initial	Capital final, taux , durée	Valeur actuelle	Opérations, proportionnalité
Détermination d'un taux	Capital initial, capital final, durée	Valeur acquise ou actuelle	Equations du 1er degré
Détermination d'une durée	Capital initial, capital final, taux	Valeur acquise ou actuelle	Equations du 1er degré

Tableau n°4 : Les trois types de problèmes financiers

Les outils mathématiques utilisés relèvent donc aussi du *calcul numérique ou algébrique.*

Pour terminer, à chaque problème financier, nous associons a priori un degré de complexité qui dépend du (ou des) types de traitement algébrique en jeu et du nombre d'étapes nécessaires[4] à sa résolution. Récapitulons dans ce tableau les cas envisagés :

[3]Pour une étude détaillée, on peut se reporter à la thèse de M. Lauton [Lauton, 1994].

[4]Par exemple, application successive d'une même formule, reformulation et traduction de l'énoncé, ...

Nombre d'étapes / Type(s) de traitement algébrique	1	≥ 1
Reproduction d'une tâche d'ordre numérique	Degré de complexité 0	
Branchement formule et résolution d'équation	Degré de complexité 1	Degré de complexité 2
Production guidée dans un contexte familier et résolution d'équation		Degré de complexité 3

Tableau n°5 : Les degrés de complexité d'un problème financier

- On résout les exercices 4, 5 et 6 par un branchement direct sur une formule : ils sont de degré de complexité 1,

- L'exercice 7 (problème d'équivalence de capitaux) nécessite plusieurs fois l'application d'une même formule : il est de degré de complexité 2,

- L'exercice 8 met en jeu une production guidée dans un contexte familier : il est de degré de complexité 3.

b. Les démarches de résolution envisageables

Dans les problèmes qui mettent en jeu la recherche d'une inconnue, plusieurs démarches de résolution sont a priori possibles. Nous les mettons ici en évidence sur l'exercice 4 que l'on retrouve fréquemment comme sujet de B.E.P. tertiaire. Mais les distinctions introduites fonctionnent de façon générale.

Exercice 4 : *Calculer le capital placé pour obtenir une valeur de 8932^F après 120 jours à un taux de 8%.*

Nous envisageons trois démarches de résolution selon le contexte d'apprentissage de l'élève.

1) Démarche arithmétique :

Un élève de BEP tertiaire apprend dans son cours que le capital initial et le capital acquis sont des grandeurs proportionnelles. Une des démarches éventuelles consiste à se ramener à *une situation de proportionnalité*. La mise en équation est alors liée au choix relatif à la représentation de la situation de proportionnalité. Citons les deux principaux modes de description [Pezard, 1985] :

- *par des égalités de rapport* (tableau de proportionnalité)
- *par la mise en évidence d'un coefficient de proportionnalité* (aussi appelé coefficient de proportionnalité)

On suppose, par exemple, un capital placé de 36000^F[5]. On choisit ici comme représentation une égalité de deux rapports (suite de capitaux initiaux et suite de capitaux acquis).

Soit I l'intérêt obtenu après 120 jours.

I = 36000 x 8 x 120 /36000 = 960.

La valeur acquise du capital est de : 36000 + 960 = 36960

Soit x le capital placé.

En utilisant le tableau de proportionnalité, x vérifie le rapport

$$\frac{36000}{36960} = \frac{x}{8932}$$

On en déduit que le capital placé est de 8700^F.

Ce type de problème permet donc tout à fait *l'utilisation d'une démarche arithmétique*. Dans ce cas, *résoudre le problème revient à rechercher la quatrième proportionnelle à trois nombres donnés*.

2) Branchement sur une formule de mathématique financière (la formule du capital acquis)

Pour un élève de BEP tertiaire, la formule du capital acquis fait partie des savoirs à mémoriser. Une démarche de résolution consiste à reconnaître un des trois types de problèmes des mathématiques financières, les données et inconnues associées à l'énoncé, puis à "se brancher" sur la formule à utiliser pour mettre en équation ce problème. Une fois la formule trouvée, on instancie les lettres-grandeurs mises en jeu dans la formule par les données et les inconnues pour obtenir une équation du premier degré à une inconnue traduisant la situation du problème. Il ne reste plus qu'à utiliser des savoir-faire élémentaires pour résoudre une équation du premier degré.

Ici, $A = C + Ctn/36000$, avec A le capital acquis, C le capital initial, t le taux d'intérêt et n le nombre de jours de placement.

A : 8932^F, C : x la valeur à déterminer, n : 120 jours, t : 8%

x vérifie l'équation $8932 = x + x$ x8x120/36000

Après résolution, on en déduit que $x = 8700$.

Demandons-nous quel est le rôle de l'outil algébrique dans cette résolution : la résolution passe d'abord par la reconnaissance d'une formule économique adaptée au type de problème. La mise en équation de la situation n'est pas à la charge de l'élève. L'algèbre nous semble apparaître ici comme un outil au service des mathématiques financières : une fois la formule adaptée reconnue, on instancie les grandeurs et on résout l'équation du premier degré à une inconnue qui traduit la situation. Dans ce cas, la

[5] Ce choix est réalisé en liaison avec les 120 jours de placement.

relation algébrique est obtenue par instanciation d'une formule et non par traduction algébrique de la relation existant entre les variables.

3) Traduction algébrique

Pour un élève pour qui le contexte financier n'est pas familier, ce problème met en jeu une simple mise en équation et la production de la relation algébrique qui traduit la situation, situation financière ici.

Soit x le capital initial à rechercher.

Le capital acquis est égal au capital initial augmenté des intérêts. Les intérêts sont proportionnels à la fois au taux d'intérêt, ici 8/36000, et au nombre de jours de placement, ici 120.

D'où x vérifie l'équation $8932 = x + x \text{x} 8 \text{x} 120/36000$

Dans ce cas, l'algèbre est un moyen de résolution de problèmes : la mise en équation est à la charge de l'élève qui produit la relation algébrique traduisant la situation.

L'analyse a priori des démarches de résolution concernant les problèmes de formation des prix est donnée en annexe.

4) Synthèse :

Nous voyons que ces démarches mettent en jeu des rapports à l'algèbre différents à la fois dans les dimensions *objet* et *outil* de l'algèbre et dans le rapport arithmétique/algèbre.

L'algèbre peut être concernée par la résolution des problèmes de mathématiques financières mais nous avons montré que

- quatre degrés de complexité au moins peuvent être distingués dans la résolution des problèmes,
- plusieurs degrés d'implication de l'algèbre sont a priori possibles.

I.1.2 Les nouveaux programmes

Nous poursuivons notre étude des programmes par la comparaison du nouveau programme de mathématiques de B.E.P. tertiaire du 10 Juillet 1992 [Collection : horaires/objectifs/programmes/instructions, 1992] et de celui de seconde indifférenciée effectif à la rentrée de Septembre 1990.

Le texte de programme de BEP tertiaire a été profondément remanié selon la même structure que celle du programme de Seconde indifférenciée. Deux parties *Objectifs* et *Organisation de l'enseignement* précèdent celle des *Contenus mathématiques* (voir Annexe II).

Nous organisons l'analyse en deux grandes parties : l'étude comparative des objectifs déclarés ou apparents puis celle des mathématiques en jeu dans les deux programmes.

I.1.2.1 Etude comparative des objectifs

La structuration de cette partie est comparable dans les deux programmes. Présentons ces deux parties en parallèle dans les deux colonnes d'un tableau

BEP Tertiaire	Seconde indifférenciée
Objectifs 1. (cf annexe) 2. L'enseignement des mathématiques doit fournir des *outils* permettant aux élèves de suivre avec profit les enseignements des disciplines scientifiques et technologiques. Il doit aussi contribuer au *développement de la formation scientifique* à travers *la pratique d'une démarche mathématique* : mathématisation d'un problème simple, travail d'expérimentation et de recherche, mise en œuvre d'outils et de raisonnements pour résoudre ce problème, contrôle des résultats obtenus et analyse de leur portée. Plus largement, l'enseignement des mathématiques doit *contribuer au développement des capacités d'argumentation, d'organisation et de communication.* 3. La démarche consiste à bâtir des mathématiques le plus souvent possible à partir des problèmes apportés notamment par les disciplines scientifiques et technologiques, et en retour, à utiliser des savoirs mathématiques comme outils pour la résolution de problèmes issus des autres disciplines et de la vie courante. Les situations étudiées doivent fréquemment être issues de la dominante technologique de la classe (sciences et techniques industrielles, sciences biologiques et sociales, sciences et techniques économiques). 4. Dans le cycle de détermination B.E.P. il convient de *développer les capacités de chaque élève* et de *l'aider à préciser son projet de formation et à le réaliser.* (...) De même, on peut, en fonction de ces projets, *diversifier*, le choix et le niveau d'approfondissement des activités proposées ; *mais cette diversification ne saurait conduire à supprimer des rubriques du programme ou à détruire son équilibre général.*	**Exposés des motifs** **1. Pourquoi un nouveau programme ?** **2. Les intentions majeures :** a) On a voulu entraîner les élèves à la *pratique d'une démarche scientifique*, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. b) On a voulu insister sur l'importance du *travail personnel* des élèves, tant en classe qu'à la maison, et sur le rôle moteur des activités de *résolution de problèmes.* Dans cette perspective, une rubrique de *travaux pratiques* a été introduite dans chaque chapitre. c) On a voulu développer les *capacités d'organisation et de communication* et renforcer les objectifs d'*acquisition de méthodes.* d) On a voulu mieux prendre en compte l'exigence des contenus présentant intérêt pour la formation de *tous* les élèves. (...) e) (...) f) On a voulu *dégager clairement les objectifs et les contenus du programme* en précisant les capacités requises et non requises des élèves, dans le double but de mieux éclairer les professeurs et les élèves et de combattre l'inflation. (...) **3. Quelques lignes directrices pour les contenus :** a) Dans tous les domaines, la résolution de problèmes constitue (...) *l'objectif essentiel.* b) dans le domaine numérique, l'accent est mis sur la résolution des équations, l'approximation des nombres et les études de fonctions. (...)

Tableau n°6 : Les objectifs des programmes de BEP tertiaire (1992) et de Seconde (1990)

Le paragraphe 4 présent dans le programme de BEP tertiaire est reporté au paragraphe 5 *Evaluation, orientation* de la deuxième partie du programme de Seconde indifférenciée.

Les objectifs visés par les programmes de B.E.P. et de Seconde indifférenciée sont organisés selon les mêmes dimensions mais ils présentent quelques différences dans leur formulation :

• L'enseignement des mathématiques doit contribuer à la *formation scientifique* des élèves à travers la *pratique d'une démarche scientifique*. En Seconde indifférenciée, parallèlement au développement des capacités d'expérimentation et de raisonnement on met l'accent sur le développement des capacités d'imagination et d'analyse critique.

• La *dimension outil des mathématiques* est mise en évidence dans les deux programmes à travers le rôle moteur des *activités de résolution de problèmes*. En BEP, on indique avec insistance que l'enseignement des mathématiques doit fournir des *outils* permettant aux élèves de suivre avec profit les enseignements des disciplines scientifiques et technologiques." Il est possible que les mathématiques soient considérées comme une "discipline de service" [Lauton, 1994] dépendant des besoins des autres disciplines de formation.

• Les deux programmes présentent respectivement les sources de problèmes :
- En B.E.P. les problèmes sont issus, soit des disciplines scientifiques et technologiques, soit d'autres disciplines ou de la vie courante. La formulation fait apparaître une possible imbrication entre les mathématiques, l'économie et la gestion.
- En seconde indifférenciée, les problèmes sont plus internes aux mathématiques. Le troisième paragraphe donne les trois grands domaines mathématiques du programme de seconde, le domaine numérique, la géométrie, les statistiques.

I.1.2.2 Les contenus mathématiques : une première image des rapports différenciés à l'algèbre élémentaire

a. Organisation et équilibre des contenus mathématiques

Les textes des contenus mathématiques des deux programmes de BEP tertiaire et de Seconde indifférenciée sont globalement présentés de la même façon. Cette harmonisation des présentations conduit à une différence importante entre les deux versions du programme de BEP tertiaire. L'organisation du programme ne tient plus compte d'une répartition sur deux ans : cette répartition est laissée à la charge des professeurs et des auteurs de manuels. Nous verrons dans les paragraphes suivants de ce chapitre, les conséquences liées à l'interprétation de cette instruction.

Les deux grands chapitres *problèmes numériques et algébriques*, *les fonctions* de la partie commune font apparaître les objets algébriques d'enseignement communs présents dans la version précédente.

Présentons en parallèle les contenus mathématiques des deux grands chapitres. Nous utilisons une autre police de caractères et le soulignement pour montrer les objets non communs.

(Equations, Inéquations), Systèmes d'équations linéaires

Version 1992 du programme de mathématiques de B.E.P. tertiaire	Version 1990 du programme de mathématiques de Seconde indifférenciée
2. Equations, inéquations, systèmes d'équations linéaires **a) Equations et inéquations du premier degré à une inconnue à coefficients numériques :** Résolution numérique ; Exemples d'étude de situations conduisant à une ou plusieurs équations ou inéquations du premier degré à une inconnue. **b) Système de deux équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques :** Résolution numérique et graphique ; Exemples d'étude de situations conduisant à de tels systèmes.	**2. Systèmes d'équations linéaires** Résolution numérique et étude graphique de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques. <u>Critère d'existence et d'unicité de la solution.</u> **Travaux pratiques** Exemples d'étude par interprétation graphique de systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à deux inconnues. Exemples de mise en œuvre de deux méthodes pour résoudre des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues (substitution, combinaisons linéaires).

Tableau n°7 : Les programmes de BEP tertiaire (1992) et de Seconde (1990) (1ère partie)

Calcul littéral, numérique (et algébrique)

Version 1992 du programme de mathématiques de B.E.P. tertiaire	Version 1990 du programme de mathématiques de Seconde indifférenciée
1. Calcul littéral, numérique et algébrique **a) Calcul sur les puissances et les racines carrées** Puissances d'un nombre Formules : $(ab)^m = a^m b^m$ $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n = a^{mn}$, où m et n sont des entiers relatifs. Racines carrées. Formules : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$	**1. Calcul littéral et calcul numérique** **a) Calcul sur les puissances** Formules : $(ab)^m = a^m b^m$ $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n = a^{mn}$, où m et n sont des entiers relatifs.
b)Valeur absolue, intervalle, approximations Valeur absolue , distance. Intervalles, Notation des divers types d'intervalles. Pratique, sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre *a (...)*	**b) Opérations sur les inégalités** Signe de $ax+b$. Signe d'un produit, d'un quotient Passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée dans une inégalité entre deux nombres positifs. Position relative de a et a^2 selon que $a \geq 1$ ou $0 \leq a \leq 1$. **c)Valeur absolue, intervalles, approximations** Valeur absolue , distance. Inégalité triangulaire : $\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$ Valeur absolue d'un produit, d'un quotient Intervalles, Notation des divers types d'intervalles. Pratique, sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre *a (...)*
c) Consolidation du calcul algébrique : Usage et transformation de formules.	
d)Suites arithmétiques,géométriques Formules reliant deux termes consécutifs. Formules donnant le terme de rang n .	
e) Exemples d'application dans le secteur tertiaire : Calculs commerciaux (...). Conversion des monnaies. Calculs d'intérêts : Intérêts simples (...) : Intérêts composés (...). (pas au programme de CAS) Problèmes d'amortissement du matériel. Escompte bancaire, taux réel de l'escompte. Equivalence d'un capital et d'un ensemble de capitaux, paiement à crédit.	**Travaux pratiques** Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou inéquation à une inconnue à coefficients numériques. Exemples simples d'emploi de factorisation pour leur résolution. Pratique des opérations portant sur des nombres (puissances, fractions, radicaux ...). L'encadrement de l'opposé d'un nombre, de la somme de deux nombres, du produit de deux nombres positifs.

Tableau n°8.1: Les programmes de BEP tertiaire (1992) et de Seconde (1990) (2ème partie)

Fonctions

Version 1992 du programme de mathématiques de B.E.P. tertiaire	Version 1990 du programme de mathématiques de Seconde indifférenciée
1 Génération et description des fonctions a) Exemples de mode de génération de fonctions. Exemples de description d'une situation à l'aide d'une fonction. Représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormal ou orthogonal. b) Exemples simples de calculs de valeurs d'une fonction à l'aide d'une calculatrice. c) Parité, périodicité Maximum, minimum d'une fonction. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes. d) Exemples de lecture de propriétés de fonctions à partir de leur représentation graphique. **2. Fonctions usuelles** a) Variations et représentation graphique des fonctions : $x \longrightarrow ax+b$, $x \longrightarrow x^2$, $x \longrightarrow x^3$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$, $x \longrightarrow 1/x$ b) Exemples simples d'étude de comportements de fonctions tels que : signe, variations, représentations graphiques dans un repère (orthonormal ou orthogonal). c) Exemples simples d'étude graphique d'équation de la forme $f(x)=k$ où k a une valeur numérique donnée.	**1 Génération et description des fonctions** Exemples de mode de génération de fonctions. Exemples de description d'une situation à l'aide d'une fonction. Représentation graphique d'une fonction dans un repère (orthonormal ou orthogonal) Parité, périodicité. Maximum, minimum d'une fonction. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes. **2. Fonctions usuelles** a) Variations et représentation graphique des fonctions : $x \longrightarrow ax+b$, $x \longrightarrow \lvert x \rvert$, $x \longrightarrow x^2$, $x \longrightarrow x^3$, $x \longrightarrow \sqrt{x}$, $x \longrightarrow 1/x$ b) Etude des fonctions cosinus et sinus : périodicité, symétrie, sens de variation. Courbes représentatives. **Travaux pratiques** Exemples simples d'étude de comportements de fonctions tels que : signe, variations, représentations graphiques dans un repère (orthonormal ou orthogonal). Exemples simples de programmation de valeurs d'une fonction. Exemples de lecture de propriétés de fonctions à partir de leur représentation graphique. Exemples simples d'étude graphique d'équation de la forme $f(x)=k$ où k a une valeur numérique donnée. Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale, ...)

Tableau n°8.2: Les programmes de BEP tertiaire (1992) et de Seconde (1990) (3ème partie)

Nous sommes frappée par les ressemblances des deux programmes et la façon dont les différences subtiles peuvent être gommées à une première lecture.

1) Examinons d'abord les objets d'enseignement qu'ils soient communs ou non aux deux programmes :

- La majorité des connaissances et savoir-faire de base présents dans l'ancienne version du programme de BEP sont toujours communs aux programmes de BEP et de Seconde et sont détaillés.

- Les connaissances de l'ancien programme de BEP qui étaient rattachées à un niveau d'enseignement de Première du cycle long, limite, dérivée et équation du second degré, ont disparu de cette nouvelle version. Il y a alignement du programme de mathématiques de BEP tertiaire sur celui de Seconde indifférenciée.

- A côté des contenus mathématiques communs qui sont les plus nombreux, apparaissent des contenus mathématiques en relation avec l'algèbre distincts dans l'un et l'autre des deux programmes[6]. Ils se rencontrent dans les chapitres *Calcul numérique et calcul algébrique* et *fonctions* :

Version 1992 du programme de mathématiques de B.E.P. tertiaire	Version 1990 du programme de mathématiques de Seconde indifférenciée
Calcul numérique et calcul algébrique	*Calcul numérique et calcul algébrique*
Suites arithmétiques, géométriques **Exemples d'application secteur tertiaire**	**Opérations sur les inégalités** **Valeur absolue** plus approfondie
Fonctions	*Fonctions*
	Usage calculatrice programmable **Fonctions trigonométriques**

Tableau n°9 : Les contenus distincts des deux programmes

Les notions et situations distinctes présentes dans le programme de BEP apparaissent très liées aux sources des problèmes à résoudre dans cette section. Nous voyons bien l'intérêt pratique de l'ajout des suites arithmétiques et géométriques : ces outils mathématiques permettent la résolution de situations spécifiques dans un contexte financier. En classe de Première du cycle long, ces notions n'interviennent dans le cadre de l'étude des suites que comme un cas particulier de suites. Remarquons aussi que le paragraphe *Exemples d'application dans le secteur tertiaire* semble beaucoup moins développé que dans l'ancienne version du programme de BEP tertiaire.

Les notions distinctes présentes dans le programme de Seconde indifférenciée sont internes au domaine mathématique et liées à l'étude des fonctions. Nous retrouverons cette différence dans l'analyse des objectifs essentiels qui définissent et délimitent le cadre

[6]Nous n'abordons pas ici les autres rubriques distinctes aux deux programmes en géométrie ou statistiques.

général d'étude des notions relatives à chaque chapitre. De plus, les outils de calcul autorisés sont distincts : les *calculatrices programmables* sont exigées en Seconde et non en B.E.P.

2) Revenons maintenant sur la présentation du texte des programmes. Ils sont présentés et rédigés de la même façon, la présentation s'alignant sur celle du programme de Seconde. Le texte ci-dessous en donne les grandes lignes :

BEP tertiaire	Seconde indifférenciée
Ce texte comporte d'abord un chapitre définissant les *objectifs et les capacités valables pour l'ensemble du programme.* Ensuite, chaque chapitre comporte : - Un *bandeau* définissant les objectifs essentiels de ce chapitre et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à ce chapitre. Un texte en deux colonnes : deux sortes de spécificités leur sont attribuées. D'une part, *à gauche*, sont fixées les connaissances et savoir-faire de base figurant au programme avec, *à droite*, un commentaire précisant le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repérant le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres figurant au programme. D'autre part, *à gauche*, figure le champ de techniques et des problèmes que les élèves ont à étudier avec, *à droite*, un commentaire fournissant des repères pour le niveau d'approfondissement de cette étude.	Ce texte comporte d'abord un chapitre définissant les *objectifs et les capacités valables pour l'ensemble du programme.* Ensuite, chaque chapitre comporte : - Un bandeau définissant les objectifs essentiels de ce chapitre et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à ce chapitre. -Un texte en deux colonnes : *à gauche*, sont fixées les connaissances et savoir-faire de base figurant au programme ; *à droite*, un commentaire précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repérant le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres figurant au programme. -Une rubrique de *travaux pratiques* en deux colonnes : *à gauche*, figure le champ de techniques et des problèmes que les élèves ont à étudier ; *à droite*, un commentaire fournit des repères pour le niveau d'approfondissement de cette étude.

Tableau n°10 : Les objectifs des deux programmes

Une différence subtile, que nous avons conservé dans la présentation ci-dessus des contenus mathématiques, apparaît dans la définition "du champ de techniques et des problèmes que les élèves ont à étudier". En BEP, cette étude n'est pas distinguée de celle des connaissances et des savoir-faire : les titres des thèmes d'étude côtoient ceux des notions et savoir-faire à enseigner. En Seconde indifférenciée, cette étude est organisée dans un cadre distinct, celui des *travaux pratiques*.

Cette présentation peut être symptomatique de l'organisation mathématique dans la classe. En BEP, la responsabilité de l'activité mathématique semble rester complètement à la charge du professeur, ce qui est moins le cas en Seconde indifférenciée. On peut aussi penser qu'une tradition d'activités n'est pas encore bien installée en classe de BEP, ce qui fait que le programme ne distingue pas les notions enseignées en cours de celles relevant de séances d'activités mathématiques.

Nous pouvons faire l'hypothèse, qu'en regardant les cahiers d'élèves du point de vue de l'activité laissée à leur charge, nous trouverons certainement des marques d'une moins grande autonomie des élèves en BEP.

Recherchons maintenant dans les commentaires associés aux contenus mathématiques communs aux deux classes des disparités qui peuvent induire des différences de rapport institutionnel à l'algèbre.

b. Les dimensions *objet* et *outil* de l'algèbre

b.1 Les *problèmes numériques et algébriques*

L'analyse du paragraphe introductif aux *problèmes numériques et algébriques* apporte un éclairage nouveau sur des différences supposées.

B.E.P.	Seconde indifférenciée
La résolution de problèmes issus des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif majeur de cette partie de programme. On dégagera, sur des exemples, les différentes phases du traitement d'un problème : choix des inconnues, mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats. Le traitement des problèmes combine les calculs de valeurs exactes et de valeurs approchées ; il fait appel aux différentes formes de calcul : mental, à la main et à la machine. Les interprétations graphiques, l'usage des calculatrices jouent un rôle capital, à la fois comme outils et comme sources de problèmes. Dans cette perspective, le programme vise à compléter et à mobiliser les acquis des classes antérieures Les travaux s'articulent sur deux axes : - Consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique ; - Poursuivre l'étude des équations et inéquations à une inconnue et des systèmes d'équations linéaires.	La *résolution de problèmes* issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante *constitue l'objectif fondamental* de cette partie de programme. On dégagera, sur des exemples, les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats. Dans cette perspective, le programme vise à compléter et à mobiliser les capacités acquises au collège ; les travaux s'articulent sur les deux axes : - Consolider *la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique*, en relation étroite avec l'étude des fonctions. - Poursuivre l'étude des *équations et inéquations à une inconnue* et des *systèmes d'équations linéaires.* Dans le cadre de ces travaux, un objectif important est d'amener les élèves à *une meilleure maîtrise de l'emploi des variables* à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques, tableaux de valeurs de fonctions, ...), mise en équations de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions. Le traitement des problèmes combine les *calculs de valeurs exactes et de valeurs approchées* : il fait appel aux différentes formes de calcul : mental, à la main et à la machine. Les *interprétations graphiques, l'usage des calculatrices* jouent un rôle capital, à la fois comme outils et comme sources de problèmes.

Tableau n°11 : Les objectifs concernant les problèmes numériques et algébriques

1) Dans chaque programme, la "*résolution de problèmes (...) constitue l'objectif fondamental (majeur* en BEP) pour cette partie du programme". Les sources de problèmes sont à nouveau indiquées. En Seconde, les problèmes sont "issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion des données, des autres disciplines et de la vie courante". En BEP, les problèmes sont "issus des autres disciplines et de la vie courante".

Mais le changement de place du paragraphe

"- Consolider la *pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique*, en relation étroite avec l'étude des fonctions.
-Poursuivre l'étude des *équations et inéquations à une inconnue et des systèmes d'équations linéaires*".

ainsi que la suppression de la portion de phrase "en relation avec l'étude des fonctions" en BEP ne semblent pas neutres. Ces indices mettent en évidence une différence importante entre les deux programmes : en Seconde, on élargie le champ de l'algèbre à celui de l'étude des fonctions et on sort du champ des équations. Nous percevons une évolution du rapport au calcul algébrique en un rapport au "fonctionnel" qui engage l'algèbre dans une nouvelle dimension, ce qui ne semble pas être le cas en BEP. Ce point de vue est appuyé par l'ajout d'un paragraphe supplémentaire qui indique "qu'un objectif important est d'amener les élèves à une *meilleure maîtrise de l'emploi des variables"*. Le calcul algébrique est vu comme un outil pour résoudre des exercices, en particulier, dans le cadre fonctionnel. De plus, les élèves sont amenés à réfléchir sur le rôle et l'emploi des variables à travers différentes tâches.

2) Des différences de formulation apparaissent aussi quant à l'emploi du calcul algébrique.

• <u>En seconde</u> :

Le côté *outil* du calcul algébrique est clairement affirmé dans le programme de Seconde. Nous le trouvons d'abord dans un paragraphe introductif du paragraphe *Calcul littéral et calcul numérique* qui disparaît du programme de BEP :

"- La résolution de problèmes menant à *des équations à une inconnue* constitue un objectif important. (...)

- De nombreuses situations conduisent à des *inégalités* ou des *inéquations*. On se limitera à des exemples très simples et on s'appuiera sur des interprétations graphiques et sur la variation des fonctions, afin d'éviter un formalisme purement algébrique".

Des "exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou inéquation à une inconnue à coefficients numériques" ainsi que des "exemples simples d'emploi de factorisations pour leur résolution" constituent des thèmes de travaux pratiques en Seconde. L'algèbre est mis en jeu comme un outil de modélisation qui permet de construire des expressions algébriques et d'exprimer algébriquement des relations, c'est-à-dire, de mettre en équation des situations. De plus, le calcul algébrique (manipulation formelle, transformation, ...) intervient dans la résolution des problèmes.

Les composantes syntaxique et sémantique du calcul algébrique semblent mises en jeu dans la résolution des exercices, en particulier, dans la résolution des systèmes d'équations linéaires (critère d'existence et d'unicité de la solution d'un système, interprétation graphique de systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à deux inconnues).

• <u>En B.E.P</u> :

Le rapport à l'algèbre met en jeu plusieurs éléments.

- La consolidation du calcul algébrique s'exprime d'abord en termes d'usage et de transformation de formules. Nous pouvons lire dans la colonne des commentaires :

"Sur des exemples simples, développements et factorisations seront effectués sans exagération. On fera appel aux formules courantes utilisées dans la vie pratique (impôts, intérêts, ...), en mathématiques (aires et volumes ...), (...).

Le rapport au calcul algébrique passe par un rapport privilégié aux formules. Le calcul algébrique est mis en œuvre dans ce contexte.

- Nous retrouvons les "exemples d'étude conduisant à une ou plusieurs équations ou inéquations du premier degré à une inconnue" ou "à un systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues" comme titre de thèmes d'étude dans le paragraphe 2. *Equations, inéquations, systèmes d'équations* du programme de BEP. Il est signalé que les problèmes sont "issus d'autres disciplines et de la vie économique et professionnelle". C'est la dimension outil de l'algèbre qui semble être privilégiée ici.

- Les commentaires du paragraphe intitulé "exemples d'application dans le secteur tertiaire" précisent le rôle de l'algèbre dans ce contexte d'application :

"Ces situations nécessitent l'usage de méthodes mathématiques dans un contexte professionnel. La nécessité d'utiliser un vocabulaire technologique en coordination avec l'enseignement professionnel s'impose, mais en se limitant à l'essentiel. On s'attachera à dégager des situations de proportionnalité. On mettra en œuvre les outils mathématiques dont on dispose : équations et inéquations à une inconnue, systèmes de deux équations à deux inconnues, fonctions, suites arithmétiques et géométriques ..."

Ici, le rapport à l'algèbre passe par la mise en œuvre d'outils mathématiques tels que les équations, les systèmes d'équations, les fonctions. Contrairement aux thèmes présentés sous l'intitulé "*Exemples de*" en Seconde indifférenciée avec la mention "*aucune connaissance spécifique ne peut être exigée à leur propos* " en dehors de toutes indications utiles, les connaissances mises en jeu dans les exemples de situations du domaine tertiaire sont exigibles. Les situations du domaine tertiaire sont plus calibrées et plus dirigées. Il est demandé aux élèves de BEP une grande efficacité dans la résolution de telles situations, cette efficacité allant de pair avec l'utilisation de formules puis la mise en œuvre d'outils algébriques. Etant donnée l'étude a priori réalisée dans le paragraphe I.1.1.2, il est donc nécessaire d'étudier plus finement quels sont les degrés d'implication de l'algèbre mis en jeu dans ces problèmes d'application dans le secteur tertiaire. Nous proposons cette étude dans l'analyse des cahiers d'élèves au paragraphe III.

Est-ce qu'on ne tend pas vers une dichotomie entre

- d'une part, une exigence d'efficacité à résoudre des situations assez stéréotypées par la mise en œuvre de formules et de savoir-faire de base ,

- d'autre part, une prise en compte de la nécessité de l'activité mathématique par la résolution de problèmes plus ouverts, les connaissances mises en jeu n'étant pas toujours exigibles.

3) Une autre remarque s'impose : nous avons étudié a priori les démarches envisageables pour résoudre des problèmes de mathématiques financières. Nous avons vu qu'une démarche de résolution possible passe par l'arithmétique en se ramenant à des situations de proportionnalité. Or nous lisons dans le commentaire précédent "On s'attachera à dégager des situations de proportionnalité". Certaines situations dans le secteur tertiaire peuvent ainsi permettre de faire vivre des concepts communs à l'arithmétique et à l'algèbre en continuité avec les pratiques arithmétiques. Qu'en est-il effectivement dans la pratique de la classe ?

b.2 ***Fonctions usuelles***

Nous trouvons en apparence très peu de différences de formulation dans ce chapitre entre les deux programmes. Mais une analyse plus fine permet d'en mettre en évidence trois principales :

- Dans le programme de BEP, les situations de *pourcentages* sont explicitement citées comme cas particulier des situations de proportionnalité à mettre en relation avec les fonctions linéaires.

"A travers l'étude des fonctions figurant au programme et de situations menant à des fonctions qui s'en déduisent de façon simple, on mettra en valeur la diversité du comportement des fonctions. Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de proportionnalité et en particulier <u>les situations de pourcentages</u>[7], dont l'étude a été abordée dans les classes antérieures, en relation avec des fonctions linéaires et des fonctions affines."

Cela semble indiquer la part importante prise par ces situations en classe de BEP.

- Il est indiqué dans le programme de BEP que le sens de variation des fonctions de référence est admis, ce qui n'est pas le cas en Seconde indifférenciée. Il est dit "d'entraîner les élèves à mettre en œuvre les méthodes employées pour les fonctions usuelles pour l'étude des comportements de fonctions telles que $x \longrightarrow 2x^2+1$,

$x \longrightarrow (x-1)^2$, $x \longrightarrow \dfrac{2}{x+1}$, $x \longrightarrow \dfrac{2}{x^2+1}$, $x \longrightarrow x(1-x)$".

Il nous semble ici qu'un élément discriminant très important intervient. En seconde indifférenciée, l'algèbre semble rentrer dans une nouvelle dimension : le calcul algébrique

[7]Nous soulignons la portion de phrase introduite dans le programme de BEP tertiaire

est utilisé pour étudier le comportement des fonctions (sens de variation, signe, ...), ce qui ne semble pas être le cas en BEP.

- Rappelons que la calculatrice programmable n'est pas exigée en BEP. En revanche, la dimension sémantique des expressions est pris en compte dans la programmation des valeurs d'une fonction en Seconde.

c. En conclusion,

En dépit de convergences évidentes, une lecture fine des programmes montre, en dehors des disparités dans les contenus mathématiques, des différences subtiles de formulation qui mettent en évidence des différences de rapport institutionnel à l'algèbre. Nous notons notamment dans ces différences :

- le rapport à la manipulation formelle des expressions algébriques, qui en Seconde indifférenciée fait intervenir le calcul algébrique dans de nouveaux emplois (par exemple emploi de factorisation pour résoudre des équations ou inéquations à une inconnue) alors qu'en BEP le calcul algébrique semble rester davantage enfermé dans un rôle d'usage et de transformation de formules ;

- le rapport à l'algèbre lié au poids important des applications tertiaires très stéréotypées en BEP alors que le spectre assez vaste des situations d'emploi de l'algèbre en Seconde indifférenciée contribue à montrer les différentes facettes de l'activité algébrique ;

- le rapport au 'fonctionnel' en Seconde qui engage l'algèbre dans une nouvelle dimension alors qu'en BEP l'algèbre reste dans un rapport privilégié aux formules et aux équations ;

- le rapport à l'algèbre en BEP à travers une éventuelle place laissée à l'arithmétique dans les situations tertiaires, étant donnés les différents degrés d'implication de l'algèbre a priori possibles, ce qui apparaît moins en Seconde.

II. ANALYSE COMPLÉMENTAIRE : EXERCICES DE L'EVALUATION DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE SECONDE INDIFFÉRENCIÉE ET SUJETS DE BEP TERTIAIRE

Nous complétons l'étude comparative des programmes par deux études complémentaires :

• celle des exercices donnés lors de l'évaluation du programme de Mathématiques en fin de Seconde 1991 organisée par des enseignants de l'APMEP[8] [APMEP 1991],

• celle des sujets de BEP tertiaire donnés dans différentes académies lors des sessions de 1989 à 1991. Ces épreuves sont rassemblées dans la brochure n° 91"Mathématiques dans les métiers du secteur tertiaire. Sélection d'Epreuves d'examens (C.A.P., B.E.P., BAC PROFESSIONNEL)" [APMEP 1994].

Ces études doivent contribuer à donner une vision plus fine des compétences algébriques mises en jeu en BEP et en Seconde indifférenciée mais aussi à différencier les rapports à l'algèbre dans ces deux classes. Pour cela, nous opérationnalisons la structure d'analyse du côté institutionnel. Nous cherchons, d'une part, à mettre en évidence les types de traitement algébrique utilisés selon les trois types de tâches, et d'autre part, à dégager les caractéristiques des problèmes relatives à chaque composante d'analyse (objets mathématiques, règles de formation et de traitement, registres, emplois de l'algèbre). L'analyse nous permet d'associer à chaque tâche sa grille descriptive.

Rappelons les composantes d'analyse, les critères associés à chaque composante ainsi que l'ensemble de leurs valeurs globales.

[8]Le sigle APMEP correspond à l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

Composante	Critère	Valeur globale
Traitement algébrique	**Type traitement algébrique mis en jeu par l'exercice** Tâche d'ordre numérique Reproduct.formelle niveau1 Reproduct.formelle niveau2 Interprétation d'expression algébr Util. de l'alg pour étudier notions Branchement formule Production guidée Production Preuve avec outil algébrique	Substitution numérique Développement, Factorisation, Résolution d'équations, ..., Non ...
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution possible	Arithmétique Algébrique
	Statut des lettres	Lettres (abréviation, ...) Nombre (grandeur, inconnue, variable, nombre généralisé)
	Statut du signe d'égalité	Signe d'effectuation Relation d'équivalence
	Statut des expressions	Procédural Structural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Ensemble des règles de formation mises en jeu
	Type de traitement	Ensemble règles de traitement mises en jeu
Articulation entre registre algébrique et d'autres reg.	Type de conversion	Ensemble règles de conversion entre registres concernés
Rôle de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	- Faire du calcul numérique dans un contexte d'application ou non - Faire du calcul formel dans le cadre algébrique - Etudier algébriquement des fonctions - Mathématiser et résoudre des situations extra-mathématiques liés à un contexte concret peu familier - Résoudre des problèmes dans un contexte d'application familier (voire assez stéréotypé), par exemple, le secteur tertiaire - Mathématiser et résoudre des problèmes intra-mathématiques dans d'autres domaines (géométrique, numérique, ...) que le domaine algébrique - Conjecturer et prouver des propriétés numériques.
Rationalité algébrique	Type de preuve	Pragmatique Intellectuelle
	Type de justification	Justification d'ordre sémantique Justification par des exemples Justification par appel à ds règles Justification par appel au légal Justification propriétés générales Justification appel à inf. logique Justification avec outil algébrique

Tableau n° 12: Grille descriptive générique des tâches algébriques

II.1 EXERCICES DE L'EVALUATION DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE SECONDE INDIFFÉRENCIÉE

Nous analysons les exercices regroupés dans les trois thèmes *Calcul littéral - Algèbre*, *Fonctions* et *Droites dans le plan muni d'un repère.* Nous organisons l'analyse en regroupant les exercices selon notre classement : exercices techniques, exercices de reconnaissance, exercices de mathématisation. Pour chaque type d'exercices, nous présentons l'ensemble des tâches concernées et nous les illustrons par quelques exercices prototypiques. Puis nous dressons un tableau de l'ensemble des grilles descriptives associées aux tâches afin d'en faire une analyse transversale.

II.1.1 Les exercices de reconnaissance

Peu d'exercices d'EVAPM Seconde peuvent être classés comme exercices de reconnaissance. Nous trouvons un exercice classique d'association (E 23-25) entre tracés et équations de droites dans le thème *Droites dans le plan muni d'un repère.*

Les exercices R 20, S 6, R21, R 22 du thème *Calcul littéral-Algèbre* proposent d'associer à une expression algébrique donnée une autre (ou plusieurs) écriture(s) obtenue(s) après transformation de l'expression initiale. Comme ces exercices nécessitent l'utilisation préalable de règles de calcul algébrique, nous les analysons avec les exercices techniques.

II.1.2 Les exercices techniques

Les exercices techniques recouvrent différents types de tâches mettant en jeu des capacités exigibles du programme de Seconde indifférenciée. Nous reprenons le codage utilisé dans EVAPM Seconde pour coder les capacités exigibles dans chaque thème[9]. Dans l'évaluation de Seconde, ces types de tâche sont regroupés sous différents intitulés. Pour avoir une vue d'ensemble des différents types de tâche, nous présentons d'abord les intitulés et des exercices prototypiques correspondants.

Calcul littéral- Algèbre

- **Transformations d'écritures :**
  - (2A00) Transformer des expressions littérales comportant des expressions et/ou des puissances

[9]Explicitation du codage des capacités exigibles :
Le code est constitué d'un chiffre d'une lettre puis de 3 chiffres :
- le premier chiffre indique la classe concernée, par exemple, 2 pour les secondes,
- la lettre indique le thème lié aux contenus mathématiques; trois thèmes sont concernés par notre recherche :
  A : Calcul littéral - Algèbre
  F : Fonctions
  Y : Géométrie dans le plan muni d'un repère
- les autres chiffres codent la capacité exigible dans un thème donné.

EVAPM 2/91 R 20

	L'expression $\dfrac{7x^3y^2}{12x^2}$ où x et y désignent des réels (x non nul), peut aussi s'écrire			
a	$-5xy^2$	Oui	Non	Jnsp
b	$\dfrac{7}{12}x^{-1}y$	Oui	Non	Jnsp
c	$\dfrac{7}{12}xy^2$	Oui	Non	Jnsp
d	$\dfrac{7}{12x^{-1}y^2}$	Oui	Non	Jnsp

EVAPM 2/91 S 6

	L'expression $\dfrac{4(x^2y)^3y^2}{x^5y^6}$ où x et y désignent des réels (x non nul), peut aussi s'écrire			
a	$4xy^2$	Oui	Non	Jnsp
b	$4xy^{-1}$	Oui	Non	Jnsp
c	$4(xy)^2$	Oui	Non	Jnsp
d	$\dfrac{4}{x^3y}$	Oui	Non	Jnsp

- <u>Développer et réduire des expressions littérales</u> :

(2A002) Sommes et produits de polynômes à une indéterminée conduisant à une expression réduite de degré inférieur ou égal à 2 (Ex A 10-12)

(2A003) Sommes et produits de polynômes à une indéterminée conduisant à une expression réduite de degré inférieur ou égal à 3 (Ex R 21)

(2A004) Sommes et produits de polynômes à deux indéterminées conduisant à une expression réduite de degré inférieur ou égal à 3 (Ex C 25-27)

- <u>Factoriser des expressions littérales à une seule indéterminée</u>

(2A005) Conduisant à un produit de deux monômes du premier degré
- En utilisant directement une identité remarquable (Ex F 3-5, Ex E 4-5)
- Sans qu'il soit possible d'utiliser les identités remarquables

(2A006,2A007) Conduisant à un produit de trois monômes du premier degré (Ex F 6-7, Ex S 5)

• Résolutions d'équations et de systèmes d'inéquations :

- (4A252) Résoudre une équation du premier degré à une inconnue, à coefficients fixés

- (3A118, 2A008, 2A009) Résoudre une équation à une inconnue pouvant se ramener à une équation du type $A(x) = 0$,
  - $A(x)$ étant un produit de deux facteurs donnés (B37-38), (D31-33)
  - $A(x)$ étant à factoriser en deux facteurs (B35-36)
  - $A(x)$ étant à factoriser en un produit de trois facteurs (E6-7)

- (A010) Résoudre une équation du type $(ax+b)/(cx+d) = 0$, où a, b, c, d sont donnés

- (A010) Résoudre une équation du type $(ax+b)/(cx+d) = k$, où a, b, c, d et k sont donnés (A25-27)

- (2A012) Savoir reconnaître si un système de deux équations linéaires admet une solution unique (B39-40)

- (A050) Savoir reconnaître si un système de deux équations linéaires n'admet aucun couple de nombres pour solution ou s'il admet une infinité de solutions.

- (2A013) Résoudre un système de deux équations linéaires à coefficients fixés (F29-30)

• Résolutions d'inéquations et de tableaux de signes :

Fonctions

Fonctions affines

- (2F003) Une représentation graphique d'une fonction affine étant donnée, déterminer cette fonction lorsqu'il est possible d'identifier, sur le graphique, les coordonnées de deux points (N 1-5)

- (2F004) Une représentation graphique d'une fonction affine étant donnée, déterminer cette fonction lorsqu'il est possible d'identifier, sur le graphique, les coordonnées d'un point ainsi que les accroissements correspondants, dans un intervalle particulier, de la variable et de l'image (C 40-42)

- (3P103) Représenter graphiquement une fonction affine définie par une relation du type : $x \longrightarrow ax+b$. (A 8)

Autres fonctions usuelles, fonctions se déduisant des fonctions usuelles

- (F035) Savoir programmer une calculatrice

- (2F011, 2F012) Savoir reconnaître qu'une fonction est paire, impaire , par le calcul, à partir d'une représentation graphique

- (F032) Savoir dresser le tableau de variation d'une telle fonction

Exploitation de représentations graphiques et de tableaux de variation (2F018, 2F019, F025, F026, F027, F028)

Droites dans le plan muni d'un repère

- (3Y106) Déterminer une équation d'une droite définie par deux points (D21-22)

- (3Y104) Tracer une droite de la forme $y = ax+b$ (E 23-25)

Les types de traitement algébrique mis en jeu par les exercices sont diversifiés, de niveau plus ou moins complexe. La manipulation formelle fait appel dans certains exercices à l'interprétation et au sens des expressions algébriques transformées.

Pour garder une vision globale des types de tâche en jeu dans les exercices techniques, nous donnons les grilles descriptives attachées à chaque type de tâche :

	2A001	2A002 2A003 2A004	2A005 2A006	2A007	2A008 2A009	A0010 A0011	A0012 A0014	A0015 à A0019	2F003 2F004 2Y024	2F011 2F013 F032	2F005 A030 2F018
Type de traitement algébrique											
Tâche numérique									dét *a*		calc $f(x)$
Reproduct. niv1	transf exp.	dével^{t}	factor.		rés éq	rés éq	rés sys	rés inq	dét *b*	Oui	
Reproduct. niv2				factor. (S5)	rés éq (A21-24) (M1-3) (E6-7)		rés sys M29-32)	rés inq	Oui	Oui	Oui
Interprétation							Oui	Oui	déterm $x\text{->}ax+b$	Oui	Oui
Util alg. pour étudier notion											
Branch^{t} formule											
Product. guidée											
Production											
Preuve											
Rapport arithmétique / algèbre											
Statut du signe d'égalité	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	An rés Equiv
Statut des lettres	Ind.	Ind.	Ind	Ind.	Inc.	Inc.	Inc	Var, Inc	Var	Var	Var
Objet et statut des objets	Mono deg1à6 plus. var.	Polyn deg1à3 Struct	Polyn deg1à3 Struct	Polyn deg1à3 1 var Struct	Polyn deg1à3 1 inc	Fract rat. 1 inc.	Syst éq linéair 2 ou 3 inc.	Fract rat. 1 inc.	Fonct affines Struct	Fct affines polyn, fract Struct	Fonct affines Syst inq 2 inc Proc
Gestion dans registre algébrique											
Type de formation	Ec Fract Puiss.	Ec Fract, () Puiss.	Ec Fract, () Puiss.	Ec () Puiss.	Ec.() Puiss.	Ec Fract, ()	Ec. ()	Ec Fract, ()		Ec Fract, () Puiss.	
Type de traitement	Règles puiss.	Règles Dével. IR	Règles Factor. IR	Règles Factor. IR .	Règles Factor. IR AB=0 .	Règles fract.		Signe Cons. inégal.		Etude fonct	
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres											
Registres en jeu	Alg	Alg	Alg	Alg	Alg	Alg	Alg Al>Gr	Alg	Gr>Al	Ft>Alg	Al>Gr
Type de conversion									Non congr		

Tableau n°12 : Ensemble des grilles descriptives associées aux exercices techniques

II.1.3 Les exercices de mathématisation

Les exercices de mathématisation sont regroupés sous l'intitulé Problèmes (2A024, 2A025) dans le thème *Calcul littéral - Algèbre*. On en trouve aussi dans le thème *Fonctions* (2F001, 2F002). Ils correspondent aux capacités exigibles du programme de Seconde indifférenciée suivantes :

Calcul littéral- Algèbre

"METTRE en EQUATION et RESOUDRE un problème simple conduisant à :

- Une équation du premier degré à une inconnue (M9-10, M26-28, C28-29)
- Un système d'équations du premier degré à deux inconnues (A1-3, M17-25 a))
- Une inéquation du premier degré
- Une inéquation produit
- Un système d'inéquations du premier degré à une inconnue (M11-16)
- Un système de deux inéquations linéaires (M17-25 b))"

Fonctions

Proportionnalité :

-Savoir TRADUIRE par une fonction une augmentation ou une diminution exprimée en pourcentage (C35-36)

Fonctions affines :

- Savoir reconnaître si l'on est, ou non, en présence d'une situation affine, à partir de la proportionnalité des accroissements (C37 39)

- Déterminer une fonction affine définie par la donnée d'un nombre et de son image ainsi que la donnée d'accroissements correspondants de la variable et de l'image (C37 39)

Autres fonctions usuelles :

- Utiliser la notion de fonction pour traduire une situation donnée en termes concrets (F041)

Donnons les énoncés de deux exercices de mathématisation :

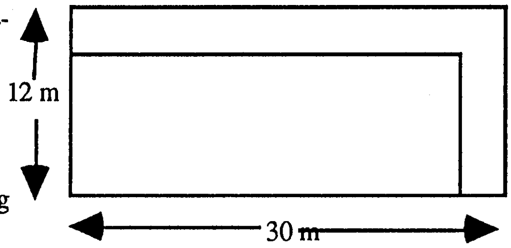
Exercice M9-10 :

Il y avait **n** litres d'essence dans le réservoir de ma voiture.
J'en ai utilisé le tiers au voyage aller et 8 litres au voyage retour.
Il en reste 10 litres.

Combien y avait-il d'essence au départ ?

Un terrain rectangulaire, représenté ci-contre, a une longueur de 30 m et une largeur de 12 m.

On veut aménager un chemin de largeur x le long de deux côtés consécutifs.



On souhaite que la partie restante ait une superficie supérieure à 280 m
et que la largeur du chemin soit supérieure à 80 cm.

a) Ecrire les inéquations traduisant ces deux conditions.

b) Montrer que les conditions trouvées à la question précédente consuisent au système : $x - 42x + 80 > 0$

$0{,}8 < x < 12$

c) Sachant que $x - 42x + 80 = (x-2)(x-40)$ trouver les valeurs possibles pour la largeur x de l'allée.

Exercice M17-25

Une usine produit des réfrigérateurs et des machines à laver.
La phase finale de fabrication utilise deux ateliers :

un atelier de montage qui peut fournir, au maximum, **250** heures de travail par jour,
un atelier de peinture qui peut fournir, au maximum, **60** heures de travail par jour.

Les temps de montage et de peinture sont donnés dans le tableau suivant :

	Réfrigérateur	Machine à laver
Temps de montage (en heures)	**2,0**	**2,5**
Temps de peinture (en heures)	**0,6**	**0,4**

Par la suite, vous noterez *x* le nombre de réfrigérateurs et *y* le nombre de machines à laver.

a) Un certain jour, **l'atelier de montage a travaillé 240 heures,**
tandis que l'atelier de peinture a travaillé 51 heures.
Sachant qu'il n'y a pas eu de temps perdu,
combien de réfrigérateurs et combien de machines à laver ont été achevés ce jour-là ?

Calculs

Réponse

b) Un autre jour, la direction de l'usine souhaite que **80** machines à laver soient achevées dans la journée.
Est-ce réalisable, et si oui, quel est le nombre maximum de réfrigérateurs qu'il sera possible d'achever ce jour-là?

Nous remarquons que ces exercices recouvrent presque l'ensemble des types de tâches que l'on peut rencontrer dans les problèmes, excepté des tâches conduisant à des preuves. Donnons l'ensemble des grilles descriptives attachées à chaque type de tâche :

	(2A024) M9-10 C28-29	(A025) A1-3	(A025) M11-16	(A025) M17-25	(3P105) C35-36	(2F001, 2F002) C37-39	S10	(2F016) N 37-38
Type de traitement algébrique Tâche numérique								
Reproduct. niv1	Rés éq 1er	Rés syst	Rés syst inq	Rés syst		Oui		Oui
Reproduct. niv2								
Interprétation	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Branch^{t} formule								
Product. guidée		Mise en éq ct concret		Pg linéaire	Mise en éq proport.			
Production	Mise en éq		Mise inéq			Mise en éq fct 1er deg		Mise en éq sit géom
Preuve							CNS	
Rapport arithmétique / algèbre								
Statut du signe d'égalité	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv
Statut des lettres	Inc	Inc	Inc	Inc	Var	Var, Inc	Var	Var, inc
Objet et statut des objets	Equation 1er, 2ème degré à 1 inc.	Syst de 2 équations linéaires à 2 inc.	Syst de 2 inéq du 1er degré	Syst de 2 inéq linéaires à 2 inc.	Fonct linéaire Proport.	Fonct affines	Nombres entiers relatifs	Fonct du 1er degré
Gestion dans registre algébrique								
Type de formation	$RF(R,\{x\},-,+,x,^{2})$	$RF(R,\{x,y\},-,+,x,)$	$RF(R,\{x\},-,+,x,)$	$RF(R,\{x,y\},-,+,x,)$	$RF(R,\{x\},-,+,x,)$	$RF(R,\{x\},-,+,x,)$	$RF(N,\{x\},,x,)$	$RF(R,\{x\},-,+,x,)$
Type de traitement	$RT_{\text{éq 1 deg}}$							
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres								
Registres en jeu	Lg>Alg G>Alg	Lg>Alg	Lg>Alg G>Alg	lg>Alg Alg>Gr	Lg>Alg	Lg>Alg	Nu>Alg	G>Alg
Type de conversion	Non Congruent	Congruent	Congruent	Non congr.	Non congruent	Non cong.	Non congruent	Congruent
Fonction de l'algèbre								
Emploi de l'algèbre	Mathématiser sit extra-math	Mathématiser sit extra-math	Mathématiser sit extra-math	Mathématiser sit extra-math	Mathématiser sit extra-math	Mathématiser sit extra-math	CNS	Mathématiser sit intra-math

Tableau n°13 : Ensemble des grilles descriptives associées aux exercices de mathématisation

II.1.4 Synthèse

L'analyse des exercices de l'EVAPM de Seconde indifférenciée met en évidence un rapport institutionnel à l'algèbre qui prend en compte à la fois les dimensions *outil* et *objet* de l'algèbre. Les exercices mettent en jeu des types de traitement algébrique diversifiés, le côté preuve étant le moins développé. Les exercices proposés semblent faire peu de place à des pratiques arithmétiques.

• Du côté objet, les exercices proposent la reproduction de tâches non finalisées de niveau 1 et 2 : des compétences techniques reposant sur les aspects syntaxiques et sémantiques des expressions algébriques sont demandées aux élèves.

• Du côté outil, l'outil algébrique doit être disponible pour plusieurs usages : étude d'autres notions mathématiques, traduction algébrique, mathématisation de situations intra ou extra-mathématiques. En particulier, le calcul algébrique commence à intervenir dans l'étude des fonctions et semble engagé dans une nouvelle dimension. En revanche, il est très peu fait référence à l'algèbre comme outil de preuve et peu de tâches de reconnaissance sont proposées aux élèves.

Globalement, le rapport institutionnel à l'algèbre en Seconde indifférenciée semble intégrer des rapports diversifiés à l'algèbre.

• De nombreux objets mathématiques sont mobilisés dans la résolution des divers types de tâches : polynômes de degré supérieur ou égal à 1, fractions rationnelles, irrationnelles (dans une moindre mesure), équations et inéquations du premier degré à une inconnue ou se ramenant au premier degré, équations rationnelles à une inconnue, systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues, fonctions affines et autres fonctions usuelles. Des conceptions procédurales et structurales doivent être disponibles selon le contexte de résolution.

• Les tâches proposées ne semblent pas privilégier de sous-ensembles de règles de formation et de règles de traitement internes au registre des écritures algébriques.

• De nombreux registres (autres que le registre des écritures algébriques) sont mis en jeu par ces tâches - registre des écritures numériques, registre du langage naturel, registre des figures, registre des représentations graphiques - ainsi que leur articulation avec le registre des écritures algébriques. Des problèmes sont donnés dans le cadre géométrique ou dans des contextes d'utilisation variés.

L'une des articulations la moins mobilisée par les tâches est celle entre le cadre numérique et le cadre algébrique (généralisation et preuve). De même, on peut remarquer que les problèmes donnés en langage naturel peuvent souvent être traduits algébriquement sans reformulation.

II.2 SUJETS D'EXAMEN DE BEP TERTIAIRE

Analysons maintenant les sujets de BEP tertiaire proposés en 1989, 1990, 1991 (les élèves de BEP avec qui nous avons travaillé ont passé leur examen de BEP soit en 1990, soit en 1991). Les sujets d'examen de BEP tertiaire sont destinés aux trois sections de BEP (CAS, VAM ou ACC). La liste d'exercices à traiter dépend de la section choisie. Les exercices se répartissent en fonction des thèmes du programme et des capacités exigibles. Nous trouvons des exercices correspondant aux rubriques *Problèmes numériques et algébriques, Fonctions* et *Statistiques*.

Dans les deux premières rubriques prises en compte dans notre étude, deux types de problèmes coexistent :

- des problèmes internes au cadre algébrique ou liés à un contexte concret général et qui mettent en jeu des calculs numériques ou littéraux, des fonctions, des équations, systèmes ou inéquations,

- des problèmes liés au secteur tertiaire qui mettent en jeu la proportionnalité, le calcul des coûts, l'indice des prix, les mathématiques financières, c'est-à-dire, les intérêts simples, les intérêts composés, les effets, escomptes, traites.

Ces deux types de problèmes mettent en jeu des types de traitement algébrique distincts que nous détaillons dans les paragraphes suivants.

II.2.1 Répartition des exercices selon les types de tâche en jeu

Donnons d'abord une répartition des exercices proposés dans les sujets d'examen de BEP selon les types de tâche en jeu. Elle varie beaucoup d'une académie à l'autre, que ce soit en termes de points de vue envisagés, de contenus mathématiques. Il en est de même pour la longueur des sujets.

Nous trouvons des académies "très novatrices" qui ont pris en compte l'évolution du programme et proposent des sujets d'examen moins tournés vers les applications du domaine tertiaire (90 Nice, 89 Toulouse, 91 Strasbourg).

D'autres en revanche proposent des sujets "très classiques" très spécifiques des applications tertiaires (89 Amiens). L'académie de Paris-Créteil-Versailles fait partie de ces académies "très classiques".

En résumé, voici le tableau de répartition des exercices proposés dans les sujets d'examen de BEP selon les types de tâches en jeu :

BEP 91 STRASBOURG TERTIAIRE

Questions à traiter C.A.P.	B.E.P.	autres	PREMIERE PARTIE :	Barèmes et notation C.A.P.	B.E.P. C.A.S.	autres B.E.P.
			La distance de freinage jusqu'à l'arrêt d'une automobile est liée à la vitesse par la formule suivante : $D = \frac{V^2}{1000\,k}$ D étant la distance de freinage en mètres, V étant la vitesse de l'automobile en km par heure, k étant le coefficient d'adhérence de la route.	4 pts	4 pts	3 pts
X	X	X	1) Calculer D dans le cas où : a) la vitesse est de 60 km/h et l'adhérence faible (k = 0,2)			
X	X	X	b) la vitesse est de 100 km/h et l'adhérence forte (k = 0,85) (arrondir à l'unité)			
X	X	X	2) Une automobile a freiné sur une distance de 56 mètres, l'état de la route était tel que k = 0,35 ; Calculer sa vitesse au moment du freinage.			
		X	3) Calculer le coefficient d'adhérence de la route (k) dans le cas où une automobile roulant à 60 km/h s'est arrêtée sur une distance de 60 mètres.			

DEUXIEME PARTIE :

Pour calculer son prix de vente T.T.C. à partir de son prix d'achat H.T., un commerçant utilise un coefficient multiplicateur qui tient compte du Taux de marque et du Taux de T.V.A. appliqués. Ce coefficient est fourni par le barème suivant :

Barème : 4 pts | 4 pts | 3 pts

Taux de T.V.A. % → / Taux de marque % ↓	5,5	18,6	22
25	1,40667	1,58133	1,62667
30	1,50714	1,69429	1,74286
35	1,62308	1,82462	1,87692
40	1,75833	1,97667	2,03333
45	1,91818	2,15636	2,21818
50	2,11000	2,37200	2,44000
55	2,34444	2,63556	2,71111

Utiliser si nécessaire ce tableau pour répondre aux questions suivantes.

C.A.P.	B.E.P. C.A.S.	autres B.E.P.	Questions
X	X	X	1) Calculer le prix de vente T.T.C. d'un article qu'il achète 1500 F H.T. sachant que le taux de marque est de 35 % et le taux de T.V.A. est de 18,6 %.
X	X	X	2) Il achète un autre article 2250 F.H.T.et le revend 3660 F.T.T.C. Le taux de T.V.A. étant de 22 %, quel est le taux de marque appliqué ?
		X	3) Un autre article soumis à la T.V.A. de 18,6 % lui a été fourni au prix de 1600 F. H.T. Il le revend 3329,12 F.T.T.C. Quel est le taux de marque qu'il a appliqué ?

Questions à traiter C.A.P.	B.E.P. C.A.S.	autres B.E.P.	TROISIEME PARTIE :	Barèmes et notation C.A.P.	B.E.P. C.A.S.	autres B.E.P.
			Les statistiques étudiées ci-dessous portent sur le prix de vente du mètre carré de logement dans un quartier résidentiel.	5 pts	6 pts	5 pts
X	X	X	1) On a représenté en Annexe 1 les résultats de cette enquête sous la forme du polygone des effectifs cumulés croissants. Compléter à l'aide de ce graphique le tableau ci-dessous :			

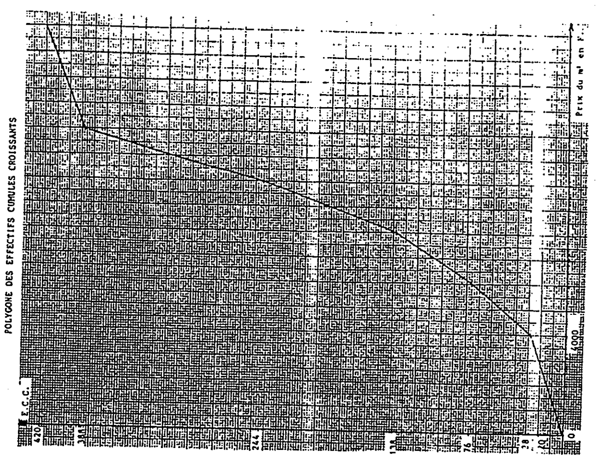
Classes	E.C.C.	Effectifs

C.A.P.	B.E.P. C.A.S.	autres B.E.P.	Questions
X	X	X	2) Déterminer graphiquement la médiane.
	X	X	3) Calculer le prix moyen du mètre carré (arrondir au franc).
		X	4) Construire l'histogramme de cette série sur l'Annexe 2 en utilisant les unités indiquées.
		X	5) Calculer la médiane (arrondir au franc le plus proche).

FEUILLE A RENDRE PAR LE CANDIDAT

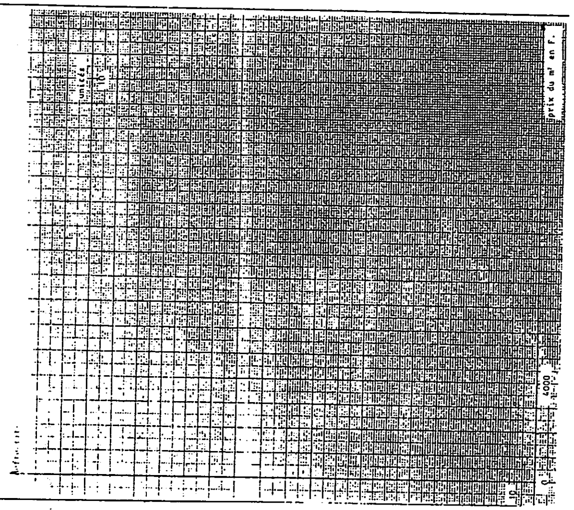
ANNEXE 1 TROISIEME PARTIE (SUITE)

POLYGONE DES EFFECTIFS CUMULES CROISSANTS



ANNEXE 2 TROISIEME PARTIE (SUITE)

HISTOGRAMME DE LA SERIE STATISTIQUE



BEP 91 STRASBOURG TERTIAIRE (suite)

Questions à traiter			QUATRIEME PARTIE :	Barèmes et notation		
C.A.P.	B.E.P. C.A.S	autres B.E.P.	(Justifier les réponses aux questions suivantes sur la copie)	C.A.P.	B.E.P. C.A.S	autres B.E.P.
			Dans un restaurant administratif organisé en self-service, le prix de chaque plat est indiqué en points, ces points étant totalisés et convertis en francs lors du passage à la caisse.	7 pts	6 pts	6 pts
			A) Pour le personnel travaillant au restaurant et y prenant son repas, le prix de celui-ci est directement proportionnel au nombre total de points.			
X	X	X	1- Compléter le tableau ci-dessous correspondant à des repas pris par Mme Dupond, employée au restaurant :			
X	X	X	2- Si x est le total des points correspondant à un repas et y le prix à payer, exprimer y en fonction de x. Quelle est la nature de cette fonction ?			
X	X	X	3- Représenter cette fonction sur la feuille millimétrée de l'Annexe 3, en respectant les unités indiquées.			
			B) Pour les fonctionnaires venant prendre leur repas dans ce restaurant, le calcul du prix du repas est différent. Au prix calculé comme précédemment (à partir des points), est ajoutée une somme fixe correspondant aux frais de fonctionnement. Voici par exemple le tableau correspondant à des repas pris par M. Durand.			
		X	1- Si x est le total des points correspondant à un repas et y le prix payé, exprimer y en fonction de x. Quelle est la nature de cette fonction ?			
		X	2- Représenter cette fonction dans le même repère que précédemment.			
		X	3) Retrouver graphiquement et par le calcul le nombre de points correspondant à un repas payé 25,90 Francs.			
		X	C) Comparer les tracés des représentations graphiques de ces deux fonctions et justifier ce qu'on observe.			

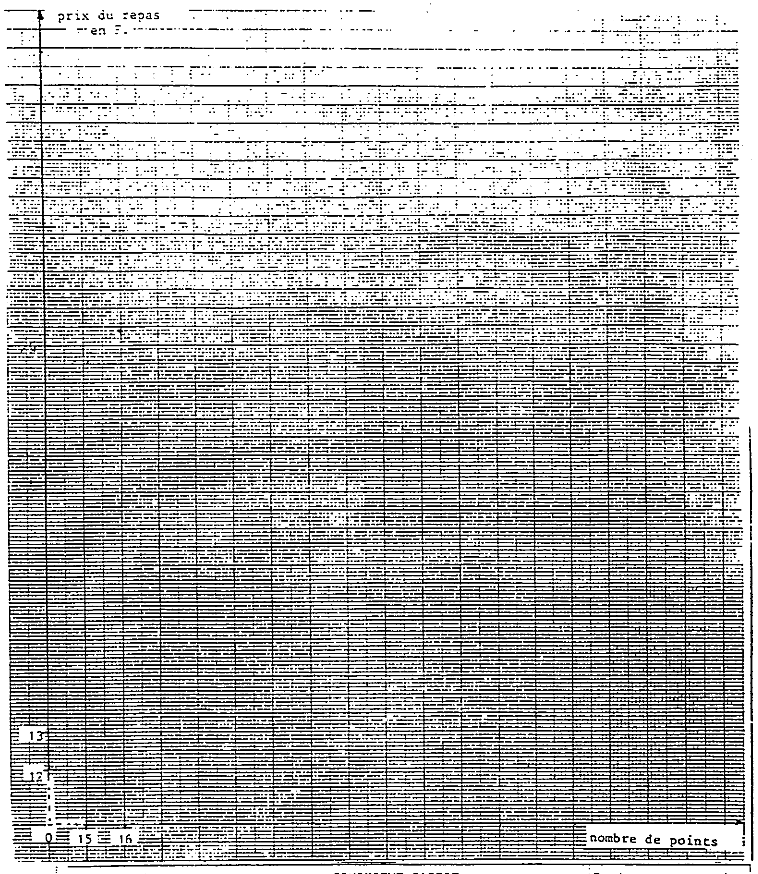
Tableau A) 1- :

Nombre de points			20	30	26
Prix payé en F.	21,00	18,00	15,00		

Tableau B) :

Nombre de points	22	21	16	24	26
Prix payé en F	28,90	28,15	24,40	30,40	31,90

ANNEXE 3 — QUATRIEME PARTIE (SUITE)



Questions à traiter			CINQUIEME PARTIE	Barèmes et notation		
C.A.P.	B.E.P. C.A.S	autres B.E.P.		C.A.P.	B.E.P. C.A.S	autres B.E.P
		X	Un téléviseur marqué 4450 Francs peut être payé à crédit : - 20 % comptant - le solde en six mensualités égales, la première échéant à un mois. Calculer le montant d'une mensualité. Taux d'équivalence avec le paiement comptant : 16,5 %.			3 pts

B.E.P. C.A.P.

I - CALCULS NUMERIQUES

98 765,43 F représentant les dépenses de copropriété entre des copropriétaires.

Répartir le montant des charges par copropriétaire selon les "parts" (millièmes). Arrondir les résultats au F supérieur.

	ALDEBERT	BERCAL	CALDERA	DERANE	ESCAIFFE	FENERGAN	GANACHE	HADJAN	JANAIN	MAINIGO	NIGOLIN	OLYMPE	PERRIN	RINGO	TOTAL
QUOTAS	0,085	0,072	0,12	0,128	0,098	0,072	0,093	0,046	0,085	0,052	0,025	0,061	0,038	0,033	
Montant des charges par copropriétaire															

8

II - UTILISATION D'UN GRAPHIQUE

a) Par lecture du graphique, annexe 1, compléter le tableau suivant pour un taux de marque de 40 %.

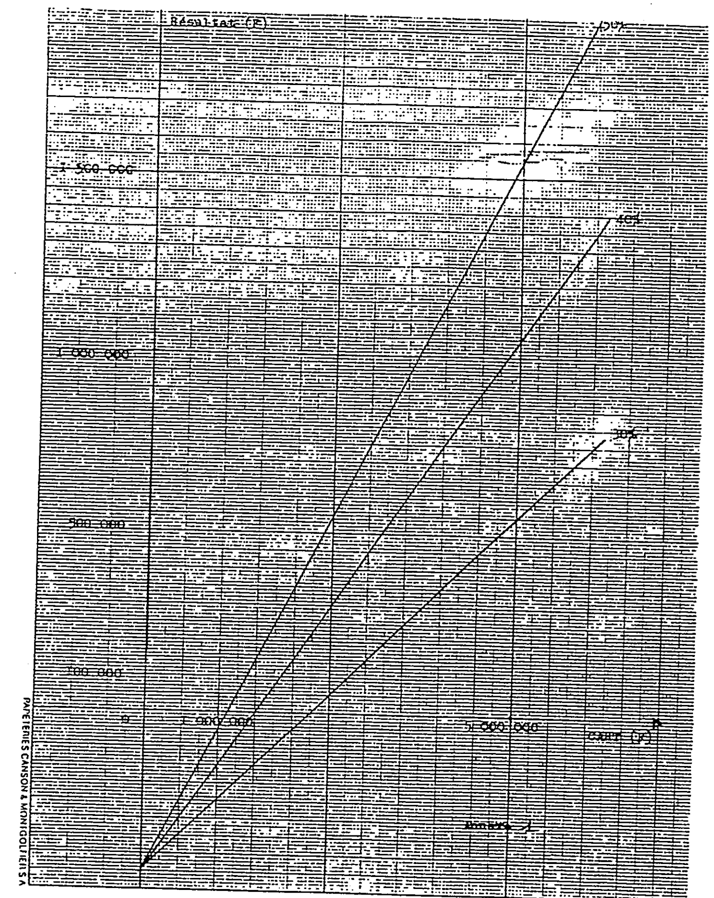
CAHT (F)	1 000 000	2 500 000		
Résultat (F)			470 000	1 050 000

2

b) Une entreprise est rentable si son résultat est supérieur ou égal à 0.
Déterminer graphiquement les seuils de rentabilité (CAHT minimum) et compléter le tableau.

TAUX DE MARQUE	SEUIL DE RENTABILITE
30 %	
40 %	
50 %	

1,5



c) Chiffre d'affaires : 4 000 000 F : Compléter le tableau.

TAUX DE MARQUE	RESULTAT (F)
30 %	
40 %	
50 %	

1,5 1

BEP - CAP 90 TOULOUSE (SUITE)

III - POURCENTAGES - FONCTIONS

a) Compléter le tableau : 4 4

CAHT (F)	C	3 000 000	5 000 000
Marge brute (35 % du CAHT)	M		
Frais fixes (F)	F	450 000	450 000
Frais variables(F) 10 % du CAHT	FV		
Montant total des frais (F)	Tf		
Résultat (F) = Marge brute - somme des frais	R		

b) On désigne par C le chiffre d'affaires hors taxes (CAHT).
Donner l'expression du résultat R en fonction du CAHT : $R = f_{(C)}$. 2

c) Représenter graphiquement la fonction R = 0,25 C - 450 000 sur la feuille annexe 1. 3

d) En résolvant l'équation R = 0 soit 0,25 C - 450 000 = 0 déterminer le seuil de rentabilité C_0. 2

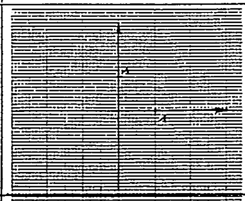
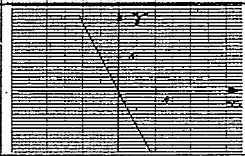
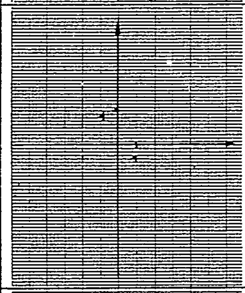
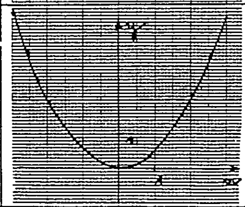
e) Donner l'équation de la droite qui correspond au taux de 40 %. 3

IV - FONCTIONS ET EQUATIONS

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f_{(x)} = y$

Compléter le tableau ci-après :

a)+b)+c)+d) (B.E.P.) 7
a)+b) (C.A.P.)

	FONCTION	REPRESENTATION GRAPHIQUE	NATURE DE f	SENS DE VARIATION DE f
a)	$y = 2x - 1$			
b)	$y = \ldots\ldots$			
c)	$y = \frac{5}{x}$		Forme générale de la fonction (f)	
d)	$y = \ldots\ldots$			

V - STATISTIQUES

Dans cette entreprise, une enquête sur les revenus mensuels et l'âge des clients ayant recours à l'achat à crédit, a donné les résultats suivants (en pourcentage)

Revenus mensuels (F) \ Ages (années)	Moins de 30 ans	[30 ; 40[	[40 ; 50[	Plus de 50 ans	TOTAL
[4000 ; 5000[	5,4	2,6	1,5	0,5	10
[5000 ; 6000[	6,2	3,4	2,4	1	13
[6000 ; 7000[	12	6	1,6	0,4	20
[7000 ; 8000[	9	7,8	2	1,2	20
[8000 ; 10000[	5	3,2	2,5	1,3	12
[10000 ; 15000[	2	6	8	4	20
[15000 ; 20000[	0,4	1	2	1,6	5
TOTAL	40	30	20	10	100

Lecture du tableau :

- % de clients ayant moins de 40 ans
- % de clients ayant des revenus inférieurs à 10000 F. 6
- % de clients ayant moins de 50 ans et des revenus supérieurs à 8 000 F.

BEP-CAP 89 AMIENS TERTIAIRE

	1	2	3	4	5	6	7	8	Durée	Coef.
COMMERCE	X	X	X	X		X			2 h	2
VENTE ACTION MARCHANDE	X	X	X	X		X			2 h	2
HOTELLERIE	X					X		X	1 h	2
A. C. C.	X		X	X		X	X	X	2 h	2
COMPTABLE	X		X	X		X	X	X	2 h	3
A. S. A. I.	X		X	X		X	X	X	2 h	2
C. A. S.	X	X	X		X				1 h	1
AGENT DE TRANSPORT	X	X	X		X	X			2 h	2

	1	2	3	4	5	6	7	8	Durée	Coef.
STENODACTYLOGRAPHE	X	X				X			1 h	2
VENTE	X	X				X			1 h	2
CUISINIER	X	X				X			1 h	2
EMPLOYE de RESTAURANT	X	X				X			1 h	2
EMPLOYE d'HOTEL	X	X	X			X			1 h	2
EMPLOYE SOMMELIER	X	X	X			X			1 h	1
EMPLOYE de BANQUE	X	X	X	X		X			1 h	2
EMPLOYE d'ASSURANCE	X	X	X	X		X			1 h	2
EMPLOYE DE COMPTABILITE	X	X	X	X		X			1 h	1
EMPLOYE DE BUREAU	X	X	X	X		X			1 h	1
E. S. A. C.	X	X				X			1 h	1

EXERCICE 1) Compléter la facture.

500 pièces de tissus à 128 F l'une:............

... pièces de tissus à 150 F l'une:............

	101 500
Remise 2%	....
Prix brut	....
Transport	7 500
Montant HT	....
TVA 18,6 %	....
Montant TC	....

EXERCICE 2) Un article vendu 5 800 F taxe comprise a supporté une TVA de 33 1/3 %.

a) Quel est le prix de vente hors taxe ?

b) Sachant que le taux de marque était de 30%

Déterminer le coût d'achat.

EXERCICE 7) Un capital c placé à intérêts composés au taux t% par an est devenu (valeur acquise)

C_1 = 6312,39 F au bout de 4 ans

C_2 = 7969,24 F au bout de 8 ans

On rapelle que $C = c\,(1 + i)^n$.

Exprimer C_2 et C_1 en fonction de c et de i.

Exprimer le rapport $\dfrac{C_2}{C_1}$

En déduire le taux de placement t et le capital placé c.

EXERCICE 8) Un industriel achète des matières premières 3 083,60 F (TVA 18,6 % comprise)

- Les frais d'achat s'élèvent à 5 % du prix d'achat hors taxe.
- Les frais de production s'élèvent à 80 % du coût de production.
- L'industriel applique un taux de marque de 30 %.

Calculer :

a) Le prix d'achat hors taxe

b) Le coût d'achat

c) Le coût de production

d) Le prix de vente hors taxe

e) Le prix de vente taxe comprise (TVA 18,6 %)

f) Le montant de la TVA à reverser au fisc

g) Le coefficient multiplicateur permettant de passer du prix d'achat hors taxe au prix de vente hors taxe.

EXERCICE 3) Un capital est placé à un taux de 4,5% pendant 45 jours.

Il rapporte un intérêt de 29,25F.

Calculer : a) le montant du capital placé.

b) la valeur acquise.

EXERCICE 4) Un effet de commerce est négocié le 3/9.

Date d'échéance : 8/11.

Valeur actuelle à la négociation : 46 680 F

Taux d'escompte : 15%

Calculer la valeur nominale de cet effet.

EXERCICE 5) Quatre amis se partagent le gros lot du LOTO Sportif proportionnellement à leur mise, respectivement:

184F, 430F, 428F et 38F

Sachant que le premier a reçu 72 220F, trouver, dans l'ordre :

a) Le montant du gros lot.

b) La part de chacune des trois autres personnes.

EXERCICE 6) Au cours d'une semaine, on a relevé les ventes suivantes dans un magasin de chaussures :

Prix en francs	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants	Fréquence en pourcentage
[50 , 100[	75			
[100 , 150[	75			
[150 , 200[	150			
[200 , 250[	100			
[250 , 300[	50			
[300 , 400[	40			
[400 , 500[	10			

a) Compléter le tableau ci-dessus.

b) Déterminer le nombre de clients ayant acheté une paire de chaussures dont le prix est :

1° inférieur à 200 F.

2° supérieur ou égal à 300 F.

c) Déterminer le prix moyen d'une paire de chaussures vendue durant cette semaine.

BEP TERTIAIRE	Fonc-tions	Equat. Syst. Inéq.	Calcul numér littéral	Propor tionna lité	Calcul des coûts	Intérêt simple	Intérêt comp.	Effets Escom -ptes Traites	Pour-centag par tranch	Indice des prix
90 Aix-Marseille 1			X	X	X			X		
89 Amiens (t2)			X	X	X	X	X	X		
90 Amiens (t3)		X		X	X	X	X	X		
91 Amiens (t4)		X		X	X	X	X	X		
91 Grenoble (t5)	X	X		X	X			X		
90 Nancy-Metz(t6)	X	X	X	X	X					
91 Nancy-Metz(t7)		X	X		X					
90 Nice (t8)	X	X		X						
91 Nice (t9)			X		X	X				
89 Toulouse (t10)	X	X	X	X	X					
91 Strasbourg(t11)	X		X		X					
ACC										
88 Bordeaux (a1)	X	X			X	X				
89 Besançon (a2)		X	X	X	X			X		
90 Besançon (a3)	X								X	
89 Nancy-Metz(a4)		X	X		X	X		X		
90Paris.Cr.Vers(a5	X				X			X		
CAS										
89 Besançon (c1)	X					X				
90 Besançon (c2)	X		X		X					
91 Besançon (c3)	X	X				X				
90 Grenoble (c4)					X					
88 Paris.Cr.Ver(c5		X			X					
89 Paris.Cr.Ver(c6	X				X	X				X
VAM										
90 Besançon (v1)	X				X			X		
90 Grenoble (v2)	X		X		X	X		X		
90 Toulouse (v3)	X	X	X		X	X		X		

Tableau n°14 : Répartition des exercices proposés dans les sujets d'examen de BEP selon les types de tâches

II.2.2 Analyse des exercices selon les types de tâche en jeu

II.2.2.1 Les problèmes financiers

Nous proposons une analyse globale selon les types de tâche et associons une grille descriptive à chaque tâche.

	Calcul de coûts	Intérêts simples				Proport.	Effets. Escomptes	
	tous sauf t8, a3,c4	Calcul V acquise t1,t2,t4,t9 ,c1,c3,c6	Calcul taux t1,t3,t4	Calcul V. initiale t1,t2,a1, c1	calcul nb jours t1,t3	t2,t4,t6	Calcul V. actuelle t1	Calcul V. nominale ou taux t3,t4,t11, a2,a5,v1
Type de traitement algébrique								
Tâche numérique	Substitut.	Substitut.				Oui	Substitut.	
Reproduct. niv1			Résol équ	Résol équ	Résol équ	Résol équ		Résol équ
Reproduct. niv2								
Interprétation								
Branch^{t} formule	Oui(deg0)	Oui (deg0)	Oui(deg1)	Oui(deg1)	Oui(deg1)	Oui(deg1)	Oui (deg0)	Oui (deg2)
Product. guidée								
Production								
Résol ou preuve								
Rapport arithmétique / algèbre								
Statut du signe d'égalité	Annonce résultat	Annonce résultat	Equiv	Equiv	Equiv	Equiv	Annonce résultat	Equiv
Statut des lettres	Grandeur	Grandeur	Grand,Inc	Grand,Inc	Grand,Inc	Grand,Inc	Grandeur	Grand,Inc
Objet et statut des objets	Formules à plus. var 1er degré	Formule à plus. var 1er degré	Formule à plus. var, Equation à 1 inc 1er degré	Formule à plus. var, Equation à 1 inc 1er degré	Formule à plus. var, Equation à 1 inc 1er degré	Proport.	Formule à plus. var 1er degré	Formule à plus. var, Equation à 1 inc 1er degré
Fonction de l'algèbre								
Emploi de l'algèbre	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire	Résoudre pb ds cont d'applicat. tertiaire

Tableau n°15 : Répartition des types de tâche dans les problèmes financiers

Nous avons vu dans l'analyse a priori que ces problèmes pouvaient être résolus en utilisant diverses démarches. En particulier, rappelons que tous ces problèmes permettent une survie des pratiques arithmétiques et l'utilisation des proportions pour mettre un problème en équation. Excepté pour deux examens (Nice 90 et Besançon 90), tous les sujets contiennent au moins un exercice permettant des pratiques arithmétiques.

Remarquons que lorsque nous indiquons comme type de traitement algébrique "branchement formule", il se peut qu'une autre démarche soit utilisée et n'entraîne pas ce type de traitement.

II.2.2.2 Les problèmes numériques et algébriques

a) Les fonctions

Nous trouvons plusieurs types de problèmes qui mettent en œuvre la notion de fonction :

1) Traduction algébrique d'une relation fonctionnelle linéaire ou affine entre deux grandeurs puis représentation graphique de la fonction

C'est le cas pour un des exercices des examens t5, t6, t8, a3 et c2. Illustrons-le par un exercice prototypique : énoncé du problème n° 2 de Grenoble 91 (t5)

"Un représentant a la possibilité de choisir entre deux modes de rémunération mensuelle;
Mode n°1 : composé d'un fixe de 5000^F et d'une commission de 4% sur le chiffres d'affaires.
Mode n°2 : composé d'une commission sur le chiffre d'affaires calculée suivant le barème :
6% pour chiffre d'affaires inférieur à 50000^F
8% pour la partie du chiffre d'affaires dépassant 50000^F.
2°) Etablir les deux modes de rémunération $f_1(x)$ et $f_2(x)$ en fonction du chiffre d'affaires x.
3°) Représenter ces fonctions dans un même repère cartésien pour $x \leq 180000^F$.
- abscisse unité : 10000^F
- ordonnée unité : 1000^F."

2) Détermination de *f(x)* à partir d'un tableau de valeurs

C'est le cas pour un des exercices de l'examen Strasbourg 91(t11).

Enoncé :

"(...) Pour les fonctionnaires venant prendre leur repas dans ce restaurant, le calcul du prix du repas est différent. Au prix calculé comme précédemment est ajoutée une somme fixe correspondant aux frais de fonctionnement. Voici par exemple le tableau correspondant à des repas pris par Monsieur Durand.

Nombre de points	*22*	*21*	*16*	*24*	*26*
Prix à payer en F	*28,90*	*28,15*	*24,40*	*30,40*	*31,90*

1. Si x est le total des points correspondant à un repas et y le prix payé, exprimer y en fonction de x. Quelle est la nature de cette fonction. "

3) Interprétation et exploitation de la représentation graphique d'une fonction,

C'est le cas pour un exercice des examens t8, t10, v2, v3. L'énoncé du problème n°1 de Nice 90 (t8) est présenté dans le paragraphe II.2.1 précédent. Dans les problèmes t10 et v3, il est demandé de déterminer une équation réduite de droite connaissant son tracé dans un repère donné.

4) Détermination d'une relation fonctionnelle entre deux grandeurs par utilisation de formules du domaine d'application tertiaire

C'est le cas pour un exercice des examens t10, a5, c5, v2, v3. Les exercices de a5 et v2 sont classiques : ils se ramènent à la relation *affine* respectivement entre un agio H.-T.

et le nombre x de jours séparant l'échéance de la négociation ou entre un bénéfice et le prix de vente.

En revanche, le problème n°4 de v2 conduit à l'expression d'une fonction homographique entre le nombre de jours de placement et le taux d'intérêt du placement par transformation de la formule exprimant l'intérêt en fonction du taux, du nombre de jours de placement et du capital initial.

5) Nature, sens de variations et représentation graphique de fonctions données par une formule dans le cadre algébrique

C'est le cas pour un exercice des examens t10, a1, c1. Aucune justification algébrique n'est exigée.

6) Représentation graphique de fonctions affines données par une formule dans un contexte concret

C'est le cas pour l'exercice B de l'examen de Besançon CAS 91 (c3) dont voici l'énoncé :

"Une personne en infraction au contrôle de vitesse précédent présente un taux d'alcoolémie de 1,8 grammes d'alcool par litre de sang. En supposant que le taux d'alcoolémie diminue de 0,2g par heure et suit une loi du type

$y = -0{,}2\, x + 1{,}8$.

où y est le taux d'alcoolémie

et x le nombre d'heures écoulées.

1) représenter graphiquement cette fonction, pour x appartenant à l'intervalle [0;9]

Echelle : ordonnée : 1 cm pour 0,2 g

abscisse : 1 cm pour 1 heure."

2) Au bout de combien de temps le taux sera-t-il devenu inférieur ou égal à 0,8g par litre ? (solution algébrique et graphique)."

En résumé, voici la grille d'analyse donnant la liste des valeurs des critères attachés à chaque type de problèmes mettant en jeu la notion de fonction :

	t5, t6, t8, a3, c2	t11	t8, t10, v2, v3	t10, a5, c5, v2, v3	t10, a1, a3, c1, v1	c3		
Type de traitement algébrique								
Tâche numérique	Substituer	Substituer		Substituer	Substituer	Substituer		
Reproduct. niv1		Oui	Substituer (v2,v3)	transf (v2)		Résol équ, inéquat		
Reproduct. niv2								
Interprétation	Oui (fct.)	Oui (fct.)	Oui	Oui	Oui	Oui		
Pour étude fonct		Exprimer f(x)	Détermine équ droite					
Branch[t] formule				Dans sect. tertiaire				
Production guidée	Ds cont. familier							
Production								
Preuve								
Rapport arithmétique / algèbre								
Statut du signe d'égalité	Equiv, Ann rés	Equiv Ann rés	Equiv, Ann rés	Equiv Ann rés	Equiv Ann rés	Equiv, Ann rés		
Statut des lettres	Var, grand Inc	Var, grand Inc	Var, grand	Var, grand Inc	Var, Inc	Var, grand Inc		
Objet et statut des objets	Fonctions affines, affines par morceaux	Fonctions affines	Fonctions affines, affines par morceaux, polynôme du 2ème degré,	fonctions linéaire, affine, homographique	Fonct affines, polynôme du 2ème degré, homographique	Fonct affines		
Gestion dans registre algébrique								
Type de formation								
Type de traitement	Equation, Inéquation 1er degré	Calcul de coeff. dir. Equation de droite	Calcul de coeff. dir. Equation de droite	Equation 1er degré Transf formule	Système équations 1er degré à 2 inc	Equation 1er degré		
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres								
Registres en jeu	Lg>Alg Alg>Gr	Nu>Alg Alg>Gr	Gr>Alg Gr>Nu	Ct T>Alg Alg>Gr	Alg>Gr	Ct>Alg Alg>Gr		
Type de conversion	Congruent	Non Congruent	Non Congruent	Congruent		Congruent		
Fonction de l'algèbre								
Emploi de l'algèbre	Mathémat situation concrète	déterminer fonction affine	Exploiter graphique algébrique-ment	Résoudre pb secteur tertiaire	Etudier fonction (hors alg)	Etudier fct donnée $y=ax+b$ ds contexte concret		

Tableau n°16 : Répartition des types de tâche dans les exercices mettant en jeu la notion de fonction

Dans le cadre fonctionnel, l'algèbre peut être mis en jeu comme outil de formulation dans des contextes concrets familiers. Mais, ces types de problèmes restent dans l'ensemble marginaux. Dans ce cas, les lettres sont des variables-grandeurs liées au contexte, qui n'interviennent que dans des calculs numériques ou dans la résolution d'équation. Par exemple, dans le problème II de l'examen de BEP Nancy-Metz 90 (t6), yA et yB désignent respectivement selon les entreprises A et B, les sommes dues en fonction du kilométrage parcouru. Ce n'est pas le cas en Seconde, où les lettres sont des variables qui entrent dans des calculs formels.

Les problèmes mettent en jeu l'articulation entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres : registre du langage naturel, registre des équations de droites, registre graphique. Mais dans le cas du registre du langage naturel, l'articulation concerne le plus souvent deux représentations congruentes. Dans quelques problèmes marginaux, il est demandé de déterminer algébriquement une fonction affine ou une équation de droite, soit à partir des images de nombres, soit à partir d'une lecture graphique : l'articulation, soit du cadre numérique vers le cadre algébrique, soit du cadre graphique vers le cadre algébrique est alors requise, mais les calculs demandés sont très simples. Globalement, l'algèbre comme outil d'étude de fonction n'est pas mobilisé dans ces exercices. Ce n'est pas le cas en Seconde où le rapport au fonctionnel engage l'algèbre dans une nouvelle dimension (étude du sens de variations d'une variation, détermination d'un extremum, ...)

Les exercices proposés sont globalement des exercices familiers, voire stéréotypés, qui doivent avoir été traités en cours. Quelques rares exercices demandent plus d'initiative.

b) Les équations, systèmes et inéquations

On peut mettre en évidence deux types d'exercices :
- ceux internes au cadre algébrique : résolution d'une équation du premier ou du second degré à une inconnue, d'une inéquation du premier ou du second degré à une inconnue ou d'un système de deux équations à deux inconnues du premier ou du second degré,
- ceux donnés dans un contexte concret ou dans le domaine tertiaire et qui mettent en jeu, soit la reproduction de tâches d'ordre numérique (substitution dans des formules des lettre-grandeur par des valeurs numériques), soit la reproduction de tâches formelles non finalisées de niveau 1.

Environ un tiers des épreuves d'examen proposent un exercice du premier type. Dans ce cas, la résolution des équations, inéquations ou systèmes met en jeu l'application de savoir-faire de base directement applicables et la manipulation formelle d'expressions algébriques y est très réduite. Les savoir-faire peuvent se réduire à des gestes dans le cas d'exercices assez stéréotypés.

Notons ici les exercices le plus fréquemment proposés, c'est-à-dire, ceux qui consistent à reproduire des tâches d'ordre numérique :

- calculer des formules données dans un contexte concret pour des valeurs numériques (t1, t2, t6, t7, t9, t10, t11, a2, a4, c2, v2, v3),
- calculer des valeurs intervenant dans une situation de proportionnalité (t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t9, t10, t11, a2).

Nous donnons ci-dessous la grille descriptive de chaque type de problèmes mettant en jeu la résolution d'équations ou de systèmes :

	t6, t7, t8, t10, a4, c5 (éq 1er)	t6 (inéq 1er degré)	t7, c5 (syst 1er)	a1(syst 2e degré)	t4, a2, v3 (éq 2è degré)	a4 (inéq 2è degré)	t3, t8, v3 (éq 1, 2 d)	t5, c2, c3, v3 (inéq 1 deg,éq 2)
Type de traitement algébrique								
Tâche numérique								
Reproduct. niv1	Résol	Résol	Résol		Résol		Résol	Résol
Reproduct. niv2				Résol		Résol		
Interprétation				Oui				
Branch^t formule							Oui	Oui
Product. guidée							Oui (t3, v3	Oui(c3,v3
Production								
Preuve								
Rapport arithmétique / algèbre								
Statut des lettres	Inc	Inc	Inc	Inc	Inc	Inc	Var, inc, grand	Var, inc, grand
Objet et statut des objets	Equation1 er degré 1 inconnue	Inéquation 1er degré 1 inconnue	Systèmes 2 équation linéaires 2 inconnues	Systèmes 2 équation 1er ou 2è dg à 2 inc.	Equations 2ème degré à 1 inconnue	Inéquation 2ème degré à 1 inconnue	Equation, 1er ou 2è degré à 1 inconnue	Inéquation 1er ou 2è degré à 1 inconnue
Gestion dans registre algébrique								
Type de formation								
Type de traitement								
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres								
Registres en jeu	Alg	Alg	Alg	Alg	Alg	Alg	Lg>Alg	Lg>Alg
Type de conversion							Non congruent	Congruent
Fonction de l'algèbre								
Emploi de l'algèbre	Manipulation formelle	Manipulation formelle	Manipulation formelle	Manipulation formelle	Manipulation formelle	Manipulation formelle	Résoudre dans contexte	Résoudre dans contexte

Tableau n°17 : Répartition des types de tâche dans les exercices de résolution d'équations

Seuls deux exercices nécessitent l'appel à la sémantique des expressions algébriques et apparaissent comme très marginaux :

- dans l'exercice I du sujet d'examen de Nancy-Metz 89 (a4), on demande de résoudre dans R l'inéquation du second degré : $(4x - 3)(7 + x) < 0$.

- dans l'exercice II 1) du sujet d'examen de Bordeaux 88, on demande de résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système $\begin{cases} y = 4x^2 - 5 \\ y = 4x - 2. \end{cases}$

Insistons sur un point important : aucun exercice des sujets d'examen de BEP ne met en jeu le développement ou la factorisation d'expressions algébriques. De plus, la proportion d'exercices internes au cadre algébrique, où c'est la technique de résolution d'équations du premier degré ou de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues qui est évaluée, est faible. Contrairement aux exercices de Seconde indifférenciée, le rapport à l'algèbre mis en jeu dans ces épreuves intègre peu un rapport à la manipulation formelle des expressions algébriques.

II.2.3 Synthèse

L'analyse des sujets d'examen de BEP tertiaire met d'abord en évidence la très grande variété des sujets et la répartition très inégale, selon les académies, des exercices liés au secteur tertiaire et des exercices internes au cadre algébrique ou liés à un contexte concret plus général. Nous l'avions déjà indiqué au début du paragraphe.

• Les exercices mettent principalement en jeu des tâches d'ordre numérique, souvent dans un contexte concret. De rares tâches de calcul algébrique sont proposées, dans le cadre algébrique ou en liaison avec un contexte concret, et consistent à résoudre équations ou inéquations du premier degré à une inconnue, équations ou inéquations du second degré à une inconnue, système de deux équations linéaires à deux inconnues. C'est l'application de savoir-faire de base directement applicables, voire de gestes qui semble visé. L'analyse des exercices montre donc un rapport institutionnel à l'algèbre qui prend peu en compte le traitement algébrique des expressions. Ce n'est pas le cas en Seconde indifférenciée : les exercices de manipulation formelle de niveau 1 et 2 constituent un ensemble de problèmes à partir duquel les élèves peuvent développer les techniques de traitement formel des expressions associées.

• Du côté outil, les capacités demandées consistent à mobiliser des savoir-faire algébriques de base pour mettre en équation puis résoudre des situations contextualisées et familières à partir du branchement sur une formule ou par une traduction guidée (degré de complexité 1, 2 ou 3 (3 surtout pour la section CAS)). La dimension outil de l'algèbre passe avant tout par un rapport d'utilisation de formules dans des situations contextualisées au secteur tertiaire mettant en jeu un traitement algorithmisé correspondant à celui d'exercices modèles déjà faits. Quelques exercices marginaux nécessitent l'utilisation de l'algèbre comme outil de résolution dans des situations plus ouvertes. Dans la dimension fonctionnelle, les lettres peuvent garder souvent le statut de variables-grandeurs. L'algèbre intervient localement pour calculer des images ou bien rarement pour rechercher des antécédents : le rapport à l'algèbre reste organisé autour de la substitution de lettres par des valeurs numériques, de la résolution d'équations du premier degré. L'algèbre n'est pas mobilisée comme outil d'étude des fonctions alors qu'elle commence à l'être en Seconde.

Soulignons de plus, que la majorité des exercices du premier degré peuvent être résolus par des pratiques arithmétiques.

• Les objets mathématiques mobilisés dans la résolution des divers problèmes sont essentiellement du premier degré (fonctions linéaires et affines, équations du premier degré, systèmes d'équations linéaires à deux inconnues). C'est la dimension procédurale des objets qui semble privilégiée. La résolution des tâches exige seulement l'utilisation de sous-ensembles de règles de formation et de traitement relatives au premier degré.

• Les registres habituels sont mis en jeu. L'articulation entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques fait le plus souvent appel à des relations sémantiquement congruentes. De nombreux exercices mettent en jeu l'interprétation de graphiques, mais une interprétation globale ne semble pas nécessaire pour répondre aux questions posées. Le passage du cadre graphique au cadre algébrique est rarement mobilisé. L'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des équations est essentiellement mise en jeu dans le contexte financier, les lettres ayant le statut de variables-grandeurs.

En conclusion, globalement les sujets d'examen de BEP tertiaire montrent un rapport institutionnel à l'algèbre différent de celui mis en jeu dans les problèmes de Seconde indifférenciée de l'EVAPM. Mais, localement selon les académies, le rapport à l'algèbre est plus ou moins lié au poids important des applications tertiaires très stéréotypées.

III. ANALYSE DES CAHIERS D'ÉLEVES

III. 1 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODOLOGIE

III.1.1 Les objectifs

Nous continuons l'étude des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire par l'analyse de cahiers d'élèves pour les raisons suivantes :

• Nous avons travaillé avec des élèves qui ont accepté de nous prêter leur cahier de cours de mathématiques de B.E.P. tertiaire, ce qui fut assez difficile. Des cahiers recouvrent le cours de première et de deuxième année de B.E.P. tertiaire, d'autres seulement le cours de deuxième année. L'analyse des cahiers donne des informations dans plusieurs directions :

- Nous avons une trace effective des savoirs enseignés et des types d'exercices privilégiés par un enseignant, des divers aspects du savoir algébrique privilégiés dans le cours, des outils utilisés dans les exercices et de leurs conditions de mise en fonctionnement. Nous avons une image du type d'activité mathématique et de la compétence algébrique mis en jeu par les mathématiques enseignées dans la classe.

- Le contenu des cahiers donne accès partiellement au contrat didactique relatif à une classe donnée, c'est-à-dire, à ce qui est spécifique de la connaissance mathématique visée dans les rapports entre l'enseignant et les élèves[10]. Nous découvrons quelles sont les exigences habituelles du professeur et les performances des élèves qu'il attend. En revanche, nous n'avons pas accès aux aides fournies par l'enseignant, au dialogue dans la classe, à la gestion de la classe de mathématiques. Mais il nous semble que l'analyse des cahiers donne plus d'indices sur le contrat didactique que celle des manuels scolaires. Nous pouvons faire des hypothèses crédibles à partir des traces écrites du cours des élèves de ce qui relève de la responsabilité du professeur et des élèves dans la gestion des connaissances.

• L'analyse des cahiers rend possible un des principaux objectifs de notre recherche, la mise en relation, lorsque c'est possible, entre certaines caractéristiques du fonctionnement cognitif des élèves en algèbre élémentaire et certaines caractéristiques de l'enseignement antérieur relatif à ce domaine.

• Enfin, elle nous permet de selectionner et de limiter le nombre de points d'entrée dans l'analyse des manuels sur un domaine mathématique, certes restreint, mais encore très vaste. En effet, à partir de cette première analyse, nous retiendrons quatre points qui

[10]Nous faisons référence ici au travail de Driss Mensouri [Mensouri, 1994]

nous semblent être des leviers déterminants quant à l'adaptation des élèves en Première G :

- quels sont les rapports à la manipulation formelle développés (technicité du traitement, signification accordée aux expressions, ...);
- quels sont les rapports à l'algèbre en tant qu'outil de résolution de problèmes ?
- comment le contexte intervient-il dans l'activité mathématique ?
- quel sont les rapports arithmétique /algèbre qui peuvent vivre dans la résolution des problèmes ?

III.1.2 Deux axes d'analyse

Nous faisons une analyse des cahiers de six élèves venant de classes dans des lycées techniques représentatifs du recrutement de notre établissement.

L'analyse des cahiers d'élèves s'organise selon deux axes.

1) Premier axe d'analyse

Dans cette partie de l'analyse nous nous attachons, d'une part, à décrire l'organisation du cours de mathématiques, et d'autre part, à mettre en évidence des éléments du rapport institutionnel à l'algèbre élémentaire développé à travers l'enseignement de professeur. En particulier, nous tentons de faire ressortir, à partir des objets algébriques d'enseignement, les divers aspects objet et outil de la compétence algébrique mis en jeu par les savoirs enseignés. Nous ne faisons en aucun cas, une analyse fine de l'enseignement des notions visées par le programme. Nous cherchons à mettre en évidence des régularités concernant l'emploi des objets et outils algébriques mis en fonctionnement dans les exercices proposés aux élèves, les types d'exercices et les conditions de mise en fonctionnement de ces savoirs.

Pour chaque cahier, nous organisons l'étude autour des points suivants :

• La présentation de la liste des contenus mathématiques enseignés et du plan suivi au cours de l'année par l'enseignant :

Nous pouvons ainsi comparer les rubriques mathématiques traitées par rapport au contenu effectif du programme. Nous pouvons étudier comment sont organisés les relations entre chapitres concernant les mathématiques classiques et les mathématiques financières.

• L'étude des rapports aux objets de l'algèbre élémentaire :

Pour l'ensemble des cours concernant les objets d'enseignement de l'algèbre élémentaire (expressions algébriques, équations et fonctions, inconnues et variables, ...), nous rendons compte de la structure du savoir algébrique mis en jeu dans les deux dimensions *objet* et *outil*.

En ce qui concerne la dimension *objet* nous étudions :

- dans quelles situations les notions introduites sont appelées à prendre du sens ;
- quelle est l'imbrication mathématique avec les contextes choisis dans les situations ;
- quelle est la signification accordée à la gestion des représentations symboliques et plus particulièrement quels sont les aspects syntaxiques et sémantiques qui entrent dans le jeu de la manipulation formelle des expressions algébriques ;
- si les traitements mis en jeu dans les exercices nécessitent une interprétation des expressions algébriques à la fois procédurale ou structurale ou bien peuvent se satisfaire d'une interprétation pseudo-structurale.

Nous indiquons quelles justifications sont apportées aux propriétés mathématiques ou aux formules financières. Nous cherchons des traces de présence de *démonstration* ou de *justification* dans les divers cahiers.

En ce qui concerne la dimension *outil* nous mettons en évidence les emplois de l'algèbre. Pour ceci, nous étudions les divers contextes dans laquelle cette dimension peut intervenir, les types de tâche, les types de traitement algébrique mis en jeu dans les problèmes. Nous cherchons en particulier à distinguer le rôle de l'algèbre comme outil au service des mathématiques financières de celui comme outil de modélisation de problèmes dans des contextes divers puis comme outil de résolution ou de preuve.

• L'étude de l'articulation entre l'arithmétique et l'algébrique dans la résolution des exercices du secteur tertiaire :

Comme nous l'avons montré dans le paragraphe I.1.1.2, les exercices du secteur tertiaire (formation des prix, calculs d'intérêts, de capital, ...) nécessitent souvent l'articulation du cadre algébrique et du cadre numérique et peuvent mettre en jeu une démarche de résolution arithmétique. Nous recherchons si, dans les cahiers, nous trouvons des contextes d'utilisation qui permettent à des concepts communs à l'arithmétique et à l'algèbre (signe d'égalité, lettres) de vivre en continuité avec des pratiques arithmétiques.

2) Deuxième axe d'analyse

Pour compléter l'étude précédente, nous centrons l'analyse sur les exercices proposés dans les cours. Après avoir étiqueté le type de chaque exercice, nous associons à chaque exercice sa grille descriptive. Par une analyse transversale, nous pourrons ainsi mettre en évidence des régularités concernant les exercices proposés par chaque professeur.

En synthèse des deux analyses, nous essayons de caractériser la fonction attribuée à l'algèbre élémentaire par l'enseignant dans une classe concernée.

III.2 PRÉSENTATION DES RÉSULTATS POUR CHAQUE CAHIER D'ÉLEVE

Nous analysons successivement le ou les cahier(s) de cours de mathématiques en première et/ou en deuxième année de B.E.P. tertiaire pour sept élèves. Nous réalisons l'analyse suivant les deux axes présentés ci-dessus.

III.2.1 Cahiers de Sandrine F. (1ère année B.E.P. en 1989-1990, 2ième année B.E.P. en 1990-1991 dans la section C.A.S.)

A. Aspects généraux

Nous analysons les cahiers de Sandrine correspondant à l'enseignement des mathématiques sur deux années. Ils contiennent à la fois les cours du professeur et des exercices résolus par Sandrine. A côté des exercices résolus en cours, le cahier contient les exercices d'application résolus par Sandrine. De plus, nous avons les devoirs de contrôle réalisés par Sandrine au cours de ces deux années. Ils permettent de repérer les capacités exigibles en algèbre élémentaire.

L'introduction des notions mathématiques relève de la responsabilité du professeur. L'élève met en application les savoirs, savoir-faire et méthodes étudiées en cours. Les nombreuses résolutions au crayon à papier indiquent une activité personnelle de Sandrine.

A.1 Présentation de la liste des contenus mathématiques enseignés et du plan suivi au cours de l'année

Nous présentons séparément le plan des leçons pour les deux années :

Leçons en 1ère année	Leçons en 2ième année
Ecritures fractionnaires. Opérations	Révision sur les pourcentages
Grandeurs proportionnelles	Formation des prix
Les pourcentages	L'indice simple
Puissances. Racine carrée	Intérêts simples
Calcul algébrique	Statistiques
Equations du 1er degré à une inconnue	Séries cumulées
Les graphiques. Fonctions numériques	Représentation des séries statistiques
Statistiques	Moyenne arithmétique
	Médiane d'une série statistique
	Mode d'une série statistique

Cette progression correspond au programme de mathématiques de BEP de 1983. Le professeur a suivi le découpage du programme sur les deux années proposés par les manuels. Certaines notions mathématiques, telles que les systèmes de deux équations linéaires, les inéquations, les équations du second degré, les fonctions du second degré, les fonctions homographiques, n'ont pas été abordées.

A.2 L'étude des rapports aux objets d'enseignement de l'algèbre élémentaire

Les chapitres concernant les notions mathématiques enseignées en Première année possèdent une structure semblable : définition de la notion mathématique étudiée, propriétés, savoir-faire relatifs aux notions en jeu. C'est la dimension *objet* des notions mathématiques qui est ici privilégié. Viennent ensuite les exercices mettant en œuvre les propriétés et règles de calcul.

Nous étudions successivement la dimension *objet* et *outil* de l'algèbre à travers l'étude des divers objets d'enseignement en relation avec l'algèbre élémentaire.

A.2.1 La dimension *objet* de l'algèbre

Les objets algébriques, expressions algébriques, équations, fonctions sont définis dans le cadre algébrique. Il s'agit

- d'introduire des opérations et de calculer sur les expressions algébriques,
- de donner des règles pour transformer une égalité en une égalité équivalente afin de résoudre des équations du premier degré à une inconnue,
- d'étudier des fonctions et en particulier des fonctions linéaires ou affines (sens de variation, tracé de la courbe représentative d'une fonction dans un repère donné) et d'apprendre à lire des représentations graphiques.

Regardons de plus près comment sont introduites puis utilisées ces notions dans le cours de Sandrine.

• Dans le chapitre *Calcul algébrique*, les expressions algébriques sont définies comme des "*écritures comportant des lettres appelées variables et des opérations portant sur ces lettres*", les monômes comme des "*expressions algébriques ne contenant que des multiplications ou des puissances*" et les polynômes comme des"*sommes de monômes*". Ce chapitre suit celui concernant l'étude des puissances[11]. Les opérations sur les monômes puis sur les polynômes sont introduites suivies de nombreux exercices d'application. Les expressions algébriques manipulées sont de complexité diverse, polynômes de degré 1 à degré 4, fractions rationnelles de une ou plusieurs variables avec

[11]On définit x^n comme le produit de n facteurs x avec n entiers pour n entier positif. Suivent quelques exemples littéraux, x^3, x^1 et x^0 présenté comme convention, x^{-n} et des exemples numériques. On énonce ensuite les règles de calcul sur les puissances sans démonstration ou explication, chacune étant suivie d'un exemple. On ne trouve pas trace de situations d'introduction en dehors du cadre algébrique. L'écriture scientifique d'un nombre n'est pas utilisée pour évaluer des ordres de grandeur : c'est un prétexte aux calculs sur les puissances de dix.

ou non des puissances. La suite du cours porte essentiellement sur des opérations sur les monômes et polynômes.

- Quelle signification l'enseignant donne-t-il aux expressions algébriques ?

Après leur introduction dans le cadre algébrique, les expressions algébriques sont rattachées à un contexte de formules dans divers domaines d'application. Les formules sont des expressions algébriques comme par exemple *"l'aire d'un trapèze (...) donnée par (B+b)h/2, B: grande base, b petite base, h hauteur. 3 variables (B, b, h)"*. Cette situation contribue à associer aux lettres un statut de grandeur auxquelles peuvent être attribuées des valeurs numériques. Ce point de vue sera repris dans les mathématiques financières.

On associe à toute expression algébrique des valeurs numériques en donnant des valeurs aux variables. L'articulation entre le cadre algébrique et le cadre numérique permet d'attribuer une signification aux expressions algébriques. Nous verrons par la suite que l'articulation du cadre algébrique vers le cadre numérique est fortement développée dans le cours de Sandrine. On rappelle la priorité des opérations dans le cadre numérique (*"1. Parenthèses, 2. Puissances ou racines, 3. x ; /, 4. +, -"*) et le rôle des parenthèses dans la construction d'une expression numérique pour indiquer l'ordre des opérations.

- En quoi consiste la manipulation formelle des expressions ?

Dans le cours de Sandrine, manipuler formellement des polynômes consiste à effectuer des opérations sur les polynômes puis à réduire les résultats obtenus. La technicité développée dans les calculs semble porter sur des indices de surface des écritures algébriques : par exemple, on pose verticalement les opérations sur les polynômes en plaçant les monômes de même exposant les uns sous les autres et on effectue le calcul. Aucun calcul portant sur des polynômes ne se fait en ligne. En voici deux exemples :

"Soustraction de deux polynômes

$$\begin{array}{llll} P(x) = & 3x^4 - x^3 & & + 5x + 5 \\ Q(x) = & & 3x^2 & - 8x \end{array}$$

Calculer $P(x)\text{-}Q(x)$

$$\begin{array}{llll} P(x) = & 3x^4 - x^3 & & + 5x + 5 \\ -Q(x) = & & -3x^2 & + 8x \\ \hline P(x)-Q(x) = & 3x^4 - x^3 & -3x^2 & + 13x + 5 \end{array}$$

" Multiplication de deux polynômes

$$\begin{array}{llll} A(x) = & 5x^4 & +3x^2 & +5 \\ B(x) = & & +4x^2 & + x + 1 \\ \hline A(x)+B(x) = & 5x^4 & +7x^2 & + x + 6 \end{array}$$

Les propriétés opératoires utilisées pour réduire ou pour multiplier deux polynômes ne sont pas explicitées. La dimension syntaxique des expressions est pris en compte pour expliciter certains implicites d'écriture, par exemple $x = 1.x^1$. Ces calculs ne font appel ni à la dénotation, ni au sens des expressions algébriques. Le cours n'aborde ni le développement des identités remarquables, ni la factorisation des expressions algébriques.

• Dans le chapitre *Equations du premier degré à une inconnue* on définit, d'une part, "*la solution d'une équation*" et d'autre part "*les règles pour modifier les égalités*", c'est-à-dire pour transformer une égalité en une égalité équivalente. Viennent ensuite une méthode de résolution des équations du premier degré à une inconnue et des exercices d'application.

- Quelle signification attribue-t-on à la résolution des équations ?

* La *solution* d'une équation du premier degré à une inconnue du type $ax+b=0$ avec $a\neq 0$ (les autres cas ne sont pas envisagés) est présentée comme la valeur pour laquelle l'égalité est vraie. On peut la trouver avec une démarche procédurale en recherchant une valeur par essai-erreur jusqu'à ce que l'égalité soit vraie.

"Egalité : 3x5 =8+7
Equation à une inconnue : 2x-1 = 8
La lettre x est appelée l'inconnue.

x	*2x-1*	*2x-1 = 8 ?*
1	*2x1-1 = 1*	*Non*
3	*2x3-1 = 5*	*Non*
4,5	*2x4,5-1 = 8*	*Oui*

x = 4,5 est la solution de l'équation 2x-1 = 8"

- Pour *résoudre* une équation on utilise deux règles qui conservent l'égalité (dans le cahier on peut lire "*règles pour modifier les égalités*") :

* la règle de "transposition"

"Règle : On peut dans une égalité transposer un nombre à condition de changer son signe 5+3=8

5+3+(-3)=8+(-3) soit 5 =8+(-3)"

Cette terminologie est susceptible d'introduire des règles fausses si le terme "transposer" n'est pas explicité.

* la règle de "multiplication par un même nombre" (il n'est pas précisé non nul)

- En quoi consiste la résolution des équations ?

Pratiquement, la méthode de résolution des équations du premier degré à une inconnue (excluant le cas où a est nul), c'est-à-dire des *"équations se ramenant après transformation à l'équation ax=b soit x = b/a "* consiste à appliquer une démarche algorithmisée, c'est-à-dire, à appliquer une suite de règles pour se ramener à $x =$. La validation du résultat ne semble pas se poser en termes de valeur de vérité de l'égalité mais en termes de conformité à des règles. Un contrôle numérique est conseillé en fin de résolution. Donnons "*un exemple de résolution d'équation contenant des dénominateurs*

$x/2+x/3 = 5$

1) On réduit les 2 membres au même dénominateur

$3x/6+2x/6 = 30/6$

2) On enlève les dénominateurs et on résout l'équation composée par les numérateurs

$5x/\cancel{6} = 30/\cancel{6}$"

$x = 30/5$

$x = 6$

$S = \{6\}$"

Nous remarquons que la résolution ressemble à l'application d'une succession de gestes, "enlever le dénominateur", "résoudre une équation constituée des numérateurs", ... La résolution de toute équation du premier degré avec a $\neq 0$ semble se ramener à de telles pratiques.

• La notion de fonction est définie comme "*une transformation mathématique qui transforme des nombres x en des nombres y* (points sur le cahier). *Si y est le transformé de x par la fonction f, on écrit y = f(x)*". Cette définition repose sur une conception procédurale.

Deux objectifs essentiels sont visés par le cours :

- le calcul des valeurs de $f(x)$ pour de nombreuses valeurs de x qui met en jeu l'articulation du cadre algébrique vers le cadre numérique,

- le tracé de la représentation graphique d'une fonction en calculant des valeurs de $f(x)$ pour de nombreuses valeurs de x puis en "liant" les points de coordonnées $(x, f(x))$. Cette tâche met en jeu uniquement l'articulation du cadre algébrique vers le cadre graphique mais à un niveau purement ponctuel (cf Duval). La démarche utilisée est pragmatique et aucune justification n'est donnée concernant la question relative à la liaison des points. A aucun moment, une interprétation des graphiques de type global n'est proposée.

Cette même démarche est utilisée pour tracer les courbes représentatives des fonctions *linéaire* et *affine*.

Une fonction affine f est définie par $x \longrightarrow ax+b$, a et b réels. Le signe de a, coefficient directeur de f, détermine le sens de variation de la fonction f. Pour tracer la droite représentative de f, on calcule les coordonnées *de deux points ou plus*. Il n'est pas indiqué explicitement que deux points suffisent pour tracer une droite sauf dans le cas d'une droite passant par l'origine. De même, il n'est donné aucune interprétation globale liant les coefficients a et b aux variables visuelles significatives de la droite représentative de la fonction. La classification des fonctions n'est pas exploitée graphiquement. On retrouve cette ambiguïté dans la résolution graphique des problèmes financiers.

En revanche, il est demandé aux élèves de déterminer une fonction linéaire ou affine connaissant un tableau de valeurs. Cette capacité est exigée en contrôle écrit dans le cas des fonctions linéaires. C'est la dimension structurale des fonctions qui est ici privilégiée. Mais la détermination de l'équation réduite d'une droite connaissant un tracé de la droite dans un repère donné n'est pas un savoir exigé. L'articulation du cadre graphique vers le cadre algébrique n'est pas mise en jeu dans l'enseignement.

Ces savoir-faire sont mobilisés dans la résolution graphique des problèmes financiers. Le tracé des droites représentatives est limité au premier quadrant, les grandeurs prenant pour valeurs des nombres positifs. Même si les axes *ox* et *oy* apparaissent explicitement, les grandeurs restent référencées entre parenthèses, ce qui contribue à garder le contexte sur le devant de la scène. L'articulation du registre des équations de droite vers le registre des représentations graphiques est liée, dans ce cas, au contexte financier.

A.2.2 La dimension *outil* de l'algèbre

Nous identifions maintenant les emplois de l'algèbre mis en jeu dans les exercices d'application proposés pendant le cours de BEP. Pour ceci, nous mettons en évidence différents types de tâche, différents types de traitement et différents contextes d'utilisation. Nous organisons cette étude en fonction du contexte d'utilisation des d'exercices.

1. <u>Les exercices proposés dans le cadre algébrique</u> :

Ce sont <u>des exercices techniques non finalisés</u>. Le traitement demandé sur les expressions (développement, résolution d'équation) constitue <u>le but de l'activité et non un moyen permettant de résoudre un problème</u>.

<u>Deux types de traitement algébrique</u> sont mis en jeu dans les exercices :

- la substitution des lettres d'une expression algébrique (formule ou fonction) par des valeurs numériques, soit pour calculer les valeurs numériques d'une expression soit pour calculer les coordonnées des points de la courbe représentative d'une fonction,

- la reproduction de tâches formelles non finalisées de niveau 1 consistant soit à calculer la somme algébrique ou le produit de deux polynômes, soit à résoudre des équations du premier degré à une inconnue.

Les capacités exigibles lors des contrôles écrits portant sur ces parties du cours mettent exclusivement en jeu ces deux types de traitement.

2. <u>Des problèmes liés à un contexte concret</u> :

Ce sont <u>des problèmes de mathématisation</u>. On en rencontre très peu, trois dans le chapitre 1 (Ecritures fractionnaires) et un seul dans le chapitre 5 (Equations).

Ce sont des problèmes du premier degré dont les énoncés sont en langage naturel. Leur résolution passe par la mise en équation du problème qui est traduit par une équation numérique du premier degré à une inconnue puis par la résolution de l'équation.

Deux types de traitement sont mis en jeu par ces quelques problèmes :

- la production d'expressions algébriques et de relations algébriques,
- l'utilisation du calcul algébrique comme outil de résolution.

Donnons en deux exemples :

Exercice 1 :

"Une prime est partagée en trois personnes, la première en reçoit les 3/8, la seconde 1/3 . La troisième reçoit 672^F. Calculer le montant de la prime et la part de chacun."

Si on désigne par x le montant de la prime recherchée, pour traduire algébriquement le problème il est nécessaire de reformuler la part de la troisième personne comme le résultat de la différence entre la valeur de la prime et la somme des parts des deux autres :

$x - (3x/8 + x/3) = 672.$

Exercice 2 :

"Pour acheter une voiture un ménage devrait dépenser les 3/10 de son revenu annuel. Si ces revenus augmentent de 90000 F le prix de la voiture ne représenterait plus que les 2/9 du nouveau revenu annuel. Quel est le prix de la voiture ?"

Si on désigne par x le revenu annuel, le problème est traduit algébriquement par l'équation : $3x/10 = 2(x+9000)/9$.

La résolution des problèmes proposés nécessite d'interpréter et de reformuler les énoncés pour les traduire algébriquement. Il n'y a pas congruence sémantique entre les représentations du registre du langage naturel et celui du registre algébrique. Ces problèmes nous semblent vraiment difficiles sachant que les élèves n'en ont résolu que quatre pendant l'année scolaire. Ce sont les seuls problèmes où l'élève va avoir à sa charge la production d'expressions algébriques et de relations algébriques. On peut douter que ce soit l'élève qui produise effectivement ces expressions, s'il n'a rencontré que deux occasions dans des cas non congruents, qui plus est.

Remarquons qu'aucune méthode générale n'est proposée pour résoudre les problèmes de mathématisation. Il n'y a pas institutionnalisation de la mise en équation d'un problème. On peut se demander quel est l'impact de ce type d'activité vu son caractère exceptionnel.

De plus, seul un problème du premier degré dans un contexte de formation des prix a été posé dans un contrôle au cours des deux années de BEP tertiaire suivies par Sandrine. La production d'une expression et la traduction algébrique d'un problème ne semble donc pas considérée comme une capacité exigible dans cette classe.

3. Les problèmes liés à un contexte financier :

Ces problèmes correspondent aux chapitres *formation des prix, indice simple, intérêts simples*. Les trois types de problèmes des mathématiques financières sont présents dans le cours. Ils correspondent à des degrés de complexité 0 ou 1. Les énoncés sont assez stéréotypés et contiennent assez peu d'implicites se démarquant des problèmes professionnels. La résolution de ces problèmes nécessite la mise en œuvre des outils algébriques dont les élèves disposent.

Examinons dans le cours de Sandrine comment est organisée la phase de "modélisation" des problèmes de mathématiques financières. La démarche utilisée de façon régulière consiste à reconnaître un des trois types de problèmes, les données et inconnues associées à l'énoncé puis à "se brancher" sur la formule à utiliser pour modéliser ce problème. L'élève n'a pas à sa charge de raisonner sur des outils économiques pour retrouver la relation (Production guidée). Le type de traitement mis en jeu pour modéliser ces problèmes est le type branchement-formule.

Une fois la formule trouvée, il reste à instancier les lettres-grandeurs mises en jeu dans la formule par les données et les inconnues.

Les deux types de traitement algébrique substitution des lettres par des valeurs numériques et reproduction de tâches formelles de niveau1 sont alors mis en œuvre pour terminer la résolution. On se ramène alors soit à un calcul numérique, soit à la résolution d'une équation du premier degré.

Donnons un exemple concernant un calcul de taux :

Un capital de 7200^F placé à intérêts simples pendant 90 jours a acquis une valeur de 7398^F. Quel est était le taux du placement ?

A = C + Cnt/36000 avec C:7200, n:90, t:x

7200+7200x90xx/36000 = 7398

7200+ 18x = 7398

18x = 7398-7200

18x = 198

x =198/18

x = 11

Le taux de placement est de 11%"

La même démarche est utilisée pour rechercher la fonction linéaire ou affine qui modélise le capital acquis ou l'intérêt en fonction du nombre de jours. Certaines propriétés des fonctions linéaires ou affines sont alors mobilisées pour résoudre graphiquement le problème.

On retrouve cette même démarche pour résoudre les exercices de formation des prix.

En résumé, c'est la deuxième démarche présentée dans l'analyse a priori des mathématiques financières qui est majoritairement utilisée. Les capacités algébriques exigibles pour résoudre des problèmes contextualisés au secteur financier relèvent de trois types de traitement algébrique, le branchement sur une formule adaptée à la résolution du problème, l'instanciation des lettres, la reproduction de tâches formelles de niveau 1 (résolution d'une équation du premier degré).

A.2.3 Le rapport arithmétique/algèbre dans la résolution des problèmes

Nous allons montrer que le cours de Sandrine contient de nombreuses situations où le contexte permet aux concepts mathématiques communs à l'arithmétique et à l'algèbre de vivre en continuité avec les pratiques arithmétiques.

A.2.3.1 La démarche arithmétique

La première étape de la résolution algébrique d'un problème concret consiste, par un détour formel, à traduire algébriquement les relations du problème. Lorsque le problème concret met en jeu une situation de proportionnalité, il est possible de se ramener après des calculs intermédiaires si nécessaire,

- soit à la construction d'un tableau de proportionnalité puis à la recherche du quatrième terme d'une proportion,

- soit à une équation par l'écriture multiplicative de la relation de proportionnalité, par instanciation des données et inconnues du problèmes.

Sur les deux années, la première démarche est minoritairement utilisée. Nous rencontrons assez souvent la deuxième démarche dans des problèmes de pourcentage, de formation des prix ou d'intérêt présents dans le cahier de Sandrine : le problème n'est pas traduit algébriquement directement. Remarquons un élément qui nous semble important : *le cadre numérique est un lieu d'expérimentation du cadre algébrique dans le cas de problèmes d'un degré de complexité supérieur à 1.* Ici, une nouvelle démarche peut trouver sens. Donnons en un exemple :

Exercice :

Un commerçant achète une marchandise sur laquelle on lui accorde une remise de 5% et un escompte de 2%. Quel était le montant brut de cette marchandise pour laquelle 248,40F de réductions totales ont été consenties ?

Solution :

PAB-248,4 = PAN

PAB =

$$\frac{248{,}4 \times 100}{100} = 248{,}4.$$

Impasse (commentaire) **et recherche d'une autre démarche**

Pourcentage de réduction total :

PAB——————>PAN

100 x0,95x0,98 93,10

Réduction totale :

100-93,10 = 6,90 soit 6,90% de réduction totale

PAB x 6,9/100 = 248, 40

ou PAB x 0,069 = 248, 40

PAB = 248,40/0,069

PAB = 3600^{F}."

Une résolution algébrique aurait conduit à la solution suivante :

Soit x le prix d'achat brut.

Les réductions totales sont de 248,4^{F} après une remise de 5% et un escompte de 2%, c'est-à-dire : x -x x0,95x0,98 = 248,4 soit x(1-0,931)=248,4 soit x = 248,4/0,069. Le prix d'achat hors taxe est de 3600^{F}.

A.2.3.2. Le signe d'égalité comme signe d'annonce de résultat

De très nombreux exercices en mathématiques financières réalisés par Sandrine conduisent à des calculs pas à pas avec calcul des résultats intermédiaires. Dans ce cas, le signe d'égalité a un statut d'annonce du résultat de l'opération. Nous remarquons par ailleurs dans le cahier de Sandrine des enchaînements d'égalités incorrects ("*154 x 0,1 = 15,4+146,30 = 161,70*") compatibles avec ce sens de l'égalité.

A.2.3.3. Le statut des lettres

Une place très importante est donnée aux formules dans le cours de Sandrine. Dans les formules, les lettres désignent des grandeurs que l'on peut instancier par des valeurs numériques ou des inconnues (toujours notées x!). Elles peuvent correspondre à des abréviations qui reprennent le nom de la grandeur désignée.

A.2.3.4. La place prépondérante de la conception procédurale des expressions algébriques

La dimension procédurale joue un rôle très important dans l'interprétation des expressions algébriques mises en jeu dans le cours de Sandrine (Formation des prix, instanciation des formules, étude des fonctions, ...).

A.2.4 Le rapport à la rationalité mathématique

Les règles et les formules sont admises sans aucun élément de justification. Dans quelques cas, on exemplifie une règle ou une formule avant de la donner. Prenons l'exemple de la règle concernant l'addition d'un pourcentage à une grandeur ou bien l'application successive de pourcentages sur des quantités distinctes : il n'est aucunement prouvé comment passer d'une écriture additive à une écriture multiplicative. Les règles sont données comme de nouvelles opérations mathématiques. Or ces règles pourraient être prouvées simplement, justement en utilisant l'outil algébrique. Donnons deux exemples représentatifs du cours non exemplifiés préalablement :

"IV. Ajouter ou retrancher un pourcentage :
Règle

Pour retrancher ou ajouter t% d'une grandeur A, on calcule le coefficient $k = \dfrac{100 \pm t}{100}$

On fait l'opération A x k."

"V Appliquer plusieurs pourcentages :
Règle :
Lorsque les pourcentages portent sur la même quantité, on peut ajouter les taux. Ce sont des pourcentages additifs.

Règle des pourcentages successifs :
Lorsque les pourcentages ne portent pas sur la même quantité, on peut multiplier les coefficients multiplicateurs".

B. Analyse des types d'exercices

Pour chaque chapitre étudié, nous indiquons les types d'exercices, les types de tâche proposés dans le cours. Pour chaque type d'exercice, nous donnons un exemple prototypique et le nombre d'exercices traités. Les énoncés d'exercices sont donnés en annexe. Nous associons à chaque type d'exercice ses caractéristiques descriptives en remplissant la grille d'analyse définie au chapitre 3.

Chapitre 5 *Calcul algébrique* :
Exercices techniques, deux types de tâche, calcul numérique et formel
- type 1 : Calcul de la valeur numérique d'une expression algébrique (2ex)
- type 2 : Calcul sur des polynômes (addition, réduction, opposé, multiplication) (15 ex)

Chapitre 6 *Equations du premier degré à une inconnue* : deux types d'exercices

- type 1 : Exercices techniques avec résolution d'équation du premier degré à une inconnue (12ex)

- type 2 : Exercices de mathématisation (1ex)

Chapitre 7 *Les graphiques. Fonctions numériques*

Exercices techniques

- type 1 : Calcul des valeurs de *f(x)* (4ex)
- type 2 : Tracé de la courbe représentative de *f* (1ex)

Pour les fonctions linéaires et affines :

- type 1 : Calcul des valeurs de *f(x)* (4ex)
- type 2 : Tracé de la droite représentative de *f* (2ex)
- type 3 : Recherche algébrique de l'antécédent (1ex)
- type 4 : Détermination de *f* connaissant les images de 2 nombres (2ex)

Exercices de mathématisation

- type 5 : situation linéaire contextualisée au secteur vente (1ex)

Chapitre 9 *Intérêts*

- type 1 et degré de complexité 0 : Calcul de l'intérêt (6ex) : instanciation dans formule et calcul numérique

- type 2 et degré de complexité 1 : Calcul du capital initial (2ex), calcul du taux (2ex), calcul du temps de placement (2ex) : transformation de formule, instanciation et calcul numérique

- type 3 : Représentation graphique de l'intérêt en fonction du nombre de jours (2ex) : instanciation et tracé

Chapitre 9bis *Capital acquis*

- type 1 et degré de complexité 0 : Calcul du capital acquis (1ex) : instanciation et formule,

- type 2 et degré de complexité 1 : Calcul du capital initial (3ex), calcul du taux (2ex), calcul du temps de placement (1ex) : ces problèmes sont d'un degré de complexité 1 et se ramènent à une équation du premier degré par instanciation des lettres dans une formule,

- type 3 : Représentation graphique du capital acquis en fonction du nombre de jours (2ex) : instanciation et tracé de deux points de la droite représentative

Nous donnons la liste des valeurs des critères attachés à chaque type d'exercices :

	Ch 5 type1 2	Ch 5 type2 15	Ch 6 type1 12	Ch 6 type2 1	Ch 7 type1	Ch 7 type2	Ch 7 type3	Ch 7 type 4	Ch 9 type1	Ch9 type2	Ch 9 type3
Type de traitement algébrique											
Tâche numérique	Oui		Oui	Oui	Oui	Oui			Oui	Oui	Oui
Reproduct. niv1		Oui	Oui				Oui			Oui	
Reproduct. niv2											
Interprétation											
Branch^t formule									Oui	Oui	Oui
Production				Oui				Oui			
Preuve											
Rapport arithmétique / algèbre											
Statut du signe d'égalité	An rés	Equiv	Equiv	Equiv	An rés	An rés	Equiv		An rés	An rés Equiv	An rés Equiv
Statut des lettres	Var	Var	Inc	Inc	Var	Var	Inc	Var, Inc	Lettre grand	Lettre grand Inc	Lettre grand Inc
Objet et statut des objets	Polyn deg1à4 Fract ration. Proc	polyn deg1à4 Struct	1erdeg 1 inc ?	1erdeg 1 inc Struct	Fonct poly 2 affines lin Proc	Fonct. Fonct lin., affine Proc	Fonct lin., affine Struct	Fonct lin., affine Struct	Proc	Proc	Proc
Gestion dans registre algébrique											
Type de formation	$RF(Z, x, +,-,x,^4)$	$RF(Z, x, +,-,x,^4)$	$RF(Z, x, +,-,x)$	$RF(Z, x, +,-,x)$	$RF(Z, x, +,-,x,^2)$	$RF(Z, x, +,-,x)$	$RF(Z, x, +,-,x)$	$RF(Z, x, +,-,x)$	$RF(Z, x, +,-,x)$	$RF(Z, x, +,-,x)$	$RF(Z, x, +,-,x)$
Type de traitement	$RT_{fract,puis}$	$RT_{dévt}$	transp		$RT_{déc, fract}$						
Articulation entre registre algébrique et d'autres registres											
Registres en jeu	Al>Nu	Non	Non	lg>Alg	Ag>Nu	Ag>Gr	Non	Ct>Nu	Ct>Al Al>Nu	Ct>Al	Ct>Al Al>Gr
Type de conversion	Congr			Non congr.		Non cong.		Congr	Congr	Congr	Congr
Fonction de l'algèbre											
Emploi de l'algèbre	Subst. nbs à x calculer	Calculer fomel avec gestes	Résoudr équation avec algorith gestes	Produire relation algébriqu résoudre équation.	Subst. bs à x calculer	Subst. bs à x calculer tracer à niveau ponctuel	Résoudr eéquatio n	Résoudre pb contexte tertiaire	Résoudr pb contexte tertiaire	Résoudre pb contexte tertiaire	Résoudr pb contexte tertiaire

Tableau n°19 : Ensemble des grilles descriptives des exercices du cahier de Sandrine

C. Synthèse : le rapport institutionnel à l'algèbre dans la classe de Sandrine F.

• Dans le rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu dans la classe de Sandrine, on retrouve des régularités liées au programme de BEP. La dimension outil passe avant tout par un rapport d'utilisation de formules dans des situations contextualisées au secteur tertiaire (problèmes de complexité 0 ou 1) mettant en jeu un traitement algorithmisé correspondant à celui d'exercice modèle déjà fait. Après le branchement sur une formule adaptée à la situation, les deux types de traitement algébrique utilisés sont la substitution des lettres par des valeurs numériques ou littérales et la reproduction d'un traitement formel, ici la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue. Le rapport à l'algèbre est donc avant tout un rapport organisé autour de l'application directe de formules admises, de la substitution de grandeurs par des valeurs numériques, de la résolution d'équations.

Mais on repère cependant la présence de quelques exercices où la production de relations algébriques traduisant une situation est à la charge de l'élève. Même si ces exercices restent marginaux, ils contribuent à donner aux élèves une ouverture sur un rapport à l'algèbre organisé autour de la production d'expressions algébriques.

• C'est la dimension *procédurale* des *objets* de l'algèbre qui prévaut. Ici, le calcul algébrique mis en œuvre correspond à l'application directe des savoir-faire de base concernant exclusivement le développement d'expressions algébriques. La manipulation formelle ne nécessite qu'une technique limitée qui peut se réduire à des gestes et fait peu ou pas appel à la dimension sémantique des expressions formelles.

On note cependant la présence d'exercices dont le but est de déterminer des fonctions affines ou linéaires à partir des images de deux nombres. Ces exercices contribuent à donner aux élèves une ouverture sur la dimension *structurale* des fonctions, même si ce point de vue n'est pas exploité graphiquement comme nous le voyons ci-dessous.

Trois articulations de registres sont en jeu dans les exercices : du registre algébrique vers le registre numérique, du registre algébrique vers le registre graphique à un niveau purement ponctuel et marginalement du registre du langage naturel vers le registre algébrique mais dans des cas de non congruence sémantique. Mais les élèves ont été confrontés à des situations de reformulation qui montrent une des fonctions essentielle de l'algèbre, celle de formulation.

• Les fonctions linéaires et affines sont mobilisées comme des outils pour résoudre graphiquement des problèmes du secteur tertiaire. L'algèbre ne trouve pas un nouvel emploi dans l'étude des fonctions.

• Comme nous l'avons vu dans l'analyse des programmes, le traitement de situations contextualisées du secteur tertiaire y occupe une place importante et n'impose pas une rupture aux pratiques arithmétiques. Le cadre numérique peut, dans le cas de problèmes d'un degré de complexité supérieur à 1, rester un point d'appui pour garder du sens à l'activité mathématique dans le cadre algébrique.

III.2.2. Cahier de Denis (1ère et 2ième année de B.E.P. 1989/1990-1990/1991 dans la section A.C.C.)

A. Aspects généraux

A.1 Présentation du plan et des contenus mathématiques

• Le cahier de Denis contient l'ensemble des cours de mathématiques du programme de BEP section A.C.C. sur deux ans. Les définitions, règles de calcul, formules sont bien mises en évidence, les exercices d'application sont rédigés soigneusement. Le nombre de chapitres traités est grand par rapport à celui des autres cahiers étudiés. Il en est de même pour les exercices qui jouent un rôle de modèle. La résolution des exercices semble relever de la responsabilité du professeur.

Denis nous a aussi donné l'ensemble des devoirs de contrôle passés au cours des deux années de BEP. Ces devoirs permettent de déterminer quelles sont les capacités effectivement exigibles en algèbre élémentaire. En revanche, Denis a gardé l'ensemble des exercices résolus à la maison. Cette zone d'ombre est levée grâce à la présence des contrôles écrits.

Le cours de Denis suit assez fidèlement les manuels de Mathématiques, BEP1 et BEP2 commerciaux de l'édition Foucher 1986. Quelques chapitres de ces manuels ne figurent pas dans le cours de Denis :

Première année : Géométrie, inéquations du premier degré, résolution de problèmes à l'aide d'une équation ou d'un système de deux équations.

Deuxième année: Résolution algébrique et graphique de problèmes, les intérêts composés, les fonctions $x \longrightarrow x^2$, $x \longrightarrow ax^2$, $x \longrightarrow a/x$ (grandeurs inversement proportionnelles), l'équation du second degré.

Voici l'ensemble des chapitres étudiés sur les deux années :

Première année de BEP section ACC	Deuxième année de BEP section VAM
Calcul dans R Inégalité et ordre de grandeur Calcul algébrique Equations du premier degré à une inconnue Notion de fonction Grandeurs proportionnelles Fonction linéaire Pourcentages Les séries statistiques Représentation graphique des séries statistiques Formation des prix	Les prix révision Le change des monnaies Les équations du premier degré. Rappels, systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues Les partages Les intérêts simples La valeur acquise (rappel fonction affine) L'escompte bancaire Agio - taux réel de l'escompte Equivalence d'effets Les paramètres de position Les indices Les suites

Tableau n°20 : Liste des chapitres du cahier de Denis

Analysons de plus près les objets d'enseignement et leur emploi.

A.2 L'étude des rapports aux objets d'enseignement de l'algèbre élémentaire

Remarquons que les titres de chapitre englobent un domaine mathématique et pas seulement un objet d'enseignement comme dans le cahier précédent. Par exemple, le chapitre *Calcul dans R* traite globalement des ensembles de nombres, des opérations sur les nombres et de leurs propriétés.

Comme dans le cahier précédent, la dimension *objet* des notions mathématiques est privilégié dans le cours, les activités préparatoires étant absentes pour introduire les nouvelles notions. En revanche, on remarque la présence d'exemples introductifs pour amener la définition de certains objets mathématiques (équations du premier degré, expressions algébriques, ...). Leur emploi est développé dans les exercices d'application.

A.2.1 La dimension *objet* de l'algèbre

Parmi les objets d'enseignement en relation avec l'algèbre présents dans le cahier de Didier, on trouve les expressions algébriques, les équations du premier degré à une inconnue, les fonctions linéaires et affines, les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.

• Le calcul algébrique met en jeu monômes et polynômes de degré supérieur à 1. Les expressions fractionnaires et irrationnelles ne font pas partie des expressions étudiées.

Dans le chapitre *Calcul algébrique*, on définit soigneusement les polynômes et certains de leurs traits sémiques (degré d'un polynôme, coefficient d'un monôme, ...). Les opérations sur les polynômes s'appuient sur les règles de calcul sur les puissances.

- Quelle signification l'enseignant donne-t-il aux expressions algébriques ?

Comme dans le cours de Sandrine, les expressions algébriques sont introduites en liaison avec les formules. De même, cette présentation contribue à donner aux lettres un statut de lettre grandeur, lettres que l'on peut instancier par des valeurs numériques.

On attribue une valeur numérique à toute expression algébrique en calculant sa valeur pour des valeurs de la ou des variables constitutives de l'expression.

- En quoi consiste la manipulation formelle des expressions algébriques ?

Manipuler formellement des polynômes c'est opérer sur les polynômes mais c'est aussi les transformer et en particulier les factoriser.

Après un exemple introductif, on institutionnalise des règles précises pour opérer sur les polynômes. Par exemple : "*<u>Multiplication d'un polynôme par un polynôme</u>*

$P(x)=2x+5 \quad Q(x)=-4x+3$

$P(x)xQ(x) = (2x+5)x(-4x+3) = -2xx4x + 2xx3 - 5x4xx + 5x3$

$= -8x^2 + 6x - 20x + 15$

$= -8x^2 - 14x + 15$

Pour multiplier un polynôme par un autre polynôme, on multiplie chaque terme du 1^{er} polynôme par chaque terme du 2^{ième} polynôme et on ajoute les monômes obtenus."

Des savoir-faire pratiques sont donnés, par exemple, la "*disposition pratique*" pour additionner ou soustraire deux polynômes.

On explicite comment

- reconnaître et appliquer des identités remarquables afin de développer des polynômes,
- factoriser des polynômes ("*faire apparaître un facteur commun dans chaque terme du polynôme, grouper convenablement les termes, utiliser une identité remarquable*").

Certaines expressions sont réécrites en détaillant les règles de formation utilisées qui peuvent mettre en jeu certains implicites : $(2x+1) = (2x+1)x1$, le rôle des parenthèses.

Les exercices de factorisation proposés sont assez difficiles. Ils peuvent mettre en jeu l'application successive de plusieurs transformations, par exemple, pour factoriser le polynôme $P(x)=2x^3+x^2+2x+1$. Ces exercices font appel aux dimensions syntaxique et sémantique mises en jeu dans la manipulation formelle à un niveau simple.

L'ensemble des savoirs et savoir-faire est évalué dans deux contrôles consécutifs (cf annexe ?).

• A partir d'un exemple introductif, le professeur définit à l'aide d'une recherche par essai-erreur ce que signifie résoudre une équation du premier degré à une inconnue et être solution d'une équation.

"*Deux entreprises de dépannage fixent leur prix.*

L'entreprise A : 250^F de déplacement et 85^F l'heure de travail.

L'entreprise B : 200^F de déplacement et 90^F l'heure de travail.

x le nombre d'heures de travail

$A= 250+85x$

$B=200+90x$

$A(8)=250+85x8=930$	$B(8)=200+90x8=920$
$A(9)=250+85x9=1015$	$B(9)=200+90x9=1010$
$A(10)=250+85x10=1100$	$B(10)=200+90x10=1100$
$A(11)=250+85x11=1185$	$B(811=200+90x11=1190$

Le prix payé est le même pour x=10.

Chercher l'ensemble des réels pour lesquels 250+85x=200+90x s'appelle résoudre dans R l'équation 250+85x=200+90x.

x est l'inconnue.

x=10 est la solution de l'équation."

- Qu'est ce que résoudre une équation ?

Dans un paragraphe intitulé *Equations équivalentes*, on énonce les opérations qui conservent l'égalité puis on transforme ces propriétés en des savoir-faire pour résoudre les équations du premier degré à une inconnue.

"*Application*

Résoudre dans R, x+8=3

x+8-8=3-8 (ajouter l'opposé de +8 aux deux membres)

x=3-8

x=-5 —> S={-5}

On a transposé 8 du premier membre dans le second en le changeant de signe

Dans une équation on peut transposer un terme d'un membre dans l'autre à condition de changer le signe qui le précède"

On donne les solutions d'une équation du type $ax+b=0$ avec a et b réels dans le cas général en envisageant tous les cas. Des méthodes de résolution sont ensuite proposées dans le cadre d'exercices d'application, chaque exercice jouant le rôle de modèle. Ce sont alors les savoir-faire qui sont mis en œuvre.

"*Exemple 2 :*

Résoudre dans R l'équation

$$\frac{5x+1}{3} - \frac{x}{2} = \frac{7}{6} - \frac{x-1}{2}$$

Réduction au même dénominateur

$$\frac{2x(5x+1)}{2x3} - \frac{3xx}{3x2} = \frac{7}{6} - \frac{3x(x-1)}{2x3}$$

Suppression des dénominateurs

$2(5x+1) - 3x = 7 - 3(x-1)$

Réduction de chaque membre

$10x+2-3x = 7-3x+3$

$7x+2 = -3x + 10$

Transposition

$7x + 3x = 10 - 2$

$10x = 8$

$x = 8/10$ $\quad\quad$ $S=\{4/5 \text{ ou } 0{,}8\}$"

On remarque que dans le cours, il y avait mention des opérations utilisées pour obtenir une égalité équivalente. Les opérations disparaissent ici au profit de leur fonction dans la résolution, ce qui produit un glissement possible vers des gestes oubliant leurs raisons, par exemple ici, la *suppression des dénominateurs*.

Pour terminer, on propose la résolution d'équations du type $f(x)g(x)=0$, $f(x)$ et $g(x)$ étant des polynômes du premier degré.

Tous ces savoir-faire sont exigés lors des contrôles. Il est demandé la résolution d'équations du deuxième degré à une inconnue se ramenant à la résolution d'équations du premier degré à une inconnue. Leur résolution met en jeu à un certain niveau le sens des expressions et l'application des savoir-faire algébriques étudiés au cours précédent : factorisation avec les identités remarquables, réduction d'expressions, regroupement de termes dans une expression... Le calcul algébrique est utilisé comme outil pour résoudre des équations. Voici quelques exercices donnés en contrôle :

"*Résoudre dans R*

$(5x+3)(3-2x) - 7(2x-3) = 5x(1-2x)$

$4x^2 - 25 = 0$"

• La notion de fonction est introduite à partir d'un seul exemple, l'exemple de la *Consommation d'un véhicule* p 49 du livre de mathématiques BEP [1] commerciaux Ed Foucher 1986. Deux modes de représentation, tableau de valeurs et représentation graphique sont utilisés pour l'illustrer. Précisons que le manuel propose deux autres exemples avant d'introduire la définition d'une fonction, le troisième exemple donnant une formule pour exprimer la relation entre deux grandeurs.

"On appelle fonction de l'ensemble grand E vers un ensemble grand F toute correspondance qui à chaque élément de grand E associe un élément unique de grand F."[12] La terminologie fonctionnelle est ensuite définie. Aucun nouvel exemple ou exercice ne vient illustrer ces définitions. Le cours se poursuit par trois définitions, celles d'une fonction croissante, décroissante et constante et un exercice d'application incomplet (détermination du sens de variation de $f : x \longrightarrow 3x - 4$ à partir d'exemples.

Le point de vue graphique n'est pas présent. Le cours ne donne pas d'éléments sur la représentation graphique des fonctions.

Le cours est rapide et aucune connaissance n'est exigé en contrôle.

• Le chapitre sur les fonctions linéaires reprend le chapitre du manuel BEP[1] Ed Foucher 1986 :

- les fonctions linéaires sont introduites à partir d'un exemple (cf p65 manuel BEP[1] Ed Foucher 1986) puis la définition est donnée,
- le lien entre proportionnalité et fonction linéaire est indiqué,
- les deux fonctions linéaires données en exemple $f1 : x \longrightarrow 2x$, $f2 : x \longrightarrow x/3$ sont croissantes
- des propriétés des fonctions linéaires $f : x \longrightarrow ax$, avec a réel non nul (sens de variation, suite de rapports égaux) sont institutionnalisées sans justification[13],
- des exemples d'application viennent terminer le chapitre.

Au niveau graphique, on passe d'un niveau purement ponctuel (cf Duval) à une interprétation globale du tracé. La droite représentative d'une fonction linéaire est caractérisée par deux points (l'origine et un point (x,ax). De plus, on fait le lien entre le coefficient directeur a et la pente de la droite représentative. Nous retrouvons ce niveau d'exigence dans les devoirs de contrôle. Il ne semble pas que le problème réciproque soit abordé : passage du cadre graphique au cadre algébrique.

• On ne pas trouve trace de cours sur les fonctions affines, ni aucun exercice portant sur cette notion dans les devoirs de contrôle[14]. En revanche, un rappel sur les fonctions affines apparaît dans le cours sur la *valeur acquise*. Une fiche d'identité de la famille des fonctions affines résume les propriétés de ces fonctions :

"y=ax+b, a : coefficient, b : constante

a>0 f(x) strictement croissante sur R

a<0 f(x) strictement décroissante sur R

[12]C'est la définition présente dans le cahier de Denis. On y voit effectivement écrit "ensemble F" !

[13]Les justifications sont données dans le livre

[14]On peut remarquer que le chapitre *Fonction affine* se trouve après les chapitres sur les statistiques dans le manuel de BEP[1] Ed Foucher. Il s'est certainement posé un problème de temps.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite

Exemple : f(x)=-0,5x+2

C'est une fonction affine de coefficient -0,5, elle est décroissante.

Elle est représentée par une droite passant par deux points A et B"

Viennent ensuite le calcul des coordonnées de deux points *A(0,2)* et *B(-2,3)* et le tracé dans un repère orthonormé.

Ces savoir-faire sont mobilisés dans la résolution graphique des problèmes de mathématiques financières. Le tracé des droites représentatives est limité au premier quadrant, les grandeurs prenant pour valeurs des nombres positifs. Même si les axes *ox* et *oy* apparaissent explicitement, les grandeurs sont parfois référencées (par exemple, x nombre de jours, $y = vA$), ce qui contribue à lier l'articulation entre le registre des équations de droite et celui des représentations graphiques au contexte financier (par exemple, recherche du nombre de jours à courir (antécédent) connaissant la valeur acquise). C'est l'approche ponctuelle qui est retenue pour tracer une droite, mais à partir de deux points seulement.

L'algèbre n'est pas mise en jeu dans l'étude des fonctions. En revanche, certaines propriétés des fonctions linéaires et affines sont mobilisées pour étudier des situations contextualisées au secteur tertiaire.

• Les systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues ont été étudiés en deuxième année. Seul le niveau technique concernant la résolution des systèmes est abordé dans le cours (cf p155 manuel BEP[1] Ed Foucher 1986). Deux méthodes de résolution sont proposées, la méthode par substitution et celle par combinaisons linéaires (appelée par abus de langage méthode par addition). C'est le point de vue technique qui est retenu. Il n'est pas proposé d'interprétation graphique.

On remarque des erreurs de recopie dans le cours : Denis ne fait pas la différence entre couple solution {(6,2)}et l'ensemble {2;6}.

Ces savoir-faire sont exigés dans deux devoirs de contrôle dont un devoir de synthèse. Dans le contrôle du 13 Novembre 1989, le problème n°2 comporte la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues à résoudre assez difficile par la présence des coefficients numériques fractionnaires et le problème n°3 contient deux exercices qui conduisent à des systèmes d'équations linéaires à deux inconnues.

Problème n°2 : "*Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(x+y) - 1 = x \\ \frac{1}{3}(x-y) + \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$$

Problème n°3 :

a) Deux nombres x et y ont pour somme 30 et pour différence 6. Calculer ces deux nombres.

b) Trouver deux nombres x et y connaissant leur somme 40 et leur rapport 3.

Dans ce cas, l'algèbre est mise en jeu et utilisée comme outil pour traduire algébriquement un problème. On peut penser que des exercices analogues ont été traités dans le cadre du travail à la maison.

Le devoir de synthèse du 23 Janvier 1990 commence par le problème suivant :

" *Déterminer le réel a pour que l'équation 3x-5y=a admette pour solution (-2;-1)*

Déterminer le réel b pour que l'équation 2x-y=b admette pour solution (+1;-2)

Déterminer, lorsque a et b prennent les valeurs trouvées ci-dessus , la solution du système formé par lcs deux équations."

C'est un exercice difficile parce qu'il met en jeu de nombreuses notions mathématiques, en particulier les notions de paramètre et d'inconnue, mais surtout parce qu'il ne permet pas de se contenter de brancher des algorithmes de résolution.

A.2.2 La dimension *outil* de l'algèbre

Cette première vision du cours de Denis laisse présager un assez grand nombre de types de tâches et d'emploi de l'algèbre dans la résolution de problèmes. Identifions les différents aspects *outil* de l'algèbre mis en jeu dans le cours de Denis selon les types de tâche et les contextes d'utilisation.

1. <u>Les exercices dans le cadre algébrique</u>

Les exercices techniques proposés dans les cours sont, soit des exercices d'application directe de savoir-faire algébrique de base (développement, factorisation, résolution d'équations du premier degré à une inconnue ou de systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues), soit des exercices finalisés dans lesquels la manipulation formelle est un outil de résolution (résolution d'équations de degré > 1).

<u>Trois types de traitement algébrique</u> sont mis en jeu dans les exercices :

- la substitution des lettres d'une expression algébrique (formule ou fonction) par des valeurs numériques, soit pour calculer les valeurs numériques d'une expression soit pour calculer les coordonnées des points de la courbe représentative d'une fonction,

- la reproduction de tâches formelles de niveau 1 et de niveau 2 pour transformer des expressions ou pour résoudre des équations ou systèmes d'équations.

Les capacités exigibles lors des contrôles écrits mettent en jeu ces trois types de traitement. Rappelons pour mémoire la difficulté du problème n°1 du contrôle du 23 Janvier 1990 présenté à la fin du paragraphe précédent.

2. Des problèmes de mathématisation dans un contexte concret :

Le cahier de cours n'en contient aucun. Mais nous trouvons trace de deux problèmes de mathématisation lors d'un contrôle (13 Novembre 1990). Ce niveau d'exigence laisse penser que des exercices de même type ont été traités dans le cadre du travail à la maison. Il ne semble pas, qu'il y ait eu institutionnalisation d'une méthode générale pour mettre en équation un problème.

Les deux problèmes sont du premier degré et leurs énoncés sont en langage naturel. Leur résolution passe par la mise en équation d'une situation qui est traduite par un système de deux équations du premier degré à deux inconnues puis par sa résolution. Deux types de traitement sont mis en jeu par ces problèmes :

- la production d'expressions algébriques et de relations algébriques,
- l'utilisation du calcul algébrique comme outil de résolution.

3) Les problèmes liés à un contexte financier :

3.1 Les trois types des problèmes de mathématiques financières sont traités. De nombreux exercices, mettant en jeu les degrés de complexité de 0 à 2, tiennent lieu de modèle. Les exercices-modèles explicitent des schéma-types de résolution.

C'est la deuxième démarche présentée dans l'analyse a priori des démarches de résolution des problèmes des mathématiques financières, (reconnaissance d'une situation connue, des données et inconnues associées puis "branchement" sur la formule à utiliser pour modéliser ce problème) qui est mise en jeu ici dans leur résolution. La mise en équation n'est pas à la charge de l'élève.

Dans les problèmes d'équivalence d'effets ou de paiement à crédit (degré de complexité 2), les formules sont réappliquées plusieurs fois pour mettre en œuvre l'outil économique du "principe d'équivalence". Ces situations conduisent donc à des équations du premier degré assez complexes qu'il faut réduire, mais les difficultés mathématiques sont limitées par la donnée dans le cours de schéma-type de résolution.

Toutes ces capacités sont exigées en devoir de contrôle. Donnons un exemple : Problème n°2 du devoir de synthèse du 10 Avril 1990.

"*Pour vendre un micro-ordinateur dont le prix marqué est 3396^F, le commerçant propose à ses clients 2 modes de paiement à crédit, 25% au comptant et le reste soit :*

a) en 9 mensualités, la première échéant un mois après l'achat. Taux d'escompte de18%.

b) en 3 mensualités de 1020^F chacune, la première échéant un mois après l'achat.

On demande :

- le montant de chaque mensualité dans le cas a)

- le taux d'escompte pratiqué dans le cas b)"

Voici la résolution de Denis qui reprend pas à pas le schéma de résolution donné dans l'exercice servant de modèle :

"*3396 x 0,25 = 849*

3396 - 849 = 2547

$$a)\ 2547 = x - \frac{x x\ 0{,}18 x\ 1}{12} + x - \frac{x x\ 0{,}18 x\ 2}{12} + x - \frac{x x\ 0{,}18 x\ 3}{12} + \ldots + x - \frac{x x\ 0{,}18 x 9}{12}$$ [15]

$$2547 = 9x - \frac{0{,}18x}{12} x\ (1+2+3+4+5+6+7+8+9)$$

$$2547 = 9x - \frac{0{,}18x}{12} x\ 45$$

2547 = 9x - 0,015 x 45

2547 = 9x - 0,675x

2547 = 8,325x

x = 2547/8,325

x = 305,95."

En résumé, trois types de traitement sont mis en jeu dans la résolution de tels problèmes :

- branchement vers la formule adaptée (application multiple si-nécessaire),
- substitution des lettres par des valeurs numériques,
- reproduction de tâche formelle (ici, résolution d'équation du premier degré).

3.2 Dans ces problèmes financiers, nous trouvons parfois des problèmes de degré de complexité 3. En voici deux exemples :

Exercice 28 p 29 manuel de mathématiques BEP[2] edition Foucher 1992.

15 $x - \frac{x x\ 0{,}18 x\ n}{12}$ correspond à la valeur actuelle de l'effet de remplacement au bout de *n* mois.

"Un capital de 10000^F a été divisé en deux parts. La première placée à 8% et la deuxième placée à 9%. L'intérêt produit par la première part en 90 jours est le double de l'intérêt produit par le deuxième en 60 jours.

1. Calculez les deux parts et les deux intérêts"

Problème 3 du devoir de synthèse (10 Avril 1990)

"5. Déterminer l'ensemble des valeurs de x (x nombre de jours à courir) pour lesquelles l'agio de la banque A est supérieur à celui de la banque B"

Ces deux questions nécessitent la traduction algébrique de la relation en jeu dans la situation. L'élève a à sa charge la production d'expressions et de relations algébriques, même simples, après avoir reconnu et utilisé les formules adaptées pour le calcul d'intérêt ou d'agio. Dans le premier cas, la traduction algébrique conduit à la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues dont la résolution demande un traitement algébrique non évident.

En résumé, le cahier de Denis met en évidence une assez grande diversité de problèmes contextualisés au secteur financier (problèmes de degré de complexité 0, 1 2 ou 3). Les capacités algébriques exigées pour les résoudre dépendent du degré de complexité et peuvent conjuguer les deux types de traitement algébrique, branchement sur une formule et production guidée d'expressions pour se ramener à la résolution d'une équation du premier degré.

A.2.3 Le rapport arithmétique/algèbre dans la résolution des problèmes

A.2.3.1 La démarche arithmétique

Il est fréquemment utilisé une démarche arithmétique pour résoudre les problèmes relevant des pourcentages, de la formation des prix, des monnaies. Dans le cours de Denis, la démarche utilisée recouvre l'analyse a priori réalisée dans le paragraphe I.1.2.2 mais avec une formulation de la proportionnalité un peu différente de la formulation habituelle. Donnons en un exemple.

Enoncé :

Un commerçant applique un taux de marque de 45%. Le coût d'achat d'un article s'élevant à 320^F. Quelle est la marge brute et le PVHT de cet article.

Solution :

45%	*TM*	$PVHT = CA + MB$
320^F	*CA*	$x \quad = 320 + y$
? MB		$100 \quad = 55 + 45$

$PVHT = 320 + 261{,}82 = 591{,}82$[16]

$PVHT = 581{,}82$

$$\frac{y}{45} = \frac{320}{55} \longrightarrow y = \frac{320 \times 45}{55} = 261{,}82$$

$MB = 261{,}82^{F}$"

Remarquons qu'il y a une "tentative" de mise en équation du problème. Mais cette tentative se limite au cas particulier de 100 afin d'exprimer une situation de proportionnalité et de se ramener à la recherche de la quatrième proportionnelle et à une démarche pas à pas gardant du sens à chaque étape intermédiaire. La définition du taux de marque n'est pas exploitée pour traduire algébriquement ce problème comme suit :

Soit x le prix de vente hors taxe. On sait que le taux de marque est le pourcentage de la marge brute par rapport au prix de vente Hors taxe, d'où marge brute = $0{,}45\,x$.

Comme le prix de vente hors taxe est égal au coût d'achat augmenté de la marge brute, x vérifie donc l'égalité : $x = 320 + 0{,}45x$.

A.2.3.2 Le statut des lettres

Dans les formules, les lettres expriment des grandeurs. Ces grandeurs peuvent être désignées par des abréviations (*PHT*, *CA*, ...) qui ne sont pas utilisées dans des transformations de formules. Dans le chapitre *Formation des prix,* une inconnue est toujours désignée par x ou y.

A.2.3.3 Le signe d'égalité comme signe d'annonce de résultat

La résolution des exercices mettant en jeu une situation de proportionnalité privilégie souvent une démarche pas à pas avec calcul des résultats intermédiaires. Dans ce cas, le signe d'égalité conserve un statut d'annonce de résultat.

A.2.4 La rationalité mathématique

Quelques propriétés, en nombre peu important, sont démontrées dans le cours de Denis, par exemple, la propriété fondamentale des proportions, l'additivité de la fonction linéaire. En majorité, ce sont des exemples qui tiennent lieu de justification. Comme dans le cours de Sandrine, c'est le cas pour la règle concernant l'addition d'un pourcentage à une grandeur ou bien l'application successive de pourcentages sur des quantités distinctes.

---

[16]Nous reproduisons la solution présente dans le cahier de Denis.

B. Analyse des types d'exercices

Voici un panorama de l'ensemble des exercices rencontrés dans les chapitres étudiés du cahier de cours de Denis :

Première année :

Chapitre 3 : *Calcul algébrique*
Ce chapitre contient des exercices techniques mettant en jeu deux types de tâche, des tâches d'ordre numérique et formel. Les exercices peuvent être plus ou moins finalisés.
- Calcul de valeurs numériques d'une expression algébrique pour des valeurs données (devoir de contrôle)
- Développement de polynômes (somme algébrique, multiplication, identités remarquables),
- Transformation de polynômes (factorisation),

Chapitre 4 : *Equations du premier degré à une inconnue*
- Exercices techniques d'application directe (niveau 1) (cf devoir de contrôle du 7 Décembre 1988)
- Exercices techniques qui mettent en jeu un niveau 2 de manipulation formelle, c'est-à-dire, la mobilisation et l'utilisation de savoir-faire formels (factorisation ou développement) pour résoudre des équations (cf devoir de contrôle du 7 Décembre 1988)

Chapitre 7 : *Fonctions linéaires*
- Calcul des valeurs de $f(x)$
- Tracé de la droite représentative de f dans un repère donné

Deuxième année :

Chapitre 14 : *Les équations du premier degré et les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues*
- Exercices techniques d'application directe (niveau 1)
- Exercices techniques mettant en jeu des traitements formels intermédiaires et d'autres notions mathématiques (niveau 2) (cf contrôle 23 Janvier 1990)
- Exercices de mathématisation conduisant à des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues (cf devoir de contrôle du 9 Janvier 1990)

Chapitre 16 : *Les intérêts simples*
Exercices d'application directe dans secteur tertiaire :
- Calcul d'un intérêt, connaissant le capital placé, le taux et la durée du placement (5) (degré de complexité 0),
- Représentation graphique de l'intérêt en fonction du nombre de jours (2 et devoir de contrôle) : instanciation, tracé, détermination graphique d'un antécédent
- Calcul du temps de placement (1), calcul du capital initial (1), calcul du taux (1) (degré de complexité 1).

Exercices de mathématisation dans contexte financier (degré de complexité 3) :
- situation du secteur tertiaire se ramenant à un système de deux équations linéaires à deux inconnues (cf ex 28 p 28 BEP[2] édition Foucher 1992)

Chapitre 17 : *La valeur acquise*
- Calcul du capital acquis (1) (degré de complexité 0),
- Calcul d'un taux moyen de placement (degré de complexité 1),
- Représentation graphique du capital acquis en fonction du nombre de jours (2 et devoir de contrôle) : instanciation, tracé de deux points de la droite représentative, lecture graphique d'image et d'antécédent.
Le calcul du capital initial, du taux, du temps de placement n'apparaissent pas en exercices jouant le rôle de modèle dans le cahier de cours.
- Mise en équation d'une situation dans le contexte financier (degré de complexité 2).

Chapitre 18 : *L'escompte*

- Calcul d'un escompte, de la valeur actuelle (degré de complexité 0),
- Calcul de la valeur nominale (degré de complexité 1),
- Représentation graphique de la valeur actuelle en fonction du nombre de jours (devoir de contrôle) : instanciation, tracé de deux points de la droite représentative, lecture graphique d'antécédent.

Chapitre 19 et 20 : *Agio - Equivalence d'effets*
- Calcul d'un agio (degré de complexité 0),
- Calcul du taux réel de l'escompte (degré de complexité 2),
- Représentation graphique de l'agio en fonction du nombre de jours à courir (devoir de contrôle) : instanciation, tracé de deux points de la droite représentative, lecture graphique d'antécédent.
- Mise en équation d'une situation dans le contexte financier (degré de complexité 3),

C Synthèse : le rapport institutionnel à l'algèbre dans la classe de Denis

Le rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu dans la classe de Denis s'appuie sur différentes formes de l'activité algébrique, tout en privilégiant certaines liées au programme de BEP.

• La dimension *outil* passe surtout par un rapport d'utilisation de formules dans des situations contextualisées au secteur tertiaire permettant de reproduire par analogie des exercices modèles. Ce rapport est organisé autour de l'application directe de formules admises, de la substitution de grandeurs par des valeurs numériques, de la résolution d'équations.

Mais le niveau de traitement mis en jeu est plus ou moins *algorithmisé* selon les problèmes. On trouve quelques exercices de degré de complexité 2 ou 3 dont la mise en équation nécessite aussi la traduction algébrique de relations mettant en jeu des formules financières. Plus ponctuellement, le rapport institutionnel à l'algèbre fait intervenir la production de relations algébriques hors contexte tertiaire. Ces capacités sont exigées en contrôle écrit.

• Concernant la dimension *objet* de l'algèbre, le rapport à la manipulation formelle met en jeu des expressions algébriques de degré de complexité divers dans diverses tâches formelles (développement, factorisation, résolution d'équations ou de systèmes d'équations linéaires à deux inconnues). Il y a eu un travail de la technique qui peut mener les élèves à un niveau de technicité correct. En particulier, la factorisation peut faire appel à la dimension sémantique des expressions formelles.

A côté des exercices techniques qui développent une conception procédurale des objets de l'algèbre, on relève la présence de quelques exercices difficiles qui peuvent contribuer à donner aux élèves une ouverture sur une conception *structurale* des équations, par exemple.

Trois articulations de registres sont en jeu dans les exercices : du registre algébrique vers le registre numérique, du registre algébrique vers le registre graphique avec deux démarches de traitement (pointage et interprétation globale) et marginalement du registre du langage naturel vers le registre algébrique, essentiellement dans des cas de congruence sémantique.

• L'algèbre n'est pas mise en jeu dans l'étude des fonctions. Les fonctions linéaires et affines restent au rang d'outil pour étudier graphiquement des situations contextualisées au secteur tertiaire. Le rôle des représentations graphiques y est beaucoup développé, les lettres gardant le plus souvent le statut de variable-grandeur.

• Comme nous l'avons vu dans l'analyse des programmes, le traitement de situations contextualisées du secteur tertiaire occupe une place importante et n'impose pas une rupture aux pratiques arithmétiques.

III.2.3. Cahier de Caroline ($1^{ère}$ et $2^{ième}$ année de B.E.P. 1990/1991-1991/1992 dans la section V.A.M.)

A. Aspects généraux

A.1 Présentation du plan et des contenus mathématiques

• Le cahier de Caroline, très bien présenté, contient l'ensemble des cours de mathématiques du programme de BEP section V.A.M qui ont été donnés pendant deux ans. Les définitions, règles de calcul, formules sont bien mises en évidence, écrites en rouge ou encadrées. C'est le cahier d'une élève soigneuse. Le cahier contient le cours et des exercices qui relèvent, semble-t-il, de la responsabilité du professeur.

Voici l'ensemble des chapitres étudiés sur les deux années :

Première année de BEP section VAM	Deuxième année de BEP section VAM
Sommes algébriques Produit de facteurs : factorisation Opérations sur les fractions Notion de proportion Pourcentages Formation des prix Fonction linéaire Partages proportionnels Equations du premier degré à une inconnue La fonction affine	Les intérêts simples Valeur acquise Escompte bancaire Paiement à crédit Statistiques Indice

Tableau n°2 : Liste des chapitres du cahier de Caroline

Les notions mathématiques algébriques ont été étudiées en première année. L'essentiel des mathématiques financières est traité la deuxième année. Le cours ne recouvre pas tout le programme. De nombreuses notions mathématiques n'ont pas été abordées comme les systèmes de deux équations linéaires, les fonctions du second degré, les fonctions homographiques, les équations du second degré. La résolution de problèmes du premier degré ne concerne que le contexte financier.

A.2 L'étude des rapports aux objets d'enseignement de l'algèbre élémentaire

Dans les chapitres du cours de Caroline, on définit d'abord les objets mathématiques puis les propriétés et savoir-faire relatifs. Pour certaines notions mathématiques, la présence de situations d'approche permet d'introduire leur définition. Les exercices d'application proposent des exercices jouant souvent le rôle de modèle.

A.2.1 La dimension *objet* de l'algèbre

• Les expressions algébriques

Quand on parcourt le cours de Caroline on est frappé par le point suivant : les expressions algébriques manipulées sont exclusivement des expressions du premier degré à une variable ou à plusieurs variables pour les formules financières. Les polynômes de degré supérieur à 1, les fractions rationnelles sont les grands absents de cet enseignement. Il en est de même pour les fonctions et les équations.

- Qu'entend-on par expressions algébriques ?

Donnons quelques définitions :

"Une somme algébrique est une suite de nombres relatifs séparés par des signes (+) et (-)".

"Calcul d'une somme algébrique —> On enlève les parenthèses

Si la parenthèse est précédée du signe +, je recopie l'intérieur de la parenthèse

Si la parenthèse est précédée du signe -, je change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse"

Le cours de Caroline privilégie le côté écriture et règles de réécriture des expressions algébriques.

Les "*exemples donnés*" consistent à calculer les sommes algébriques avec des lettres comme on le faisait avec les nombres, à développer un produit de deux facteurs du premier degré, à factoriser un facteur commun apparent qui est soit un nombre, soit une variable, dans un polynôme homogène du premier degré à deux variables. C'est la dimension syntaxique de la manipulation formelle qui est privilégié sur des expressions peu complexes. Le traitement formel peut se réduire à un mécanisme qui n'a besoin de faire pas appel ni au sens des expressions, ni à leur dénotation.

Insistons encore sur l'aspect "écriture" des expressions : <u>le calcul de la quatrième proportionnelle est décomposé en quatre sous tâches distinctes selon la position de l'inconnue dans le rapport.</u>

"Calcul d'un terme inconnu d'une proportion

$x/b = c/d$ —> $x = bxc / d$; $a/x = c/d$ —> $x = axd / c$; $a/b = x/d$ —> $x = axd / b$;

$a/b = c/x$ —> $x = bxc / a$ "

- Quelle signification est donnée aux expressions ?

Que répondre ? Les expressions prennent une signification à travers les transformations qui leur sont appliquées, voire à travers le calcul de leur valeur numérique. L'articulation du cadre algébrique vers le cadre numérique est faiblement présente. Le calcul des valeurs numériques d'une expression n'est vraiment mis en jeu que pour tracer la droite représentative d'une fonction linéaire ou affine ou pour résoudre les problèmes financiers.

• Les fonctions linéaires sont introduites par une situation concrète, le calcul du prix net d'une marchandise en fonction du prix brut après réalisation d'une remise. La notion de proportionnalité est mise en évidence à partir du tableau de valeurs. La représentation graphique du prix net en fonction du prix brut est alors tracée dans un repère à l'aide de plus de deux points.

Un paragraphe "*calculs pratiques*" sert à décontextualiser la définition d'une fonction linéaire puis à donner le plan d'étude d'une fonction, c'est-à-dire, la reconnaissance du type de fonction, le calcul de valeurs de $f(x)$ et le tracé de la droite représentative de la fonction linéaire.

Pour tracer la droite représentative d'une fonction linéaire on calcule les coordonnées de plusieurs points (plus de deux). Il n'est pas signalé que la droite représentative de toute fonction linéaire passe par l'origine du repère. Aucune interprétation globale du tracé n'est proposée. Le problème réciproque n'est pas non plus abordé.

• De même, les fonctions affines sont introduites par une situation concrète, le calcul prix de la course d'un taxi en fonction de la distance parcourue. Après avoir constaté que le prix n'est pas proportionnel au nombre de kilomètres puis avoir représenté graphiquement le tableau de valeurs dans un repère, la forme symbolique de la relation est donnée. Le cours s'arrête ici. Dans le cahier de Frédéric, qui avait le même professeur dans la section ACC, la relation affine est mise en évidence par le calcul de deux valeurs du coefficient directeur. Comme pour les fonctions linéaires, un paragraphe "*calculs pratiques*" est utilisé pour décontextualiser la définition d'une fonction affine et pour donner des savoir-faire concernant le tracé de la droite représentative d'une fonction affine. Le même point de vue que pour les fonctions linéaires est ensuite développé.

Dans le contexte financier, le branchement sur des formules financières permet de résoudre graphiquement les problèmes proposés en mobilisant les équations réduites de droite $y=ax$ ou $y=ax+b$. Dans ce cas, x et y conservent le statut de grandeur. C'est l'approche ponctuelle qui est retenue pour obtenir le tracé d'une droite. Cette approche développe l'articulation entre le registre des équations de droite et le registre des représentations graphiques, mais les lettres restant toujours associées à des grandeurs.

• Une équation du premier degré à une inconnue est définie comme "*une égalité dans laquelle se trouve un terme inconnu*"

"$4+3 = 6+1$ <— *c'est une égalité*

$4+x = 6+1$ <— *ceci est une équation*

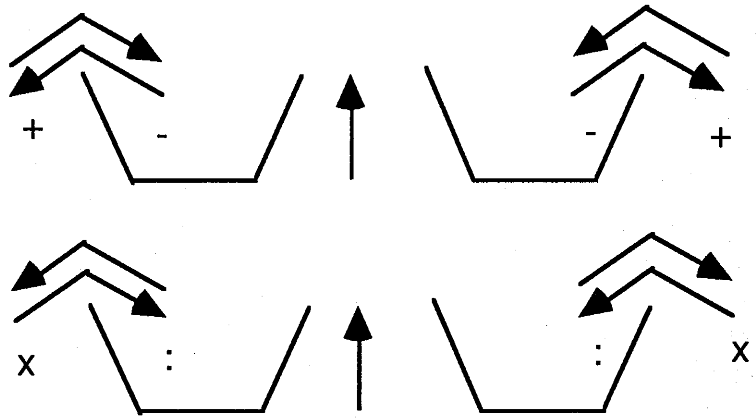
$3+2x = 5+x$ <— *ceci est une équation*

Qu'est-ce que résoudre une équation ?

Résoudre une équation c'est trouver la valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

Pour l'équation $4+x = 6+1$, $x=3$ est solution de l'équation"

Pratiquement, deux propriétés permettent de résoudre une équation. La première correspond à la conservation d'une égalité par l'addition d'un même nombre aux deux membres de l'égalité, la deuxième correspond à la conservation d'une égalité en multipliant les deux membres de l'égalité par un même nombre non nul. C'est le dessin d'une balance en équilibre qui schématise ces deux propriétés :



Des exemples d'application sont proposés. Dans la résolution des équations du premier degré, le professeur fait apparaître explicitement les transformations utilisées qui conservent l'égalité :

"$5(x-2) - 3(2x-4) = 4(5x+3)$

$5x - 10 -6x + 12 = 20x + 12$

$-20x + 5x \cancel{-10} -6x + 12 +\cancel{10} - 12 = 20x \cancel{+12} - 20x + 10 \cancel{-12}$

$-21x = 10$

$x = \dfrac{10}{-21}$"

A.2.2 La dimension *outil* de l'algèbre

1. Les exercices proposés dans le cadre algébrique sont des exercices techniques non finalisés. Ces exercices mettent en jeu la reproduction de tâches numériques et, dans ce cas, font intervenir la substitution des lettres par des nombres (calculs, calcul des coordonnées des points de la courbe représentative d'une fonction) ou bien la reproduction de tâches formelles très simples (développement, factorisation d'expressions du premier degré, résolution d'équations du premier degré).

2. L'algèbre n'intervient ni comme outil pour exprimer des relations, ni comme outil pour modéliser un problème concret, ni comme moyen de résolution de problèmes.

A aucun moment l'élève ne doit prendre en charge la construction d'une expression algébrique et sa transformation pour atteindre un but ou bien la résolution d'un problème de mathématisation. La faible complexité des expressions et leur faible degré d'implicite occulte la phase d'interprétation des expressions.

3. Les problèmes de mathématiques financières :

Les problèmes de formation des prix qui se ramènent à des situations de proportionnalité sont mis en équation à l'aide d'un tableau de proportionnalité : on recherche la quatrième proportionnelle et pour ceci, on se ramène à résoudre une équation-rapport (cf ci-dessus).

Excepté pour un problème (problème de paiement à crédit de degré de complexité 2), les problèmes financiers proposés aux élèves sont de degré de complexité 0 et 1 : pour les résoudre, il suffit de reconnaître le type de problème, de se brancher sur la formule financière adaptée, d'instancier les lettres dans la formule par les données et les inconnues de l'énoncé puis de résoudre l'équation obtenue. Une démarche analogue est utilisée pour résoudre graphiquement ces problèmes.

A.2.3 Le rapport arithmétique/algèbre

• Pour se ramener à une situation de proportionnalité, la résolution passe par des calculs numériques pas à pas, où le signe d'égalité a un statut de signe d'annonce de résultat. Nous avons déjà vu que pour chercher la quatrième proportionnelle, le signe d'égalité n'était pas symétrique. Rappelons que quatre équations sont proposées selon la position de l'inconnue.

• Les lettres ou groupement de lettres désignent des grandeurs dans les formules, ces grandeurs pouvant être instanciées. Au cours de la résolution d'un problème financier, elles prennent le statut d'inconnue.

• L'étude des fonctions et la résolution des problèmes financiers mettent en jeu une conception procédurale des objets mathématiques.

A.2.4 La place de la démonstration

Très peu de justification sont données. Pour justifier une propriété on la montre sur un ou deux exemples.

B. Analyse des exercices proposés dans chaque leçon

Comme précédemment, nous regroupons pour l'analyse, d'une part, les exercices mathématiques, et d'autre part, les exercices de mathématiques financières. Nous indiquons les exercices par chapitre puis nous résumons dans un tableau les caractéristiques descriptives des exercices obtenues à partir de l'instrument d'analyse

Chapitre 1 : *Sommes algébriques*
Deux exercices techniques de calcul numérique :
S = +3-(-4)+(+2)-(+8) ; S2 = -3-(-4+3)-(-3+1)-(1+4) de deux façons
Un exercice de calcul littéral : S3 = 8-x-(x+3)-(2x+3)+(-3x+2)
Un exercice pour calculer $f(x)$ avec $f(x)$ = -x-4 pour x=-2, x=0, x=+5

Chapitre 2 : *Produits de facteurs : factorisation*
5 exercices de développement : 3(2x-5) = ; -2(3a-8) = ; 3(5b-3)-2(3b+9) =
(3+a)(5-b) = ; calculer de deux manières 3x7-6x7 ;
1 exercice de factorisation : "Factoriser 9ax-12ay = 3a(3x-4y)"

Chapitre 3 : *Opérations sur les fractions.*
Un, deux ou trois exercices pour chaque opération sont proposés.
3/2+4/5+2 = ; 7/3+3/4-1 = ; 13/180+25/144 = ; 3/8x4/7x3/1

Chapitre 4 : *Notion de proportion*
"Chercher la quatrième proportionnelle à (2, 2/3, 6)
2/(2/3) = 6/x —> x = (2/3)x6 / 2 —> x = 4/2"

Chapitre 8 : *Fonction linéaire*
" Soit la fonction f définie par *f(x)= 3x/4. Etudier et représenter graphiquement cette fonction.*
Solution : Fonction linéaire D=R

x	-8	-4	0	+4	+8
$f(x)$	-6	-3	0	3	6

Le tracé de la droite est obtenu à partir des 5 points.

Chapitre 10 : *Equations du 1^er degré à une inconnue*
Voici les exercices corrigés :
x+8=2x-9 ; 2x = 8 ; x/5 = 7 ; x-8 = -5 ; -3x = 9 ; 3x/4 = 12 ; -3x+2 = 5x+8 ;
3x/2+4/3 = -4x/5-1/4

Tous les exercices de ces chapitres ne mettent en jeu que des expressions du premier degré, des savoir-faire algorithmisés que l'on applique directement dans le cadre numérique ou algébrique.

Chapitre 12 : *Les intérêts simples*

- Calcul d'un intérêt, connaissant le capital placé, le taux et la durée du placement (degré de complexité 0),

- Représentation graphique de l'intérêt en fonction du nombre de jours : instanciation, tracé, détermination graphique et algébrique d'un antécédent

- Calcul du temps de placement (1), calcul du capital initial (1), calcul du taux (1) (degré de complexité 1).

Chapitre 13 : *Valeur acquise*

- Calcul du capital acquis (1) (degré de complexité 0 et calcul pas à pas),

- Calcul d'un taux moyen de placement, d'un temps de placement, d'un capital initial (degré de complexité 1),

- Recherche de l'expression du capital acquis y en fonction du nombre x de jours de placement et représentation graphique (degré de complexité 1) : instanciation, tracé de la droite représentative, lecture graphique d'image et d'antécédent et vérification par le calcul.

Chapitre 14 : *Escompte bancaire*

- Calcul d'un escompte, de la valeur actuelle (degré de complexité 0),

- Calcul de la valeur nominale (degré de complexité 1),

- Recherche de l'expression de la valeur actuelle ou de l'escompte en fonction du nombre de jours "à courir" (degré de complexité 1) : instanciation, tracé de la droite représentative, lecture graphique d'antécédent

- calcul d'agio, de valeur nette escomptée, de taux réel de l'escompte (degré de complexité 1).

Chapitre 19 et 20 : *Paiement à crédit*

- Calcul de la valeur nominale de traite connaissant la valeur actuelle de la dette restante (degré de complexité 2).

C. Synthèse

Le rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu dans la classe de Caroline prend peu en compte les dimensions *objet* et *outil* de l'algèbre.

• La dimension *objet* de l'algèbre :

Les compétences algébriques exigées correspondent à l'application de savoir-faire de base, voire des gestes, sur des écritures algébriques du premier degré, dans des situations stéréotypées. En effet, le domaine algébrique est constitué essentiellement d'expressions algébriques du premier degré de une ou plusieurs variables, d'équations du premier degré à une inconnue et de fonctions linéaires et affines. Dans une large mesure, il semble que les transformations formelles correspondent à une des sources importantes de signification des expressions algébriques. On redonne une place importante aux valeurs numériques d'une expression, seulement dans le cadre fonctionnel.

Ce point de vue peut contribuer à donner aux élèves une certaine confiance dans l'écriture symbolique. Ils savent reproduire des tâches formelles très stéréotypées. En revanche, les élèves semblent bien loin de réaliser un travail de la technique et de donner du sens aux expressions algébriques.

Plusieurs registres entrent dans l'activité mathématique : le registre des écritures algébriques vers le registre numérique, le registre des écritures algébriques vers le registre graphique, les lettres gardant très fortement le statut de grandeur. Le travail graphique est alors utilisé mais seule la démarche de pointage est développée.

• La dimension *outil* de l'algèbre :

Les problèmes proposés sont essentiellement des problèmes financiers de degré de complexité 0 ou 1. Le rapport à l'algèbre est avant tout organisé autour de l'application de formules admises dans des situations contextualisées au secteur tertiaire mettant en jeu un traitement algorithmisé correspondant à celui d'exercices modèles déjà faits, de la substitution de grandeurs par des valeurs numériques, de la résolution d'équations, surtout d'équation-proportion. L'algèbre est un outil au service des problèmes de mathématiques financières.

Ce point de vue permet aux élèves d'acquérir une certaine efficacité, à condition qu'ils puissent retrouver les contextes d'utilisation déjà rencontrés.

III.2.4. Cahier de Frédéric (1ère et 2ième année de B.E.P. 1990/1991-1991/1992 dans la section A.C.C.)

Frédéric et Caroline avaient le même professeur de mathématiques. Les cours donnés dans les deux sections VAM et ACC ont été à peu près semblables. Le cours de Frédéric contient un chapitre supplémentaire : celui des systèmes d'équations linéaires à deux inconnues et quelques compléments dans les autres chapitres.

Indiquons d'abord le contenu du cahier de cours de Frédéric en précisant en gras le chapitre supplémentaire traité dans cette classe par le professeur et par une étoile la présence de compléments dans des chapitres.

On retrouve la même organisation du programme sur les deux ans que dans le cahier de Caroline. Les fonctions du second degré, les fonctions homographiques, les équations du second degré n'ont pas été abordées. Il semble aussi que les exercices relèvent de la responsabilité du professeur.

Première année de BEP section VAM	Deuxième année de BEP section VAM
Sommes algébriques Produit de facteurs : factorisation Opérations sur les fractions Notion de proportion Pourcentages * Formation des prix Fonction linéaire Partages proportionnels Equations du premier degré à une inconnue * La fonction affine * **Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues**	Les intérêts simples Valeur acquise Escompte bancaire Agios-Taux réel de l'escompte Equivalence de capitaux Equivalence d'un capital à un autre capital Equivalence de plusieurs capitaux Statistiques Indice

Tableau n°22 : Liste des chapitres du cahier de Frédéric

Nous retrouvons un rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu dans la classe de Frédéric à peu près analogue à celui mis en jeu dans la classe de Caroline.

Ajoutons ces deux remarques :

Dans le cadre algébrique, le travail de la technique est un peu plus développé dans des exercices plus difficiles qui mettent aussi en jeu les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.

On voit apparaître davantage d'exercices dans le contexte d'application du secteur tertiaire (équivalence de plusieurs capitaux, paiement à crédit) dont le degré de complexité est 2.

III.2.5. Cahier de Mérième ($2^{ième}$ année de B.E.P. 1991/1992 dans la section C.A.S.)

A. Aspects généraux

A.1 Présentation du plan et des contenus mathématiques

• Le cahier de Mérième renferme l'ensemble des cours de mathématiques du programme de BEP section C.A.S. qui ont été donnés la deuxième année. Le cahier contient à la fois le cours du professeur et de nombreux exercices d'application.

Le professeur s'appuie sur des exercices introductifs pour introduire la plupart des nouvelles notions. Les notions sont ensuite institutionnalisées autour d'un cours polycopié que les élèves complètent. Le cahier indique une activité des élèves en cours.

Voici l'ensemble des chapitres étudiés en deuxième année :

Deuxième année de BEP section CAS
Notion de bénéfice - Coût de revient Généralités sur les statistiques Les séries statistiques Les paramètres de position. Mode, médiane, moyenne Change des monnaies - Parité Fonction linéaire Fonction affine Indice simple Systèmes d'équations

Tableau n°23 : Liste des chapitres du cahier de Mérième

Le contenu diffère de celui des autres cahiers. L'accent est mis sur les statistiques et sur l'étude des fonctions. Des notions mathématiques telles que les fonctions linéaires et affines, les systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues sont enseignées en fin de deuxième année. En revanche, les problèmes de mathématiques financières n'apparaissent pas dans ce cahier de cours. Peut-être ont-ils été traités dans un autre lieu ? Il semble que le professeur veuille donner une place importante aux mathématiques générales, même au cours de la deuxième année de BEP.

Le cours est très loin de recouvrir tout le programme. De nombreuses notions mathématiques n'ont pas été abordées comme les fonctions du second degré, les fonctions homographiques, les équations du second degré.

A.2 L'étude des rapports aux objets d'enseignement de l'algèbre élémentaire

A. 2.1 La dimension *objet* des objets de l'algèbre

Nous focalisons notre analyse sur deux chapitres : les fonctions linéaires et les fonctions affines.

Fonction linéaire :

I. La définition est donnée : "*Le nombre a étant donné, on appelle fonction linéaire la fonction f qui, a tout nombre x fait correspondre le nombre ax.*"

"*III. Ensemble de définition*

Quel que soit x, son image ax existe toujours. L'ensemble de définition est donc R."

La suite du cours s'appuie sur l'étude de deux exemples, l'un dans le cas d'une fonction croissante, l'autre dans le cas d'une fonction décroissante. Ce sont les élèves qui doivent continuer l'étude commencée sur une feuille photocopiée : tracé de la droite représentative de chacune des fonctions dans un repère orthonormé à partir du calcul des coordonnées de deux points, tableau de variation de la fonction.

Deux propriétés sont institutionnalisées à partir des deux exemples :

- on déduit le sens de variation d'une fonction linéaire (resp affine) du signe de a.
- $y=ax$ est l'équation de la droite représentant la fonction linéaire $x \dashrightarrow ax$.

Il est proposé une interprétation globale du tracé à partir d'une interprétation graphique du coefficient directeur comme pente de la droite dans un repère orthonormé. De plus, le critère d'orthogonalité de deux droites est donné dans le cas des droites d'équation $y=ax$ et $y=a'x$.

Fonction affine

Dans le cas des fonctions affines, le même plan est suivi. L'ensemble de définition d'une fonction affine vient en remarque à la fin de l'étude : "*L'ensemble de définition d'une fonction affine est Df=R car quel que soit x, son image ax+b existe toujours.*"

Des calculs réalisés par Mérième laissent penser que le professeur a demandé de faire le lien entre équations réduites et tracés de droites. Pour ceci, on remarque le calcul du coefficient directeur à partir des coordonnées de deux points puis celui de l'ordonnée à l'origine. Il est donné une interprétation globale du tracé en liaison avec les coefficients a et b. Il n'y a pas institutionnalisation dans le cas général. Il semble que l'activité réalisée par les élèves ait mis en jeu l'articulation du cadre algébrique vers le numérique, du cadre algébrique vers le cadre graphique mais aussi du registre des représentations graphiques vers le registre des équations de droite.

Remarquons que Mérième a été la seule des élèves venant de BEP à commencer l'exercice du test d'entrée où on demandait d'associer équation réduite et tracé de droite !

Les exercices correspondant à ces deux chapitres sont de deux types :

- des exercices d'application directe du cours où il est demandé, soit de calculer les images de nombres par une fonction donnée, soit de représenter graphiquement une fonction,

- des exercices de mathématisation concernant des situations dans un contexte concret se ramenant à l'étude de fonctions linéaires ou affines : dans ce cas, la résolution conduit soit à une étude algébrique, soit à une étude graphique. Nous y revenons dans le paragraphe suivant.

Systèmes d'équations

Ce chapitre propose la mise en œuvre d'une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires à deux inconnues : la méthode d'addition. Aucune justification n'est proposée. Il n'y a pas recherche de l'existence des solutions, ni interprétation graphique du système.

Illustrons-le à l'aide de l'exemple ci-dessous :

"Résoudre le système d'équations suivant :

$2x-y=3$ (1)

$2x+y=5$ (2)

On additionne membre à membre les deux équations de façon à éliminer une inconnue

(1)+(2) = $2x-y+2x+y = 3+5$

$4x = 8$

$x = 8/4 = 2$

On remplace x par sa valeur dans l'une ou l'autre des équations

(2) $2x+y=5$

$4+y=5$

$y=5-4$

$y=1$ $\qquad S = \{(2;1)\}$"

A.2.2 La dimension *outil* des objets de l'algèbre

Identifions les emplois de l'algèbre mis en jeu dans les exercices proposés dans le cours de BEP.

1. Les exercices proposés dans le cadre algébrique :

Ce sont des exercices techniques non finalisés mettant en jeu :

- soit la reproduction de tâches formelles non finalisées de niveau 1 pour la résolution d'équations du premier degré à une inconnue ou pour celle de systèmes d'équations linéaires à deux inconnues,

- soit la substitution des lettres d'une expression algébrique par des valeurs numériques pour calculer les valeurs de $f(x)$ ou les coordonnées des points de la courbe représentative d'une fonction linéaire ou affine.

2. Les problèmes liés au contexte concret :

Dans le cahier de Mérième, l'algèbre intervient surtout dans la mise en équation de problèmes dans le cadre fonctionnel.

Donnons en deux exemples classiques :

Enoncé 1:

"Une personne a touché 1000^F pour 10 heures de travail.
1. Trouver la relation qui permet de calculer le salaire y en fonction de la durée du travail x.
2. Représenter graphiquement la fonction précédemment trouvée quand x varie de 0 à 20
Echelle : Abscisse 1cm —> 2 heures
Ordonnée 1cm —> 100^F
3. Déterminer a) graphiquement puis b) par le calcul :
• y si x = 15 h, • x si y = 800^F"

Enoncé 2 :

"La rémunération mensuelle d'un représentant comprend :
- un fixe de 5000^F
- une commission proportionnelle au chiffre d'affaires (taux 4%).
Ainsi au montant x du chiffre d'affaires correspond le montant y de la rémunération mensuelle.
1. Exprimer y en fonction de x
2. Représenter graphiquement la fonction obtenue pour x variant de 0 à 200000
3. En déduire le montant du chiffre d'affaires pour que la rémunération soit de 12000^F. Vérifier par le calcul.
4. Supposons que le représentant ait à choisir entre le mode de rémunération précédent ou une commission unique de 8% sur le chiffre d'affaires.
a) Exprimer y en fonction de x dans ce cas et représenter graphiquement la fonction obtenue (dans le même repère)
b) Pour quel chiffre d'affaires la rémunération est-elle la même dans les 2 cas ?
c) En fonction du chiffre d'affaires, quel est le mode de rémunération le plus intéressant ?

Ces problèmes classiques du premier degré ne présentent pas de réelle difficulté dans l'interprétation des énoncés et la traduction algébrique des relations linéaire ou affine mises en jeu. Ici, la résolution est guidée par la donnée préalable des grandeurs étudiées.

Deux types de traitement interviennent dans la résolution de ces exercices :

- la production d'expressions et de relations algébriques ou fonctionnelles,
- l'utilisation du calcul algébrique comme outil de résolution.

3. Les problèmes liés au contexte financier :

Il n'apparaît pas de problèmes dans un contexte d'application lié au secteur tertiaire. L'algèbre ne semble pas enfermée dans la résolution des problèmes financiers.

B. Synthèse

Concluons directement et définissons le rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu semble-t-il dans la classe de Mérième.

Le rapport institutionnel à l'algèbre prend en compte à la fois la dimension outil et objet de l'algèbre. Ce qui frappe dans ce cours, c'est la volonté affichée par le professeur d'engager l'algèbre dans la dimension fonctionnelle, même si cette entrée reste très limitée.

Du côté *objet* :

Le travail de la technique n'est pas très développé et reste limité au domaine des expressions du premier degré. Mais, certains éléments non anodins semblent montrer une certaine ouverture : par exemple, Mérième apprend à résoudre des systèmes par une méthode mixte mettant en jeu la substitution. Ici, c'est la symétrie du signe d'égalité qui est privilégié.

Il est fait appel à une démarche d'interprétation globale pour associer tracés de droite et équations réduites. L'articulation entre le registre des représentations graphiques et des écritures algébriques intervient dans les deux sens.

Du côté *outil* :

L'outil algébrique semble être disponible pour mathématiser des situations du premier degré familières (production guidée) conduisant à des représentations congruentes. De plus l'outil algébrique peut intervenir pour déterminer une équation de droite, une formule fonctionnelle.

Le rapport à l'algèbre n'est pas enfermé dans un rapport d'utilisation de formules dans des contextes d'utilisation liés au secteur tertiaire.

Nous verrons que le parcours de Mérième en Première G s'est tout de suite distingué de celui de ses camarades.

III.2.6. Cahier de Lucie (2^{ième} année de B.E.P. 1991/1992 dans la section C.A.S.)

A. Aspects généraux

A.1 Présentation du plan et des contenus mathématiques

• Le cahier de Lucie est bien tenu. A première vue, le cours et les exercices sont placés au même niveau. L'ensemble des chapitres du cours de première année ont été révisés pendant le premier trimestre. Les deux chapitres portent respectivement comme titres "Révisions : Algèbre", "Révisions : Fonctions". Au deuxième trimestre, la suite du cours est consacrée à des exemples d'application dans le secteur tertiaire (formation des prix, mathématiques financières). Les statistiques sont enseignées au troisième trimestre. En général, l'organisation des cours suit le même canevas : présentation d'un bref résumé des savoirs et savoir-faire enseignés puis longue liste d'exercices d'application. La majorité des exercices semblent avoir été résolus en classe puis corrigés par le professeur.

Voici l'ensemble des chapitres étudiés sur les deux années :

Deuxième année de BEP section CAS
(Révision) Fractions Puissances, racines carrées Produits remarquables, développement et factorisation Equations et inéquations du premier degré à une inconnue Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues ? Partages proportionnels et inversement proportionnels Pourcentages Equations du second degré Fonctions La formation des prix Les indices Les intérêts simples - Valeur acquise Escompte commercial Equivalence de capitaux Statistiques : vocabulaire -Séries cumulées Représentation graphique des distributions statistiques Paramètres de position

Tableau n°24 : Liste des chapitres du cahier de Lucie

Le cours recouvre la quasi-totalité du programme de BEP tertiaire : les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues sont annoncés dans le titre d'un paragraphe mais ne semblent pas avoir été traités.

A.2 L'étude des rapports aux objets d'enseignement de l'algèbre élémentaire

A.2.1 La dimension *objet* de l'algèbre

Les notions mathématiques étudiées sont abordées, soit par l'intermédiaire de la résolution d'exercices (notions d'algèbre), soit par des exemples (fonctions). Illustrons-le pour différentes notions.

Le chapitre "Révisions : Algèbre" est organisé comme suit :

"I. Fractions
II. Puissances - Racines carrées et produits remarquables
III. Equations 1er degré - Inéquations - Systèmes
IV. Partages proportionnels et inversement proportionnels
V. Pourcentages
VI. Equations du 2ième degré"

Les paragraphes enchaînent quelques résumés indiquant les règles de calcul à mobiliser et des exercices d'application. Les résolutions renferment très peu d'éléments explicatifs. Aucune synthèse n'est proposée. Examinons le poids accordé à chaque partie.

- Le paragraphe II comporte deux exercices de manipulation formelle qui proposent de développer de façon directe des identités remarquables $(4x-1)^2$ et $(-2x+1)^2$ et une expression algébrique. Cet exercice met en jeu une difficulté auquel les élèves sont régulièrement confrontés : l'enchaînement des transformations, ici le calcul du carré de $4x$ ou de $-2x$ et l'utilisation des parenthèses et des priorités opératoires. Il est demandé aussi de calculer l'expression pour des valeurs numériques de x. Mais aucune factorisation n'est mise en jeu dans les exercices. Le rapport au calcul formel semble très peu développé comme dans la majorité des cahiers d'élèves de BEP tertiaire.

- En revanche, le paragraphe sur les équations est important. Les exercices proposés sont nombreux, variés : équations du premier degré à coefficients relatifs ou rationnels, équation du second degré sous forme d'un produit de facteurs, équations rationnelles de la forme $(ax+b)/(cx+d) = cste$. Leur résolution peut parfois demander une certaine technicité, même si globalement, les équations restent simples et peuvent être résolues par l'application de gestes. Certaines des équations proposées n'admettent même aucune solution. En revanche, aucune résolution ne mobilise de factorisation de polynômes, ni de travail algébrique.

Les solutions écrites permettent en général difficilement de déterminer les procédés utilisés. Mais, il semble que certaines équations soient résolues en conformité aux règles-gestes suivantes :

"On obtient une équation équivalente en supprimant les dénominateurs"

"On se ramène à une équation équivalente en faisant un produit en croix".

Par exemple," $x+ x/2 - 1 = 3$

$$\frac{2x+x-2}{2} = \frac{6}{2}$$

$2x+x-2=6$

$3x=6+2$

$3x=8$ *équivaut à* $x=8/3$ S= {8/3}"

On remarque que les inéquations et systèmes étaient annoncés, mais aucun exercice n'y fait référence.

- La résolution d'une équation de second degré consiste à appliquer le schéma de résolution suivant : "*Pour résoudre une équation du type* $ax^2+ bx + c = 0$

1° Déterminer les valeurs de a, b et c.

2° Calculer les valeurs de l'expression Δ appelée discriminant, $\Delta=b^2-4ac$

3° Si $\Delta< 0$ $S=0$

Si $\Delta=0$, $x = -b/a$

Si $\Delta>0$, $x1 = (-b+\sqrt{\Delta})/2a$, $x2 = (-b-\sqrt{\Delta})/2a$".

Suivent de nombreux exercices correspondant aux trois cas envisagés, les capacités requises étant exigibles au contrôle. Comme dans les autres exercices, la dimension syntaxique et sémantique est très limité. Ce qu'on attend avant tout, c'est l'application d'algorithmes de résolution et une certaine efficacité.

- Les paragraphes IV et VI proposent des exercices classiques de partages proportionnels et de formation des prix. Le geste "produit en croix" est ici privilégié.

Dans le chapitre "Révisions : Fonctions", le paragraphe I. dresse une liste des fonctions de base et associe expressions algébriques et représentations graphiques.

Dans le paragraphe 2, on indique comment tracer les courbes représentatives des fonctions *f*. C'est avant tout une conception procédurale qui anime les calculs et les tracés. L'articulation du registre des écritures algébriques vers celui des représentations graphiques, seule mobilisée ici, s'appuie sur une démarche de pointage.

En résumé, le calcul algébrique est ici développé dans un monde clos, à travers des exercices non finalisés. La manipulation formelle d'expressions algébriques disparaît derrière les calculs d'ordre numérique et la résolution algorithmisée d'équations. Le rapport au calcul algébrique est essentiellement organisé autour de la résolution algorithmisée d'équations, la résolution pouvant faire appel à des gestes.

A.2.2 La dimension *outil* de l'algèbre

Identifions maintenant les emplois de l'algèbre mis en jeu dans les exercices.

1. Les exercices dans le cadre algébrique : comme nous venons de le voir, ce sont des exercices non finalisés. Les deux types de traitement *reproduction de tâches formelles non finalisées* et *reproduction de tâches non finalisées de niveau 1* sont mis en jeu. Nous avons déjà vu que les exercices proposés peuvent contribuer à privilégier un rapport à la résolution d'équations.

2. Aucun problème de mathématisation n'est donné.

3. Les problèmes liés aux contexte financier : ils constituent l'essentiel du cours du deuxième trimestre. Les problèmes correspondent aux chapitres *formation des prix, indice simple et intérêts simples.*

Pour ce qui concerne les problèmes de pourcentages, le côté algorithmique est très développé : à chaque opération sur les pourcentages est donnée une règle de calcul non justifiée : par exemple, "ajouter un pourcentage de 10% —> multiplier par 1,10". La technique sous-jacente est passée sous silence : les élèves doivent retenir "par cœur" le calcul des coefficients de proportionnalité correspondants et l'appliquer pas à pas.

Dans le cas des problèmes d'intérêts simples, les trois types de problèmes sont traités : les énoncés sont stéréotypés et leur degré de complexité varie de 0 à 2 (équivalence de capitaux). Leur résolution repose sur l'application plus ou moins directe de formules (cf deuxième démarche) : branchement sur une formule, instanciation des lettres et résolution d'équations typiques. Le recours à l'équation en croix est privilégiée. Donnons en un exemple :

$C=27340$		$\dfrac{2153{,}02}{1} = \dfrac{2734xtx9}{1200}$
$n= 9$ mois	t% ?	$2153{,}02 \times 1200 = 2734xtx9$
$I=2153{,}02$		$t = 2153{,}02 \times 1200 / 2734x9 = 10{,}5$ %"

La dimension graphique est peu développée et reste liée au contexte financier (axes référencés par les grandeurs).

III.3 SYNTHÈSE

L'analyse des cahiers d'élèves apporte un éclairage nouveau à la fois sur les programmes et sur les sujets d'examen.

Excepté pour le cahier de Mérième, nous voyons émerger très fortement dans les rapports institutionnels à l'algèbre mis en jeu dans les classes de BEP, des *similarités liées au programme de BEP tertiaire*, qui les différencient clairement du rapport institutionnel à l'algèbre en Seconde. Ces rapports à l'algèbre passent d'abord par un rapport d'utilisation de formules dans des situations contextualisées au secteur tertiaire et mettent en jeu un traitement algorithmisé semblable à celui donné dans des exercices-modèles. Le rapport à la manipulation formelle des expressions algébriques reste davantage enfermé dans un rôle d'usage et de transformation de formules. Ce rapport est aussi un rapport organisé autour de la substitution des lettres (grandeurs) par des valeurs numériques (en général positives) et de la résolution d'équations du premier degré.

Mais des divergences peuvent apparaître aux frontières du programme sur de nombreux aspects. Les professeurs, selon leur épistémologie personnelle, semblent développer des points de vue différents sur les enjeux du cours de mathématiques, sur les compétences algébriques à faire construire chez les élèves, ce qui ne sera pas sans conséquences sur leur enseignement et sur le rapport à l'algèbre développé. L'analyse montre bien ici que les professeurs conservent un espace de liberté certain dans le cadre du programme. Ces divergences concernent le travail de la technique dans la manipulation formelle des expressions, les articulations entre registres, les conceptions procédurale ou structurale des objets, la place de l'arithmétique, l'ouverture à des situations diverses et peuvent induire des rapports à l'algèbre très différents. Pour en avoir une vision globale, schématisons dans un tableau les éléments caractéristiques du rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu dans chaque classe :

Compos.	Critère	Pour Sandrine F. Valeur globale	Pour Denis. Valeur globale	Pour Caroline/Frédéric Valeur globale
Traitement algébrique	**Type trait alg** Tâche d'ordre num Repr.formelle nv1 Repr.formelle nv2 Interp. d'expr alg. Util alg pr notions Brancht formule Production guidée Production Preuve outil alg	 Substitution numérique Développement, Résol. équations 1^{er} degré, systèmes linéaires Non ? Recherche fonction affine Brcht form financière (1) Non Mise en équat ctxte concr Non	 Substitution numérique Développem^{t}, Factoris, Résol. équ se ramenant au 1^{er} degré, systèmes lin Oui ? Non Brcht form financ. (1,2) Mise équat ctxte finan (3) Non Non	 Substitution numérique Développem^{t}, Résol équations 1^{er}degré systèmes linéaires Non ? Non Brcht form financ. (1,2) Non Non Non
Rapport arithmétique /algèbre	Démarche de résolution envis.	Arithmétique Algébrique	Arithmétique Algébrique	Arithmétique Algébrique
	Statut des lettres	Grandeur, inconnue, variable, grandeur-variable	Grandeur, inconnue, variable, grandeur-variable	grandeur, inconnue, grandeur-variable
	Statut du signe d'égalité	Signe d'effectuation Relation d'équivalence	Signe d'effectuation Relation d'équivalence	Signe d'effectuation Relation d'équivalence
	Statut des expressions	Procédural Structural (peu fct affine)	Procédural Structural (peu pour syst	Procédural
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Pour expr alg 1^{er}, $2^{è}$ deg Pr fractions rationnelles	Pour expr alg 1^{er}, $2^{è}$ deg Pr fractions rationnelles	Pour expr. alg 1^{er} degré
	Type de traitement	Ensemble règles de traitement mises en jeu	Ensemble règles de traitement mises en jeu	Ensemble règles de traitement mises en jeu
Articulation entre registre algébrique et d'autres reg.	Type de conversion	Reg alg.—>reg num reg num—>reg alg (peu) Reg alg—>reg graphique (ctxte fin. ou non, ponct) Reg lg nat —>reg alg (congruent, non congruent)	Reg alg.—>reg num Reg alg—>reg graphique (plutôt ctxte fin., ponct) Reg lg nat —>reg alg (congruent)	Reg alg.—>reg num (plutôt ds ctxte financier) Reg alg—>reg graphique (ctxte fin., ponct)
Rôle de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	- Faire du calcul numérique dans contexte d'application ou non - Faire du calcul formel dans cadre algébrique (très peu) - Utiliser outil algébrique pour trouver relation affine - Mathémat. situations extra-math ds ctxte concret peu familier (très peu) - Résoudre des problèmes dans contexte tertiaire	- Faire du calcul numérique dans un contexte d'application ou non - Faire du calcul formel dans le cadre algébrique - Résoudre des problèmes dans contexte tertiaire - Mathémat. des problèmes intra-mathématiques ds le numérique (très peu)	- Faire du calcul numérique dans un contexte d'application - Faire du calcul formel dans le cadre algébrique (très peu - Résoudre des problèmes dans contexte tertiaire

Tableau n° 25 : Eléments du rapport institutionnel à l'algèbre dans des classes données

Compos.	Critère	Pour Mérième Valeur globale	Pour Lucie Valeur globale	Pour Nicolas Valeur globale
Traitement algébrique	**Type trait alg** Tâche d'ordre num Repr.formelle nv1 Repr.formelle nv2 Interp. d'expr alg. Util alg pr notions Brancht formule Production guidée Production Preuve outil alg	Substitution numérique Développement, ? Résol. équations 1^{er} deg, systèmes linéaires Non Oui Recherche équat réd droite Brcht formule financière ? Mise en équat ctxte concr Non	Substitution numérique Développement, Résol. équations 1^{er} deg, rationnelles, $2^{ème}$ degré Non ? Non Brcht form financ. (1,2) Non Non Non	
Rapport arithmétique /algèbre	Démarche de résolution envis.	Algébrique	Arithmétique Algébrique	
	Statut des lettres	Inconnue, variable	Grandeur, inconnue, variable, grandeur-variable	
	Statut du signe d'égalité	Signe d'effectuation Relation d'équivalence	Signe d'effectuation Relation d'équivalence	
	Statut des expressions	Procédural Structural (équat droite)	Procédural	
Gestion dans registre algébrique	Type de formation	Pour expres. alg 1^{er}, ? degré Pr fractions rationnelles	Pour expres. alg 1^{er}, $2^{è}$ degré Pr fractions rationnelles	
	Type de traitement	Ensemble règles de traitement mises en jeu	Ensemble règles de traitement mises en jeu	
Articulation entre registre algébrique et d'autres reg.	Type de conversion	Reg alg.—>reg num Reg alg—>reg graphique (ctxte fin. ou non, int gl) Reg graphique—>reg alg Reg lg nat —>reg alg (congruent)	Reg alg.—>reg num Reg alg—>reg graphique (plutôt ds ctxte financier)	
Rôle de l'algèbre	Emploi de l'algèbre	- Faire du calcul numérique ds ctxte d'applicat. ou non - Faire du calcul formel dans cadre algébrique (très peu) - Utiliser outil algébrique pr trouver équation droite - Mathématiser et résoudre des situations extra-mathématiques liés à un contexte concret assez familier - Résoudre des problèmes dans contexte tertiaire ?	- Faire du calcul numérique ds ctxte d'applicat. ou non - Faire du calcul formel dans le cadre algébrique - Résoudre des problèmes dans contexte tertiaire	

Tableau n° 26: Eléments du rapport institutionnel à l'algèbre dans des classes données

A partir de l'analyse des différents cahiers, mettons en évidence des choix des professeurs qui laissent prévoir des obstacles à l'adaptation des élèves en Première G ou d'autres, au contraire, qui peuvent laisser apparaître des germes, des points d'appui à l'adaptation :

Les obstacles prévisibles

• Caroline et Frédéric ont surtout manipulé des expressions algébriques du premier degré et ont développé des techniques locales. Cette hégémonie du premier degré peut masquer la spécificité des techniques développées et occulter leur inopérationnalité pour des polynômes de degré supérieur à un.

• Excepté dans le cours de Denis, le faible développement de la technique de manipulation formelle et de la sémantique des expressions algébriques met à l'arrière plan une des propriétés essentielles du langage algébrique : le fait que les écritures algébriques sont manipulables et calculables. Le calcul algébrique risque de rester peu disponible dans des tâches finalisées.

• Cette difficulté risque d'être accrue par une excroissance des situations stéréotypées du contexte tertiaire de degré de complexité 0 et 1 (cahier de Caroline). D'une part, l'utilisation des formules financières enferme le rapport à l'algèbre dans un rapport d'utilisation de formule et non dans une rapport de production et de transformation d'expressions. D'autre part, les pratiques arithmétiques peuvent alors continuer à vivre et gêner l'entrée dans la pensée algébrique (non symétrie du signe d'égalité, omniprésence du statut de grandeur pour les lettres qui préserve une signification liée au contexte mais qui rend difficile la manipulation des expressions, omniprésence des nombres positifs, ...).

• Enfin, le manque de flexibilité entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres peut accroître les difficultés des élèves à mobiliser des connaissances assez éparses, surtout si leur disponibilité est associée au contexte d'utilisation.

Les points d'appui

Les cahiers montrent la diversité des voies d'ouverture possibles à l'adaptation. Explicitons les principales voies envisageables :

• *Le travail important de la technique*, la présence d'exercices mettant en jeu la reproduction de tâches formelles de niveau 2, permet d'envisager un degré de maîtrise technique de la manipulation formelle correspondant à celui attendu à un niveau de Première, un certain degré d'automatisation et une ouverture sur la sémantique des expressions algébriques. Le cahier de Denis laisse envisager qu'il pourra réinsvestir ses capacités techniques dans les exercices de manipulation formelle en Première. N'oublions pas que le rôle de la technique est très important vu la place accordée au calcul algébrique dans l'étude des nouvelles notions enseignées en Première G.

• Certains cahiers montrent *des situations diverses dans le contexte tertiaire mais aussi en dehors*, ainsi que des types de tâches plus diversifiées où les élèves devront, soit utiliser une formule financière, soit utiliser l'outil algébrique pour formuler algébriquement, pour résoudre. Dans ce cas, la confrontation des élèves à différents rôles possibles de l'algèbre, à différents statuts des lettres peut faciliter leur entrée dans d'autres formes de la pensée algébrique. Ils auront déjà été amenés à développer de nouvelles techniques adaptées à des champs de problèmes nouveaux, à prendre en charge une certaine responsabilité dans la résolution des problèmes. Cette ouverture apparaît dans le cahier de Sandrine F., de Denis, de Mérième, mais semble encore bien marginale pour produire des effets à long terme. Dans une moindre mesure, la réalisation assez fréquente de problèmes financiers de degré de complexité 2 ou 3 (cahiers de Frédéric, de Denis) peut déjà ouvrir vers une activité algébrique.

• Certains élèves ont étudié plus finement les fonctions affines, *en dehors de tout contexte tertiaire*, ont établi un lien entre fonctions affines et équations de droite. Ce travail peut faciliter leur entrée dans le cadre fonctionnel et l'utilisation de variables en dehors du statut de variable-grandeur qui reste attaché au calcul numérique et à la résolution d'équations. N'oublions pas que les élèves vont être amenés à dériver des fonctions, à étudier le signe d'expressions, à faire des calculs qui momentanément doivent être coupés de tout contexte d'utilisation. Un autre point d'appui peut résider dans la capacité des élèves à exprimer une variable en fonction d'une autre et à bien maîtriser la symétrie du signe d'égalité (cf cahier de Mérième).

• Nous avons montré combien une bonne flexibilité entre le registre des écritures algébriques et les autres registres était nécessaire pour permettre de mobiliser certaines formes de connaissances algébriques. Indiquons des articulations développées dans certains cahiers, celles qui ne sont pas unanimement travaillées en BEP, et qui peuvent créer une dynamique :

- dans le cahier de Sandrine F., le sens d'une expression algébrique est clairement lié au calcul de ses valeurs numériques : cette disponibilité de l'articulation entre le registre des écritures algébriques et le registre numérique peut s'avérer un point d'appui important comme moyen de signification mais aussi comme approche numérique des fonctions ;
- dans le cahier de Sandrine F. mais aussi celui de Mérième, l'articulation entre les cadres numérique et fonctionnel est mobilisée pour déterminer une fonction affine définie par deux nombres et leur images. La vision structurale des fonctions qui est développée à travers la définition de types de fonctions engage ces élèves dans la dimension fonctionnelle et l'appuie encore sur le numérique.
- dans le cahier de Mérième, l'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des équations de droites, par l'intermédiaire d'une interprétation globale des tracés, en dehors d'un contexte particulier, permet la mise en place d'un réseau de significations, de points de vue complémentaires, sans lesquels il est plus

difficile d'acquérir une bonne familiarité avec les écritures algébriques. Il semble que cet élément joue un rôle déterminant pour une bonne adaptation en Première.

- dans le cahier de Sandrine F., les difficultés pour traduire algébriquement un énoncé en langage naturel, difficultés liées à la non congruence sémantique des énoncés, sont ébauchées. On aborde alors la nécessaire reformulation des expressions.

IV. RETOUR SUR LE PROGRAMME DE PREMIERE G.

IV.1 LES OBJECTIFS

Les intentions majeures de ce programme reprennent les grandes lignes de celles du programme de seconde indifférenciée :

- "***donner aux élèves une formation conçue en fonction de la poursuite d'études supérieures dans le domaine du commerce, de la gestion, des sciences économiques***",

- "*insister sur l'importance du **travail personnel** des élèves (...)et sur le rôle formateur des activités de **résolution de problèmes***",

- "*renforcer les objectifs d'**acquisition de méthodes***",

- "*prendre en compte l'exigence de contenus présentant un intérêt pour la **formation de tous les élèves**. En particulier, dans les classes de **Première d'adaptation**, il convient de mettre en place des mesures d'aide personnalisées en fonction de l'origine des élèves de façon à consolider et à compléter leurs acquis antérieurs, sans pour autant reprendre une étude systématique du programme de Seconde.*"

Les responsables qui ont rédigé ce programme semblent conscients des différences entre les acquis antérieurs des élèves venant de BEP tertiaire et ceux attendus et nécessaires à l'entrée en Première G.

IV.2 LES CONTENUS MATHÉMATIQUES

Les objectifs et capacités valables pour l'ensemble des rubriques du programme sont développés avant la présentation des contenus mathématiques. Ils insistent sur :

- la place importante des représentations graphiques pour donner du sens aux objets mathématiques,

- le rôle essentiel des problèmes et méthodes numériques dans la compréhension des notions mathématiques et dans l'articulation entre expérimentation et raisonnement,

- la mise en valeur des aspects algorithmiques des problèmes étudiés,

- la nécessité d'utiliser aussi bien la calculatrice programmable que l'outil informatique.

A partir des rubriques *algèbre* et *fonctions numériques* du programme de Première G[17], nous dressons la liste des savoirs et savoir-faire mathématiques mis en jeu dans cette classe :

Algèbre	*Fonctions numériques*
- proportionnalité (pourcentages), - équations et inéquations, systèmes d'équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques, - mise en équation des problèmes issus de situations variées menant à des équations et inéquations,	- fonction numérique d'une variable (calcul des valeurs de $f(x)$, tracé de la courbe représentative de f dans un repère donné), - fonction dérivée, calcul de dérivée, - sens de variation d'une fonction (étude du signe de $f'(x)$), - résolution algébrique d'une équation du second degré.

Tableau n°27 : Liste des notions étudiées dans le programme de Première G

IV.3 DES CAPACITÉS ALGÉBRIQUES ATTENDUES EN PREMIÈRE G

Le contenu du programme de Première G met en évidence la structure multiforme de l'algèbre élémentaire, aussi bien dans sa dimension *objet* que dans sa dimension *outil.* Nous attendons les compétences algébriques suivantes en Première G :

• Du coté *objet*, un élève doit :

- avoir un degré de technicité de niveau 1 pour être capable de manipuler formellement des expressions algébriques (factorisation, résolution d'équations, ...) en tenant compte des niveaux syntaxique et sémantique ,

- interpréter des expressions algébriques de façon adaptée au type de tâche en jeu (calcul des valeurs de $f(x)$, calcul de dérivée, recherche d'une équation de tangente, ...) en liaison ou non avec un autre registre.

• <u>Du côté outil</u> : un élève doit pouvoir

- mettre en place des méthodes algorithmisées où interviennent le calcul algébrique (reconnaissance de schéma, instanciation, ...),

- utiliser le calcul algébrique pour faire fonctionner d'autres notions (résolution d'équations à partir de la factorisation de polynômes de degré 2 ou 3, ...), en particulier pour étudier des fonctions (étude du signe de la dérivée, ...),

- traduire algébriquement des situations qui se ramènent aussi bien à la résolution d'équations, qu'à l'étude de fonctions.

[17]Nous n'abordons pas la rubrique *probabilités*.

CHAPITRE 6

PROFILS D'ÉLÈVES

Nous revenons dans ce chapitre sur la dimension cognitive. Dans les chapitres 3 et 4, la structure d'analyse a été utilisée pour élaborer un ensemble de tâches diagnostic visant à cerner le rapport d'élèves à l'algèbre élémentaire.

L'expérimentation menée à l'entrée en Première G d'adaptation a permis de dresser en quelques sorte un panorama cognitif de chaque élève. Il s'agit là d'un objet très complexe et il nous a semblé nécessaire, dans une seconde phase du travail, d'essayer d'opérer une synthèse significative et opératoire de ce panorama. C'est l'objet de ce présent chapitre.

Nous y présentons d'abord les deux niveaux de description utilisés pour rendre compte de façon plus résumée du fonctionnement cognitif des élèves, le premier niveau en termes de réussite /échec par rapport au niveau attendu, dans les deux dimensions outil et objet, le deuxième de description en termes de cohérences.

Nous montrons ensuite comment le recoupement transversal des réponses aux différentes tâches mettant en jeu une même composante permet de définir un certain nombre de modalités susceptibles de caractériser de façon opératoire et relativement simple les cohérences de fonctionnement des élèves et aboutir à la notion de profil d'élève.

Nous mettons ensuite en fonctionnement l'outil élaboré pour décrire les profils des sept élèves issus de BEP tertiaire ayant participé à l'expérimentation.

I. DEUX NIVEAUX DE DESCRIPTION DU FONCTIONNEMENT COGNITIF DES ÉLÈVES EN ALGÈBRE

Nous reprenons les choix d'analyse faits au chapitre 3 pour définir une description pertinente et opérationnelle du fonctionnement global des élèves dans le champ de l'algèbre élémentaire.

Après le passage du test d'évaluation nous avons analysé, à l'aide des grilles d'analyse associées, les productions de chaque élève relatives à l'ensemble des tâches diagnostic. Nous avons ainsi obtenu dix-neuf n-uplets constitués des valeurs de critères, n variant d'une tâche à l'autre suivant le nombre de critères mis en jeu. Ils sont présentés pour chaque élève dans deux tableaux, l'un correspondant aux exercices de "reconnaissance", l'autre aux exercices "techniques" et aux exercices de "mathématisation". Nous donnons dans ce chapitre (voir IV.2) les tableaux correspondant aux sept élèves venant de BEP, ceux des autres élèves de Première G sont disponibles en annexe.

Il s'agit maintenant de définir un niveau de description qui donne un modèle global intelligible du fonctionnement algébrique des élèves, couvrant l'ensemble des tâches diagnostic. Dans ce but et compte tenu de l'analyse théorique, nous organisons la description du diagnostic par une analyse transversale sur les trois classes de tâches selon les six composantes d'analyse. Nous distinguons deux niveaux de description qui correspondent aux deux objectifs d'analyse définis au chapitre 3 : analyse en termes de réussite/échec et analyse en termes de cohérences.

Chaque niveau de description est lié aux composantes d'analyse mises en jeu : *traitement algébrique* pour le premier et l'ensemble des autres composantes pour le deuxième.

Le tableau ci-dessous schématise l'organisation de la description :

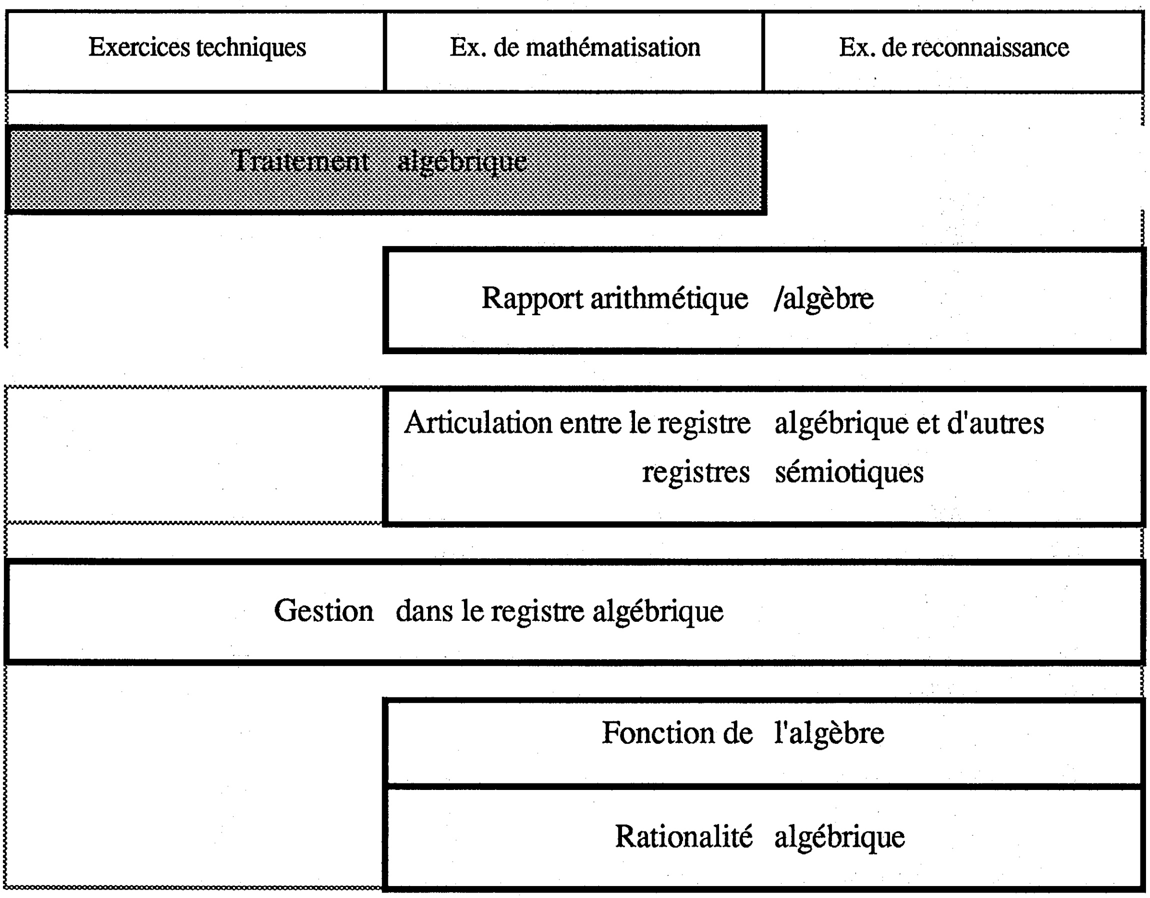


Tableau n°1 : Organisation croisée du diagnostic et de sa description

• *Premier niveau de description en termes de réussite /échec par rapport au niveau attendu*

Nous voulons d'abord décrire en termes de réussite/échec, "dans les grandes lignes" et à l'aide d'indicateurs quantitatifs, les compétences algébriques des élèves selon les deux dimensions objet et outil, en référence aux compétences attendues en classe de Première G. Les indicateurs retenus sont les taux de réussite relatifs aux deux classes de tâches suivantes : exercices "techniques" et exercices de "mathématisation" (cf paragraphe II).

• *Deuxième niveau de description en termes de cohérences*

Avec ce deuxième niveau de description, nous voulons décrire qualitativement, compte tenu des différentes formes du savoir algébrique, les régularités et les cohérences identifiées du comportement d'un élève, que ce comportement soit conforme ou non à celui attendu en Première G.

Dans ce but, à partir des composantes d'analyse autres que la composante *traitement algébrique*, nous réalisons une analyse transversale sur les classes de tâches diagnostic mettant en jeu une même composante d'analyse. Nous rendons compte des cohérences de fonctionnement, si elles existent, composante par composante, par recoupement des valeurs d'un même critère (cf paragraphe III).

II. PREMIER NIVEAU DE DESCRIPTION : COMPÉTENCES ALGÉBRIQUES SELON LES DIMENSIONS OBJET ET OUTIL

Le même type d'indicateur est utilisé pour évaluer les compétences d'un élève, relatives à celles attendues en classe de Première G, dans les deux dimensions objet et outil. Après l'avoir présenté globalement, nous précisons dans ce paragraphe comment il est opérationnalisé dans les deux dimensions. Nous indiquons aussi les choix réalisés pour affiner cet indicateur.

II.1 UN INDICATEUR POUR CERNER LES COMPÉTENCES ALGÉBRIQUES SELON LA DIMENSION

De façon globale, pour l'ensemble des tâches concernées par une dimension, nous calculons le taux de réussite de chaque élève. Ce taux représente un "indicateur grossier" des compétences algébriques de l'élève selon la dimension étudiée, compte tenu de notre attente en Première G.

Ce taux doit être mis en relation avec la moyenne du taux de réussite des élèves de la classe. Il permet de situer rapidement les compétences algébriques d'un élève par rapport à celles de l'ensemble des élèves.

Nous avons choisi d'affiner cet indicateur par la mise en évidence, pour chaque élève, des types de traitement algébrique suffisamment disponibles ou maîtrisés : nous dirons qu'un type de traitement algébrique est "maîtrisé", s'il est réussi à plus de 50% sur l'ensemble des tâches le mettant en jeu.

Dans le profil de chaque élève, nous indiquons les types de traitement algébrique maîtrisés relatifs à la classe des tâches "techniques" et à celle des tâches de "mathématisation". Ils donnent des indications plus fines sur les compétences algébriques de l'élève selon chaque dimension.

II.2 COMPÉTENCES ALGÉBRIQUES DANS LA DIMENSION *OBJET* :

Pour cerner les compétences algébriques d'un élève dans la dimension objet, nous calculons son taux de réussite aux exercices "techniques", à savoir, ceux qui mettent en jeu soit la reproduction de tâches non finalisées d'ordre numérique, soit la reproduction de tâches algébriques non finalisées. Ce calcul concerne les dix exercices des tâches 2, 5 et 7.

	T2	T5	T7
Traitement algébrique			
Type de traitement selon le type de tâche			
Reproduction de tâches numériques non finalisées	XXX		
Reproduction de tâches algébriques non finalisées. niv1		X	1,2,3,4,6
Reproduction de tâches algébriques non finalisées. niv2			5

Tableau n°2 : Calcul du taux de réussite pour les exercices "techniques"

Pour affiner cet indicateur, nous indiquons si les types de traitement algébrique *reproduction de tâches algébriques non finalisées de niveau 1* et *reproduction de tâches algébriques non finalisées de niveau* 2 sont maîtrisés ou non.

Cela permet ainsi de distinguer les compétences techniques reposant sur l'application directe de savoir-faire de base mettant en jeu l'aspect syntaxique des expressions de celles qui s'appuient sur l'aspect sémantique des expressions.

II.3 COMPÉTENCES ALGÉBRIQUES DANS LA DIMENSION *OUTIL* :

Pour cerner les compétences algébriques d'un élève dans la dimension outil, nous calculons son taux de réussite aux exercices qui mettent en jeu l'utilisation de l'algèbre comme outil. Ce calcul concerne les exercices de mathématisation, c'est-à-dire les tâches 12, 13, 16 et 17 et 19, les tâches 10 et 14.

	T8	T10	T12	T13	T14	T16	T17	T15
Traitement algébrique								
Type de traitement selon le type de tâche								
Utilisation de l'outil algébrique pour étudier d'autres notions					X			
Branchement sur formule pour résoudre								
Production aidée dans un contexte familier pour résoudre	X	X					X	X
Production aidée dans un contexte non familier pour résoudre			X	X		X		
Utilisation de l'outil algébrique pour prouver			X	X				

Tableau n°3 : Calcul du taux de réussite pour les exercices de "mathématisation"

De même, nous mettons en évidence les différents types de traitement algébrique maîtrisés, c'est-à-dire, suffisamment disponibles .

III. DEUXIÈME NIVEAU DE DESCRIPTION : COHÉRENCES DE FONCTIONNEMENT

L'analyse transversale qualitative par rapport à chaque composante d'analyse doit permettre d'identifier, si c'est possible, des cohérences dans le fonctionnement des élèves.

C'est ce que nous allons essayer de faire dans ce paragraphe, composante par composante, en définissant des modalités de fonctionnement. Pour une même composante, une ou plusieurs modalités dominantes seront associées aux comportements observés de chaque élève.

III.1 MODALITÉS RELATIVES À LA COMPOSANTE *GESTION DU REGISTRE ALGÉBRIQUE*

Deux groupes de modalités sont introduites pour cette composante : les unes correspondent aux types d'écriture utilisés via les règles de formation et de conversion, les autres aux manipulations formelles via les règles de formation et de traitement.

III.1.1 Les types d'écritures

Rappelons d'abord dans les deux tableaux ci-dessous les règles de formation et de conversion que nous avons identifiées dans les trois classes de tâches. Le premier tableau concerne les tâches de "reconnaissance" et le deuxième , les tâches "techniques" et les tâches de "mathématisation".

Les règles de formation ne sont pas présentées "en vrac". Guidée par les analyses précédentes, nous avons essayé, dans ces deux tableaux, de regrouper transversalement des règles incorrectes voisines, pour mettre en évidence des similarités et des convergences éventuelles.

	T3	T4	T6	T15	T10	T11
Type de formation/ Type de conversion	Correct Sans () priorité au signe - Sans () priorité au carré () personnelle et priorité au - ^{2} duplication	Correct Point décimal Oral ^{2} duplication ^{2} glissement	Correct Sans () ^{2} duplication	Correct Lecture de gauche à droite Désassemblage	Correct Sans () factorisé Confusion X et + Assemblage partiel/final	Correct Sans () Lecture de gauche à droite Assemblage

Tableau n°4 : Tableau récapitulatif des valeurs des critères *type de formation* relativement aux tâches de "reconnaissance"

	T2	T5/T7	T16/T17	T12	T13	T19
Type de formation / type de conversion	Correct Sans () priorité au signe - Sans () priorité au carré () personnelle et priorité au - ^{n} glissement 2 duplication Désassembl. '.' coef 2 carré ^{n} duplication	Correct Sans () (5) ^{2}glissement Désassemblage Non commutatif Assemblage	Correct Sans () 17 Ec additive inc. Traduct fauss[t] congruente	Correct Ecriture glob et confusion + et X	Ecriture lin. globale () Sans () Ecriture lin. globale non parenthésée ^{2}glissement Assemblage	Ecriture lin. générique Ecriture lin. globale non parenthésée Ecriture abréviative

Tableau n°5 : Tableau récapitulatif des valeurs des critères *type de formation* relatives aux tâches "techniques" et de "mathématisation"

Des convergences apparaissent à la lecture transversale des deux tableaux :

- soit nous retrouvons les mêmes règles,

- soit nous voyons apparaître des règles, qui pour nous, remplissent des rôles analogues et peuvent être regroupées pour définir une même modalité de fonctionnement.

Nous définissons donc les modalités suivantes qui caractérisent certains types d'écritures reposant sur des règles de formation voisines :

• **Ecriture algébrique correcte** : les règles de formation utilisées sont correctes.

• **Ecriture algébrique dans un système "sans parenthèses"** : ce type d'écriture indique une méconnaissance du rôle des parenthèses. Plusieurs règles sont concernées selon les classes d'exercices :

Dans les tâches de "reconnaissance" :

- lecture de gauche à droite : les écritures algébriques sont "lues" de gauche à droite sans tenir compte des priorités opératoires

- sans () : les écritures algébriques parenthésées ou non parenthésées sont interprétées de façon analogue[1] (par exemple, -9^2 et $(-9)^2$) ont même valeur), ...

Dans les tâches de production :

- sans () : les écritures algébriques sont produites dans un système sans parenthèses (par exemple pour Lucie, les écritures algébriques $3+x \times x+y$ et $(3+x)\times(x+y)$ sont identiques),

- calcul de gauche à droite : les expressions sont calculées de gauche à droite (par exemple pour Caroline,

$P = u + \frac{n}{2} u$ avec $u = 150$ et $n = 6$ revient à faire le calcul (150+3).150).

Nous verrons dans le paragraphe suivant, que selon les cas, une écriture algébrique dans un système sans parenthèses peut être interprétée correctement ou non, ce qui nous amènera à affiner les modalités relatives à la manipulation formelle.

• **Ecriture algébrique associée au premier degré** : plusieurs règles de formation conduisent à réécrire des expressions algébriques et à les modifier en expressions du premier degré.

- désassemblage : $ab \longrightarrow a+b$

- carré duplication : $a^2 \longrightarrow a+a$

- ^{n} glissement : $a^n \longrightarrow na$, pour n entier naturel au moins égal à 2

- parfois, la confusion + et x.

---

[1]Les interprétations peuvent être différentes selon le contexte, selon les élèces, priorité au carré ou au signe - (cf tâche 3)

• **Ecriture algébrique en assemblage** : les deux règles de formation "assemblage final" ($a+b$—>ab) et "regroupement assemblage" a^n+a^p—>a^{n+p} jouent un rôle analogue : obtenir une seule expression qui ne conserve pas de signe opératoire.

Si l'analyse transversale des productions effectives d'un élève, pour l'ensemble des tâches diagnostic, révèle l'utilisation assez systématique de règles de formation voisines alors nous étiquetons son fonctionnement relatif aux types d'écriture par la ou les modalités correspondantes.

III.1.1 Les types de manipulation formelle.

Dans le chapitre 3, pour organiser et structurer notre analyse, nous avions déjà défini trois types de manipulation formelle en liaison avec les règles de formation et les règles de transformation des écritures algébriques.

Afin de réaliser une synthèse globale des types de manipulation formelle, nous rappelons dans le tableau ci-dessous, l'ensemble des règles de transformation identifiées dans les trois classes de tâches diagnostic. Comme pour les règles de formation/conversion, nous essayons de regrouper des règles incorrectes voisines pour faire apparaître des convergences, au moins celles déjà mises en évidence.

	T2	T5	T7	T9/T11/T17	T12/T13	T19
	Correct	Correct : techn niv 0 techn niv 1	Correct techn niv 0 techn niv 1	Correct	Correct	Correct
		Er calcul		Er calcul (17)		Er recopie Er calcul
Type de traitement	Calcul gauche à droite		Réd. multipli	Calcul gauche à droite (11)	Calcul ss () avec mémoire Calcul ss() ss memoire (13)	Calcul avec mémoire Calcul sans mémoire
	+ inc relatifs Pdt nb fract num/dén Pdt fract en croix	Er dévlt () et - - nn distribué				
	Fsse linéarité racine carrée Fsse linéarité puissance 2,3		Fsse linéarité du carré Simple produit	Fsse linéarité du carré Fsse linéarité de l'inverse	Fsse linéarité du carré (12) Simple produit (12)	
			Règle de transp mult. Règle inversion Comme pdt nul Produit constant	Règle transp multiplic.(17 Règle inversion (17	Règle transp multiplic.(13	Règle de trp multiplic Règle inversion Règle ordre nombre <0
			Règle différence vers 1^{er} degré Règle carré glissement vers 1^{er} degré			
			Réd. additive Règle de transp additive	Règle de transp additive		Règle de transp additive
		Regroupt non opératoire				

Tableau n°6 : Tableau récapitulatif des valeurs du critère *type de traitement* relatives aux tâches "techniques" et de "mathématisation"

Comme pour les règles de formation, à une lecture transversale de l'ensemble des tâches, nous voyons bien apparaître des convergences pour les règles de transformation : ce sont, soit les mêmes règles qui interviennent, soit des règles voisines que nous regroupons pour définir une même modalité.

Nous définissons donc les modalités suivantes qui caractérisent le degré d'opérationnalité de la manipulation formelle, l'opérationnalité reposant sur l'utilisation de règles de transformation voisines en liaison avec des règles de formation mobilisées de façon privilégiée :

• **Manipulation formelle opératoire de niveau 1 :** la manipulation formelle est correcte et correspond à la maîtrise technique attendue en Première G (décomposition correcte du calcul, reconnaissance et instanciation d'identités remarquables, ...).

• **Manipulation formelle opératoire de niveau 0** : la manipulation formelle est correcte mais n'atteint pas la maîtrise technique attendue en Première G, voire est réalisée à l'aveuglette.

• **Manipulation formelle opératoire incorrecte** : La manipulation formelle est incorrecte mais il semble que les rôles respectifs des signes opératoires + et x, de l'exposant 2 sont correctement identifiés dans les réécritures.

Dans ce cas, nous distinguons trois types de manipulation formelle, le troisième n'excluant pas les deux premiers :

- les réécritures sont réalisées dans un système non parenthésé mais gardent la mémoire du calcul, des priorités opératoires et conduisent à un calcul correct. Nous qualifions la manipulation formelle de **opératoire incorrecte avec mémoire.**

- les réécritures sont réalisées dans un système non parenthésé mais ne gardent pas la mémoire du calcul, des priorités opératoires et conduisent à un calcul incorrect. Nous qualifions la manipulation formelle de **opératoire incorrecte sans mémoire.**

- le rôle des parenthèses semble correctement identifié, mais de nombreuses règles de transformation incorrectes sont utilisées (règles de fausse linéarité, règle de transposition multiplicative, ...).

• **Manipulation formelle pseudo-opératoire** : le rôle de chacun des opérateurs *exposant 2*, x et + n'est pas stable et, régulièrement, l'opérateur *exposant 2* peut être associé à la duplication ou au glissement du nombre en position d'exposant vers un nombre en position de coefficient. Les écritures algébriques sont fréquemment associées à des écritures du 1^er^ degré. Des règles de transformation, s'appuyant sur de telles règles de formation, peuvent être utilisées. C'est le cas des règles suivantes : règle de transposition additive, règle différence vers 1^er^ degré, règle carré glissement vers 1^er^ degré, réduction additive, ...

• **Manipulation opératoire non opératoire** : le calcul algébrique ne tient compte ni des blocs de calcul, ni des opérations. Par exemple, les termes sont regroupés indépendamment des opérations en jeu.

En résumé, à chaque élève, par recoupement des valeurs des critères associées aux critères *type de formation* et *type de traitement*, nous associons la ou les modalités correspondant aux règles de formation et de traitement privilégiées.

III.2 DIAGRAMME DESCRIPTIF DE LA FLEXIBILITÉ ENTRE LE REGISTRE ALGÉBRIQUE ET D'AUTRES REGISTRES SÉMIOTIQUES

Pour rendre compte de la flexibilité des élèves à articuler différents registres sémiotiques et à changer de cadres, nous définissons a priori le diagramme théorique ci-dessous, diagramme descriptif des articulations entre registres mis en jeu dans l'ensemble des tâches diagnostic.

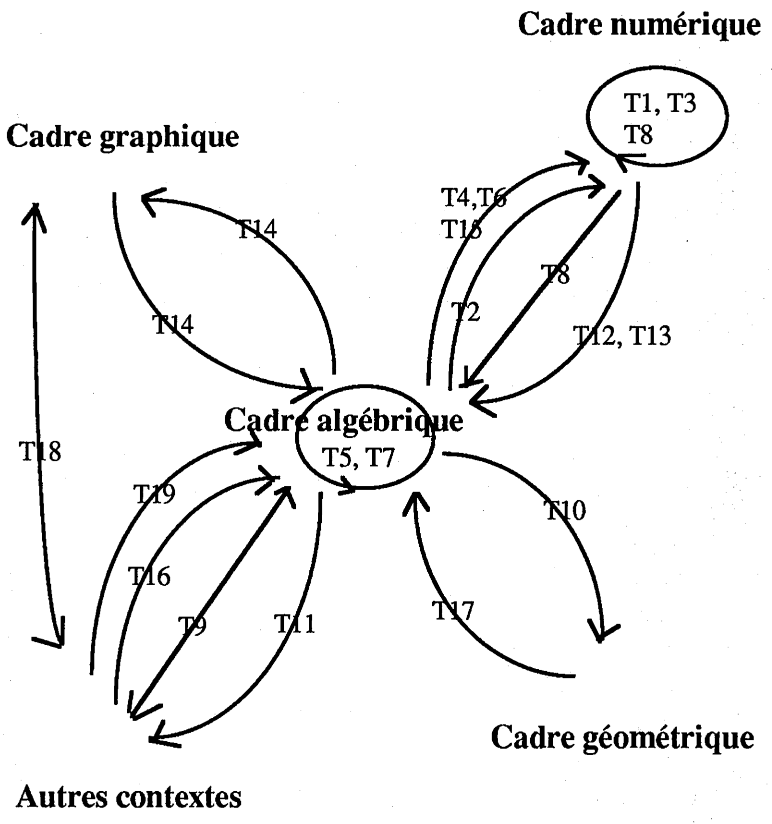


Fig 7 : Flexibilité

Sur chaque diagramme, nous avons indiqué les tâches qui permettent d'analyser l'effectivité d'une articulation entre registres et la correction ou non des règles de conversion utilisées. Une liaison fléchée donne le sens de l'articulation entre registres. Une "boucle" symbolise un cadre, ici cadre numérique ou cadre algébrique, et plus particulièrement, la gestion des registres d'écritures mis en jeu.

Nous utilisons les tâches T1, T2, T3 pour obtenir des informations sur la gestion des trois registres d'écritures numériques en jeu dans les tâches ainsi que sur l'opérationnalité du calcul numérique. La gestion des registres d'écritures numériques est interprétée comme correcte si l'exercice T1 est au moins réussi.

Nous avons déjà défini, dans le paragraphe précédent, les modalités de fonctionnement relatives aux types d'écritures et aux manipulations formelles. Nous symbolisons donc, sur le diagramme descriptif, le niveau de gestion du registre des écritures algébriques.

Nous utilisons les tâches T2, T4, T6, T15 pour étudier si les élèves utilisent des règles de conversion correctes lorsqu'ils substituent des nombres dans des expressions, que ce soit dans une tâche finalisée pour T2 ou lors de la recherche d'un contre-exemple pour les trois autres tâches. Il est bien évident qu'une réussite à ces trois dernières tâches ne résulte pas uniquement de ces connaissances.

Nous utilisons les tâches T9, T11, T12, T13, T16, T19 pour évaluer la correction des règles de conversion entre le registre du langage naturel et le registre algébrique.

La comparaison des règles de conversion incorrectes avec les règles de formation du registre algébrique donnent des informations intéressantes quant à la gestion des écritures algébriques : une écriture incorrecte ou abréviative qui garde la mémoire du calcul liée au contexte indique certes une compréhension de surface des expressions algébriques, à la fois syntaxique et sémantique, mais cet élément peut constituer un point d'appui.

En résumé, à chaque élève, nous associons un diagramme pour décrire sa flexibilité à articuler les registres mis en jeu : un trait gras (respectivement normal) indique une liaison effective correcte (respectivement fragile) entre deux registres, un trait en pointillés montre l'absence d'articulation entre deux registres. De même, les "boucles" indiquent le niveau de gestion du registre des écritures algébriques et du registre des écritures numériques.

III.3 MODALITÉS RELATIVES À LA COMPOSANTE *RAPPORT ARITHMÉTIQUE/ALGÈBRE*

Nous distinguons a priori trois modalités selon les valeurs respectives prises par les critères *démarche algébrique*, *statut des lettres*, *statut du signe d'égalité*, *statut des objets* dans les deux classes d'exercices de "mathématisation" et de "reconnaissance" :

Dém. de résolution	Statut des lettres	Statut du signe '='	Statut des objets	Modalités
Arithmétique	Etiquette Mesure	Annonce de résultat	Prodédural	Du côté de l'arithmétique
Algébrique	Lettre Nombre généralisé Inconnue	Annonce de résultat Rel d'équivalence plutôt formelle	Pseudo-structural	Du côté du formel scolaire
	Inconnue Nombre généralisé Variable	Annonce de résultat Rel d'équivalence	Procédural Structural (dual selon contexte	Du côté de l'algèbre

Tableau n°8 : Modalités relatives à la composante *rapport arithmétique/algèbre*

Précisons le sens de chacune des modalités :

• **Du côté de l'arithmétique :** l'activité algébrique est en continuité avec l'activité arithmétique.

• **Du côté du formel scolaire** : l'activité algébrique semble reposer sur une conception pseudo-structurale des objets de l'algèbre, au sens de A. Sfard (cf chapitre 2) : l'application de règles formelles semble être une des principales sources de signification. Dans ce cas, il semble que les élèves éprouvent des difficultés à désencapsuler les expressions algébriques pour leur associer des interprétations adaptées à la résolution d'un problème donné.

• **Du côté de l'algèbre** : il est possible d'associer au signe d'égalité, aux lettres, aux objets manipulés, un statut et des interprétations adaptés à divers contextes d'utilisation et à divers usages. L'activité réalisée semble du côté de l'algèbre.

En résumé, par recoupement des valeurs attribuées aux quatre critères de la composante *rapport arithmétique/algèbre*, nous pouvons ainsi associer à chaque élève la ou les modalités correspondant aux régularités de son comportement.

III.4 MODALITÉS POUR LA COMPOSANTE *FONCTION DE L'ALGÈBRE*

La composante d'analyse *fonction de l'algèbre* met en jeu un seul critère *fonction apparente de l'algèbre*. Dans l'analyse des tâches diagnostic présentée aux chapitres 3 et 4, nous avons défini différentes fonctions apparentes de l'algèbre mises en œuvre par les élèves. Rappelons d'abord, dans un tableau, l'ensemble de ces valeurs. Comme pour les composantes précédentes, nous regroupons les valeurs voisines de ce critère et alignons transversalement les valeurs communes.

T8	T11/T14	T12	T13	T16	T17	T19
Aucune	Aucune	Aucune	Aucune	Aucune	Aucune	Aucune
Nommer		Nommer	Nommer	Nommer	Nommer	Nommer
Ecrire une abréviation			Sténographier	Ecrire une abréviation	Ecrire une abréviation	Sténographier
	Substituer nb à lettre	Substituer nb à lettre	Substituer nb à lettre			Substituer nb à lettre
	Faire calcul formel					
Résoudre équ (proportion)	Résoudre équation				Résoudre équ. (type connu)	Résoudre équ
	Utiliser alg pour étudier notion math.					
Exprimer une relation ds contexte fam	Exprimer une relation	Exprimer une propriété ds cont non fam	Exprimer une propriété ds cont non fam	Exprimer une relation ds contexte non fam.		Exprimer une relation ds contexte fam
		Prouver ppté	Prouver ppté			
		Répondre au contrat	Répondre au contrat			Répondre au contrat

Tableau n°9 : Tableau récapitulatif des valeurs du critère *fonction apparente de l'algèbre*

Nous définissons, à partir du regroupement de certaines valeurs, des modalités correspondant à des fonctions attribuées par les élèves à l'algèbre. Ces modalités sont liées aux classes de tâches.

• **Aucune fonction pour l'algèbre** : dans ce cas, les élèves n'attribuent à l'algèbre aucun rôle. En particulier, dans des tâches de mathématisation, les élèves ne s'engagent pas dans une démarche algébrique et gardent des pratiques arithmétiques.

• **Fonction "pré-algébrique"** : les élèves veulent entrer dans le jeu symbolique mais leurs comportements laissent apparaître, soit un manque de compétences algébriques, soit la marque forte de pratiques numériques. C'est surtout dans la dimension outil que cette fonction pré-algébrique de l'algèbre est identifiable. Nous différencions trois cas qui peuvent apparaître selon le contexte :

- algèbre pour nommer : le travail algébrique de l'élève consiste à désigner des grandeurs par des étiquettes qui ne sont pas exploitées dans une résolution algébrique.

- algèbre pour écrire des abréviations, pour sténographier : la résolution d'une tâche conduit les élèves à une traduction abréviative des relations opératoires. Dans le cas d'une non congruence sémantique entre deux représentations, il n'y a pas reformulation de l'énoncé de façon opératoire (cf le prestidigitateur, chapitre 3). Dans ce cas, les élèves ne voient pas dans l'algèbre un outil de modélisation, de résolution voire de preuve. Il y a dichotomie entre le calcul algébrique dans sa dimension objet et dans sa dimension outil.

- algèbre pour substituer : les élèves considèrent les expressions algébriques comme des formules que l'on peut calculer en substituant aux lettres des valeurs numériques. Le rapport à l'algèbre passe par un rapport au numérique. Cette fonction apparente attribuée à l'algèbre nécessite déjà l'existence d'une articulation du cadre algébrique vers le cadre numérique. C'est surtout dans des exercices de mathématisation, dans le cas d'une interprétation ou d'une traduction incorrecte de la situation, que les élèves peuvent mettre en œuvre cette fonction attribuée à l'algèbre : ce changement de stratégie leur permet un repli sur le numérique (cf Virginie dans la résolution du "prestidigitateur", du "minitel" au chapitre 3).

• **Fonction "algébrique scolaire"** : les élèves semblent associer à l'algèbre un ou des rapports privilégiés liés à l'enseignement qui restent disponibles. Dans ce cas, il est possible que la fonction attribuée à l'algèbre soit mise en œuvre de façon inappropriée dans un contexte d'usage inhabituel, surtout lorsqu'un élève se sent obligé de donner une réponse. Indiquons des rapports privilégiés à l'algèbre mis en évidence dans l'analyse mais qui étaient apparus dans d'autres recherches [Chevallard, 1985]

Du côté objet :

- algèbre pour faire du calcul formel : dans ce cas, le rapport privilégié à l'algèbre est un rapport au calcul formel. Les expressions algébriques sont liées à un rapport de calcul dans des exercices mettant en jeu la reproduction de tâches algébriques non finalisées. Certains élèves peuvent alors être amenés à faire du calcul formel de façon non appropriée dans un contexte inhabituel (Cédric dans la tâche T11, cf chapitre 4).

- algèbre pour se ramener à résoudre des équations : ici, le rapport à l'algèbre est un rapport aux équations. Ce rapport peut conduire des élèves à ramener la résolution d'un problème à celle d'une équation connue, que cette stratégie soit appropriée ou non.

Du côté outil :

- algèbre pour se brancher sur des formules connues dans des contextes familiers : le rapport à l'algèbre s'exprime à travers un rapport aux formules. Les savoir-faire de base algébriques sont disponibles et mobilisés correctement pour résoudre des tâches stéréotypées, bien spécifiées, dans des contextes familiers.

- algèbre pour répondre au contrat : par manque de compétences mais par obligation de répondre, l'élève donne une solution algébrique inappropriée, par exemple en recopiant un modèle sans comprendre (Virginie dans le prestidigitateur, cf chapitre 3), en "recopiant algébriquement l'énoncé" (Pascal dans le prestidigitateur, cf chapitre 3), ...

• **Fonction "algébrique"** : ce sont toutes les fonctions que l'on peut attribuer à l'algèbre et qui doivent être disponibles pour résoudre de façon adaptée les différents types de tâches algébriques. Ces fonctions indiquent une entrée significative dans la pensée algébrique. Citons ces différentes fonctions de l'algèbre :

du côté objet :

- algèbre pour faire du calcul formel, dans des exercices mettant en jeu la reproduction de tâches formelles non finalisées de niveau 2,

du côté outil :

- algèbre pour interpréter des expressions dans des contextes divers ou dans l'articulation entre deux cadres et en faire des usages variés
- algèbre pour étudier d'autres notions mathématiques,
- algèbre pour produire des expressions, pour mettre en équation des situations dans des contextes familiers ou non, dans des situations intra ou extra-mathématique puis pour résoudre de façon adaptée,
- algèbre pour généraliser et pour prouver.

Ces diverses fonctions apparentes de l'algèbre et les modalités correspondantes sont à mettre en relation avec la rationalité algébrique.

En résumé, pour chaque élève, par recoupement des valeurs du critère *fonction apparente de l'algèbre*, nous pointons la ou les modalités correspondant à la ou aux fonctions apparentes de l'algèbre privilégiées dans les tâches.

III.5 MODALITÉS POUR LA COMPOSANTE *RATIONALITÉ MATHÉMATIQUE*

En dernier lieu, nous décrivons des traits caractéristiques de la rationalité des élèves dans le cadre algébrique. Les types de preuve et les moyens techniques privilégiés pour produire une justification permettent d'en cerner les grandes lignes.

Nous procédons comme pour les autres composantes, mais nous ne relevons ici que les valeurs globales des critères *type de preuve* et *type de justification*. Par regroupement de valeurs voisines indiquant des comportements rationnels proches, nous définissons les modalités suivantes :

• **Rationalité pré-scientifique** : les justifications utilisées restent du côté de la rationalité quotidienne. Elles reposent plus sur des contraintes de pertinence que sur des contraintes de validité. Le calcul algébrique reste en dehors du champ des moyens techniques de justification. Les preuves restent au niveau des preuves pragmatiques.

Les types de justification ci-dessous nous semblent relever d'une rationalité pré-scientifique :
- argumentation
- justification par appel au contenu sémantique
- justification par appel au contexte
- justification par des exemples
- justification par appel au numérique, à la calculatrice

• **Rationalité algébrique scolaire** : des procédés externes au langage algébrique semblent le plus souvent utilisés comme moyens de justification. Les justifications reposent souvent sur l'application de procédures, de règles énoncées ou de règles formelles. La justification peut se poser aussi en termes de droit, d'erreur.

Les types de justification suivants peuvent indiquer une rationalité algébrique scolaire :
- justification par appel à des règles au niveau de la forme
- justification d'ordre légal
- justification par appel à des procédures, à des règles
- justification par application de schéma-type de résolution

• **Rationalité algébrique scientifique** : toutes les justifications qui mettent en jeu des raisonnements mathématiques, des inférences logiques, l'utilisation de l'outil algébrique pour prouver, rendent compte d'une rationalité algébrique "scientifique".

Les types de justification suivants permettent une rationalité algébrique scientifique :
- justification par appel à des propriétés générales.
- justification par appel à des raisonnements, par élimination, ...
- réécriture : nous incorporons le type de justification "réécriture", même si les compétences algébriques de l'élève sont insuffisantes, lorsqu'il intervient dans un raisonnement logique ; ce type de justification indique une rationalité scientifique gênée par une absence de compétence algébrique.
- justification par appel au calcul algébrique
- justification par appel à des inférences logiques (contre-exemple)
- justification par appel aux fonctions.

En résumé, après analyse des productions effectives pour l'ensemble des tâches, par recoupement des valeurs des critères *type de preuve* et *type de justification*, nous pointons la ou les modalités correspondant à la rationalité algébrique de chaque élève.

IV. PROFIL DE L'ÉLÈVE : ÉTUDE DE CAS

IV.1 DÉFINITION

Nous appelons "profil de l'élève" relatif à l'algèbre élémentaire une description des principaux traits de son comportement qui donnent un modèle intelligible du fonctionnement et du rapport personnel de l'élève à l'algèbre.

La description choisie est constituée :

- des deux indicateurs "grossiers" de la compétence algébrique de l'élève dans ses dimensions objet et outil complétés par les types de traitement algébrique maîtrisés ;

- des modalités relatives aux cinq composantes de caractérisation qui décrivent, dans les grandes lignes, des cohérences locales ou globales.

Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des modalités de fonctionnement relatives aux cinq composantes de caractérisation.

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
Indicateurs et types de traitement alg. maîtrisés			Traitement algébrique

Du côté de l'arithmétique Du côté du formel scolaire Du côté de l'algèbre	Du côté du formel scolaire Du côté de l'algèbre	Rapport arithmétique/algèbre

types de manipulation formelle	**Types d'écriture**	
- opératoire de niveau 1 - opératoire de niveau 0 - opératoire incorrect avec mémoire sans mémoire règles incorrectes - pseudo opératoire - non opératoire	- correcte - sans () - associée à 1er degré - en assemblage	Gestion dans le registre algébrique

• <u>Aucune fonction</u> • <u>Fonction pré-algébrique *(du côté outil)*</u> - algèbre pour nommer - algèbre pour abrévier - algèbre pour substituer • <u>Fonction algébrique-scolaire</u> - algèbre pour faire du calcul formel *(objet)* - algèbre pour se ramener à résoudre des équations *(objet)* - algèbre pour appliquer schémas calcul ou formules*(outil* - algèbre pour répondre au contrat*(outil)* • <u>Fonction algébrique</u> - algèbre pour faire du calcul algébrique au niveau 2 *(objet* - algèbre pour étudier d'autres notions math *(outil)* - pour produire et résoudre avec aide dans cont. fam.*(outil* - pour produire et résoudre dans cont. non fam.*(outil)* - algèbre pour généraliser et pour prouver *(outil)*	Fonction de l'algèbre

• <u>Rationalité pré-scientifique</u> - argumentation - appel au contexte - appel aux exemples, au numérique • <u>Rationalité scolaire</u> - appel à des règles au niveau de la forme - appel à des procédures - appel au légal • <u>Rationalité scientifique</u> - appel à raisonnement déductif - appel à des propriétés générales - réécriture - appel au calcul algébrique - appel à inférences logiques - appel aux fonctions	Rationalité algébrique

Tableau n° 10 : Profil de l'élève

IV.2 ETUDE DE CAS

Préalablement aux études de cas, nous avons calculé le taux moyen de réussite aux exercices "techniques" et de "mathématisation" sur les vingt-quatre élèves de la classe de Première G.

Taux moyen de réussite aux exercices "techniques" : 59%

Taux moyen de réussite aux exercices de "mathématisation" : 32%

Nous définissons maintenant les profils des sept élèves venant de BEP en analysant transversalement les dix-neuf uplets caractérisant leurs productions.

IV.2.1 Le profil de Caroline

IV.2.1.1 Définition du profil

Caroline a réussi un seul des dix exercices "techniques" et un seul des sept exercices de "mathématisation". Ses résultats sont faibles par rapport aux résultats moyens de la classe. Ses compétences algébriques sont faibles à la fois dans les dimensions objet et outil.

Recherchons, composante par composante, des éléments explicatifs à cette faible compétence algébrique. Pour cette élève, il nous semble intéressant de commencer l'analyse du côté objet :

• *Composante gestion du registre algébrique*

La manipulation formelle de Caroline est pseudo-opératoire car elle repose essentiellement sur trois modalités d'écritures : des écritures algébriques sans parenthèses, associées au 1er degré, voire en assemblage. Caroline semble confondre la multiplication avec l'addition. Nous en donnons ici quatre exemples représentatifs :

Dans la tâche T4, Caroline affirme que les égalités $a^2 = a+a$, $a^2 = 2a$ sont vraies et que $a^2 = a\times a$ est fausse (dans la tâche T3, elle affirmait déjà que $-9^2 = -9+-9$).

Dans la tâche 10, elle associe l'aire du rectangle donné à l'expression $3a\times 3b\times a^2\times ba$.

Dans la tâche T15, Caroline justifie que l'égalité $ab = a+b$ est fausse par l'argument suivant : "sinon $ab = a\times b$" !

Dans la tâche T5, elle développe $(a-b)(b-2)$ en réalisant la suite de calculs :
$ab-\underline{2a}-b^2\underline{+2b}$ (c'est elle qui souligne) soit $ab-4ab-b^2$

• *Articulation entre le registre algébrique et les autres registres*

Qu'en est-il de la flexibilité de Caroline à articuler le registre algébrique avec d'autres registres ? Elle sait associer une expression algébrique et le résultat d'un enchaînement opératoire exprimé en langage naturel, dans un exercice fermé. Mais elle ne réussit pas à exploiter les règles de conversion entre le registre du langage naturel et le registre algébrique, ni pour traduire une expression algébrique en un enchaînement de calcul, ni pour traduire algébriquement un énoncé. Elle n'appréhende pas le rôle de l'algèbre pour traduire des propriétés numériques et des relations (écriture abréviative, faussement congruente, ...). De même, les règles de conversion entre les autres registres en jeu dans les tâches ne sont pas disponibles voire incorrectes.

Plus particulièrement, Caroline semble très mal à l'aise dans le cadre numérique. La confusion qu'elle fait entre la multiplication et l'addition en est une illustration et peut constituer un obstacle important. Illustrons-le avec la tâche 2 :

$P = u + \frac{n}{2}u$ avec $u = 150$ et $n = 6$

$P = 150 + \frac{6}{2} \times 150$; $P = 150+3\times150$; $P = 153\times150$; $P = 22950$

$V = (t^2 + 7x)^2$ avec $t = 3$ et $x = 2$

$V = (-3\times-3) + (7\times2)\times3$; $V = (9+14)\times3$; $V = 23\times3$; $V = 69$

En résumé, les articulations entre les cadres algébrique et numérique, les registres des écritures algébriques et des représentations graphiques, les cadres algébrique et géométrique et les cadres algébrique et fonctionnel ne sont pas disponibles.

• *Fonction apparente de l'algèbre et rationalité algébrique*

Caroline s'est construit des règles de formation et transformation incorrectes. Mais elle a confiance dans l'écriture formelle. Elle accepte de rentrer dans le jeu formel scolaire. Elle utilise l'algèbre dans des contextes algorithmiques et familiers, en particulier, pour se ramener à résoudre un type d'équation connu (dans T8, partage proportionnel), voire pour réécrire des expressions afin de justifier une proposition fausse.

Par exemple, pour justifier que l'égalité $4x^2 + 3x^3 = 7x^5$ est fausse Caroline écrit :
"car $(4x+4x) + (3x+3x+3x) = 8x+9x$"

Cette confiance en l'algèbre constitue un point d'appui important et jouera un rôle important dans son adaptation.

Tous ces éléments semblent accréditer chez Caroline une rationalité algébrique scolaire. Les moyens techniques de justification utilisés dans le cadre algébrique le confirment : ils reposent sur l'utilisation, soit de règles opératoires, soit de règles au niveau de la forme, par exemple, "car un chiffre entre parenthèse est multiplié", soit de règles au niveau légal, par exemple, "car le chiffre doit être toujours avant la lettre".

Mais Caroline montre aussi par moments une rationalité pré-algébrique : dans des exercices de mathématisation non familiers, la résolution ou la preuve passent par l'exemple et le numérique.

• *Rapport arithmétique/algèbre*

Caroline se replie sur une démarche arithmétique quand elle ne sait pas faire autrement : mais son activité algébrique ne semble pas en continuité avec son activité arithmétique, vu ses difficultés à travailler dans le numérique. Sa conception des expressions semble plus se rapprocher d'une conception pseudo-structurale au sens de Sfard : ce sont les transformations formelles voire les réécritures qui sont sources de signification.

En résumé, nous obtenons le profil suivant pour Caroline :

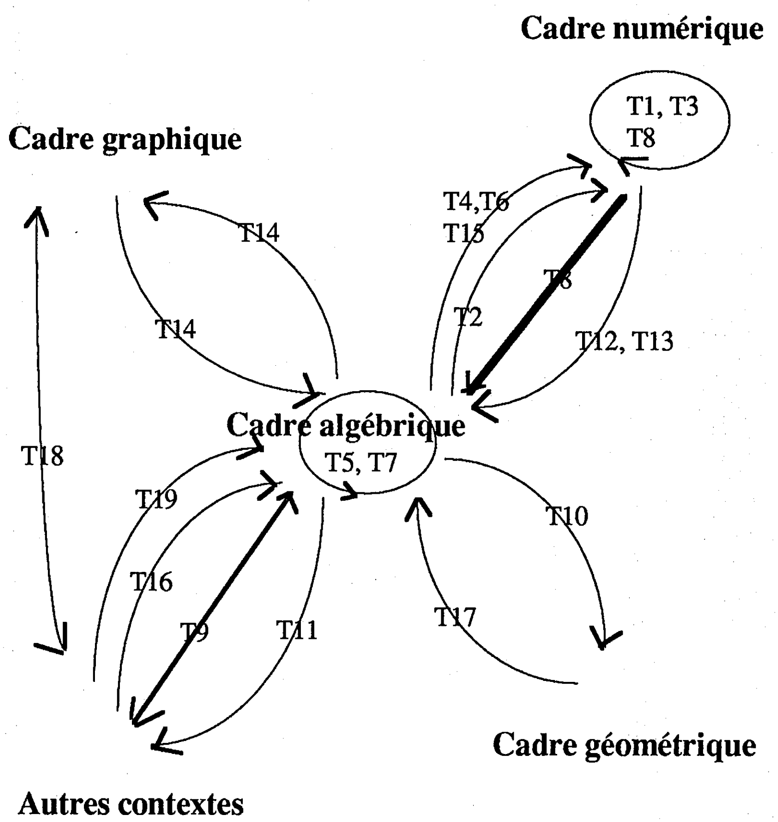
					Exercices techniques			Exercices de mathématisation		
Caroline	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
type de traitement : Reproduction de tâche numérique	NT	I I I					C			I
Reproduct. de tâches form. n1		I I I	I	C I I NT I						
Reproduct. de tâches form. n2				NT						
Interprétation					C	NT	C	I	NT	I
Etude autres notions										
Branc[t] formule										
Production aidée					C					N
Production						NT	NT	I		
Preuve						NT	NT			
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche de résolution					Alg		Arithm			
Statut du signe d'égalité					Équiv		An Résul	Lettres		
Statut des lettres					Inc			Lettres		
Statut des objets							Proc.			
Gestion dans registre algébrique										
Type de formation		lin V (n) calc gd[illegible]	non comm Assemb		Eq. rapp.					
Type de traitement		ss() pr ss() pr[illegible] [illegible]	:							
Articulation entre registre algébrique et d'autres regitres										
Type conversion							pas à pas separé.	Fausse congr		pas à pas separé [illegible]
Fonction de l'algèbre										
Fonction apparente					Résoudre éq dans cont fin		Aucune			Aucune
Rationalité algébrique										
Type de preuve							Progm			
Type de justification					Appel à schéma de calcul		Appel à numérique			Contexte. Appel au numérique

Tableau 11 : Analyse des productions de Caroline

Caroline	T3	T4	T6	T9	T10	T11	T14	T15	T18
traitement algébrique									
type de traitement : Reproduction de tâche numérique		N . N . .	. N . N . . N					N N N N	
Reproduct. de tâches form. n1									
Reproduct. de tâches form. n2									
Interprétation	I C C C	I I C I C	C C I C I CC	NT C C C C NTC	I	NT	I I I	C C I C	I
Etude autres notions					N		N N N		
Brancᵗ formule									
Production aidée									
Production									
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité		équiv	équiv						
Statut des lettres		nombre lettres	nombre lettres	Nombres				nombres étiquettes	
Statut des objets		procéd., structural	[illegible] structural						
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	2 dupl.	2 dupl of +, x	ss () N dupl					of +, x Et gd ss ()	
Type de traitement									
Articulation entre le rgistre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion					of +/x	Ttes valeurs incorrectes			angles incorrects
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente			pour justif.						
Rationalité algébrique									
Type de preuve									
Type de justification	Réécriture Règle, op	Réécriture Règle au niv forme	Réécriture Règle au niv. forme				Arg. fausse of +x Règle niv forme		

Tableau 12 : Analyse des productions de Caroline

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
10%	14% Product. guidée ds contexte familier et résolution		Traitement algébrique
	Du côté de l'arithmétique Du côté du formel scolaire	Du côté du formel scolaire	Rapport arithmétique/algèbre
Ecritures sans () associées à 1er degré en assemblage	Manipulation formelle sans mémoire pseudo-opératoire		Gestion dans le registre algébrique
	Fonction scolaire pour se ramener à résoudre une équation familière		Fonction de l'algèbre
	Rationalité pré-algébrique ou scolaire : Appel à exemples (T13) Appel à démarche algébrique familière	Rationalité pré-algébrique ou scolaire : Appel au numérique (T19) Appel à règles au niveau op. et de la forme Réécriture	Rationalité algébrique



Profil de Caroline

IV.2.1.2 Mise en relation avec le cours en BEP

Nous sommes frappée par les analogies entre le fonctionnement de Caroline et l'enseignement qu'elle a reçu en BEP. Nous en donnons ici quatre éléments :

Dans la dimension objet :

- Caroline est tentée de se ramener à des expressions du premier degré, mais en BEP, elle n'a manipulé que des expressions du premier degré.
- Caroline semble avoir confiance dans le symbolisme algébrique et raisonne en réécrivant des expressions algébriques dans un système de représentation incorrect. Or en BEP, dans le cadre algébrique, le travail de transformation a essentiellement porté sur les écritures.

Dans la dimension outil :

- Caroline sait mettre en œuvre des savoir-faire algorithmiques dans une situation stéréotypée bien connue, une situation de partage proportionnel, rencontrée en BEP où elle peut se ramener à résoudre une équation-proportion.
- En revanche, toute situation de mise en équation non familière l'a laisse démunie : elle n'a jamais été confrontée en BEP à la traduction algébrique d'une situation extra-mathématique.

Le test d'évaluation à l'entrée en Première G permet donc de montrer certaines similarités entre le rapport personnel de Caroline à l'algèbre et le rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu dans sa classe de BEP.

IV.2.2 Le profil d'Alice

Alice a réussi cinq exercices "techniques" sur dix et deux des sept exercices de "mathématisation". Alice sait reproduire des tâches formelles non finalisées de niveau 1 mais ses compétences algébriques dans la dimension objet semble quand même bien fragiles. Alice sait traduire algébriquement une relation en reformulant la relation de façon opératoire dans un contexte fermé. Elle n'utilise pas l'outil algébrique quand une autre démarche est possible et l'outil algébrique semble donc peu disponible.

Etudions composante par composante les traits caractéristiques de son fonctionnement en algèbre en commençant par le côté objet.

• *Composante gestion du registre algébrique*

La manipulation formelle d'Alice est opératoire avec une technique de niveau 0 mettant en jeu quelques règles fausses. Globalement, le type d'écriture algébrique utilisé est correct. Alice interprète correctement les écritures non parenthésées mais, elle n'identifie pas toujours correctement le rôle des parenthèses dans les écritures parenthésées. La tâche T15 montre bien les contradictions rencontrées :

elle écrit dans la tâche T15 "b-2xc = (b-2)c vrai mais pas à la calculatrice, car on fait d'abord la multiplication".

Pour Alice, les parenthèses ont un rôle à jouer lié aux priorités opératoires mais leur rôle ne semble pas toujours correctement identifié comme le montre la tâche T3 ("les parenthèses préservent le signe -'). En particulier, -3^2et $(-3)^2$ n'ont pas la même valeur : $(-3)^2 = -9$ et $-3^2 = 9$.

Alice semble peu à l'aise avec les écritures algébriques et ses productions indiquent un manque de familiarité et d'automatismes. Illustrons sa faible assurance à gérer le registre des écritures algébriques : dans la tâche T7.q3, Alice factorise bien l'expression $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ puis entoure la réponse $(x+2)+(x-4)$.

Quelle signification peut-elle accorder à l'écriture algébrique ?

• *Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres*

Alice connaît les règles de conversion entre le registre du langage algébrique et le registre des écritures algébriques et sait les appliquer dans des exercices fermés (T9, T16). Mais ces connaissances ne sont pas disponibles dans la résolution de problèmes de "mathématisation".

Alice semble avoir besoin de l'intermédiaire du langage naturel : on le constate dans les justifications données aux tâches T4, T6 et T15.

Les articulations entre les cadres algébrique et géométrique, entre le registre des écritures algébriques et le registre des représentations graphiques ne sont pas disponibles.

• *Fonction apparente de l'algèbre et rationalité algébrique*

Alice mobilise l'outil algébrique quand on lui demande explicitement de traduire algébriquement une relation. Elle a montré qu'elle sait reformuler une relation pour la traduire algébriquement. Mais globalement, l'outil algébrique n'est pas disponible. Alice ne semble pas avoir confiance dans le symbolisme algébrique et conserve une rationalité pré-algébrique. Dans la tâche T8, elle conserve des pratiques arithmétiques en utilisant une même étiquette pour désigner les sommes reçues par les deux enfants. Ici, l'algèbre sert à nommer.

Quant il s'agit de justifier des propriétés internes au cadre algébrique, Alice met en jeu une rationalité scolaire : des règles opératoires, des règles au niveau de la forme, par exemple, "car les parenthèses gardent le - de (-9)", des règles au niveau du légal, par exemple, "car on doit multiplier les exposants".

Dans une tâche de mathématisation, Alice montre qu'elle raisonne mais elle n'arrive pas à utiliser l'outil algébrique pour prouver. En effet dans les tâches T12 et T13, elle différencie très bien preuve pragmatique et preuve intellectuelle. Après avoir conjecturé le résultat à l'aide d'exemples, elle écrit pour T12 : "je constate que le résultat est "apparemment" toujours 1. C'est logique mais je ne sais pas l'expliquer". De même, la tâche T13 reste inachevée : "parce que". C'est un point important sur lequel, il peut être possible de s'appuyer : Alice sait qu'une preuve nécessite une généralisation. Elle n'y arrive pas, soit par manque de confiance en l'outil algébrique, soit par manque de compétences algébriques (ici, traduction d'un enchaînement opératoire, expression générique de deux entiers consécutifs).

• *Rapport arithmétique/algèbre*

Quand elle ne sait pas résoudre un exercice dans le cadre algébrique, Alice revient au numérique. Mais elle semble bien distinguer les discontinuités entre arithmétique et algèbre : les deux statuts attribués au signe d'égalité, dans les calculs et dans la résolution d'équation par exemple, les divers statuts des lettres sont clairement différenciés.

Alice montre une exigence intellectuelle sur laquelle il sera intéressant de s'appuyer, à condition de lui permettre de consolider sa confiance dans le langage et dans l'outil algébrique. En conséquence, nous obtenons le profil suivant pour Alice :

Exercices techniques | Exercices de mathématisation

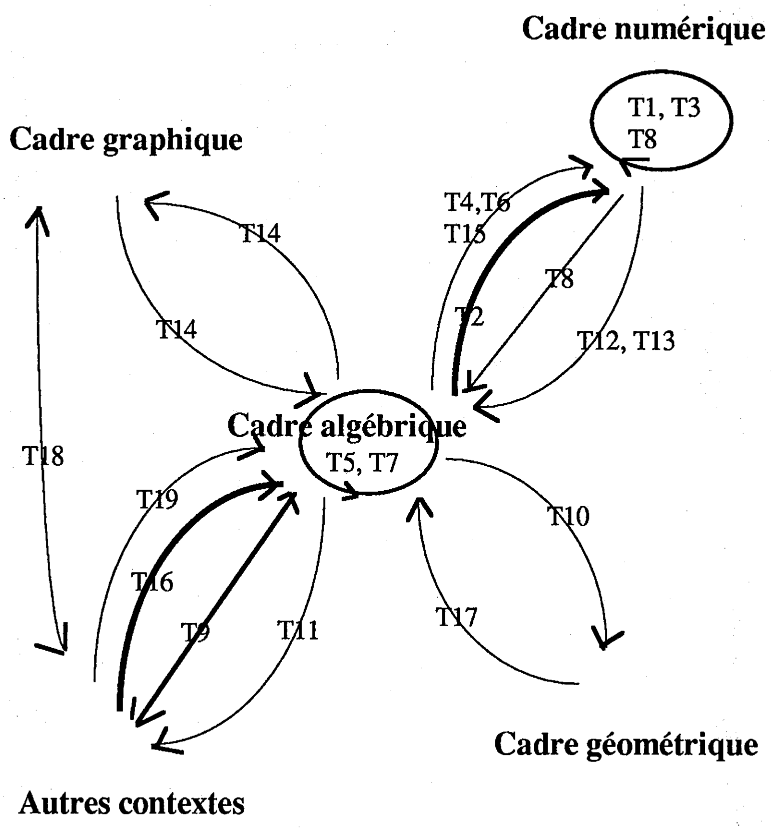
Alice	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
type de traitement : Reproduction de tâche numérique	C				C	C	C			I
Reproduct. de tâches form. n1		I C I	I	CCCCI						
Reproduct. de tâches form. n2				I						
Interprétation						C	C	C	NT	I
Etude autres notions										
Branc[t] formule										
Production aidée									NT	N
Production								C		
Preuve						N	N			
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche de résolution					Arithm	Arithm	Arithm			Arithm.
Statut du signe d'égalité					An. Result	An. Result	An. Result	Equiv.		An. Result
Statut des lettres					Etiquette Nombre			indéterm.		
Statut des objets					Proc.	Proc	Proc			Proc.
Gestion dans registre algébrique										
Type de formation	Correct	.	Correct	désassemb						
Type de traitement			-+-=+	pb est (5) ss [illegible] (6)	x ray[illegible]					Raccourci inc. par division
Articulation entre registre algébrique et d'autres regitres										
Type conversion	Correct	ss( ) or 2 avec [illegible] inc [illegible]				linéaire globale	Pas à pas séparé	Correct		Abréviation séparée.
Fonction de l'algèbre										
Fonction apparente					Nommer	Aucune	Aucune	produire relation		Aucune
Rationalité algébrique										
Type de preuve						Pragm		Pragm.		
Type de justification					Appel au [illegible]	Appel à sens Ne sait pas expliquer		Appel à [illegible] Ne sait pas justifier		Appel au [illegible] au contexte

Tableau 13: Analyse des productions de Alice

Alice	T 3	T 4	T 6	T 9	T 10	T 11	T 14	T 15	T 18
traitement algébrique									
type de traitement : Reproduction de tâche numérique		NNN							
Reproduct. de tâches form. n1									
Reproduct. de tâches form. n2									
Interprétation	IIII	CCCCC	CCCCCCC	CCCCIC	NT	NT	CII	CCIC	NT
Etude autres notions							N		
Branc^t formule et résolution									
Production aidée et résolution									
Production et résolution									
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité		Equiv Ann. result	Equiv Ann. rés.	Equiv Ann. result				Equiv	
Statut des lettres		Nombre	Nombre	Nombre				Nombre	
Statut des objets		proc.	proc. struct	proc. struct.				proc. struct.	
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	() pas pr.	correct	Correct					3S ()	
Type de traitement				f. lin inv					
Articulation entre le rgistre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion							1) sans ind. inc. 3) [illegible] inc.		
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente									
Rationalité algébrique									
Type de preuve									
Type de justification	Règle au niv. forme	Règles au niv. op.	Règles au niv. op. Légal. expression					Appel à calc. Règles au niv. forme niv. op.	

Tableau 14 : Analyse des productions de Alice

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
50% Reproduction de tâches formelles non finalisées de niveau 1	28% Traduire algébriquement une relation dans contexte fermé		Traitement algébrique
	Du côté de l'arithmétique	Du côté du formel scolaire	Rapport arithmétique/algèbre
Correct et ss () 1 résultat en désassemblage	Manipulation formelle Opératoire de niveau 0 parfois incorrecte		Gestion dans le registre algébrique
	Aucune ou fonction pré-algébrique dans contexte ouvert Pour nommer Fonction algébrique dans contexte fermé Pour traduire alg relation		Fonction de l'algèbre
	Rationalité pré-algébrique Preuve pragmatique reconnue insuffisante Appel au numérique, au contexte	Rationalité scolaire Appel à règles : au niveau opératoire au niveau de la forme au niveau légal	Rationalité algébrique



Profil d'Alice

IV.2.3 Le profil de Mérième

IV.2.3.1 Définition du profil

Mérième a réussi quatre exercices "techniques" sur dix, dont la tâche T5, et trois des sept exercices utilisant la dimension outil de l'algèbre. Mérième sait reproduire des tâches formelles non finalisées de niveau 1 et sait traduire algébriquement une relation après l'avoir reformulée. On remarque aussi qu'elle utilise l'outil algébrique pour déterminer une équation de droite et donc pour étudier d'autres notions mathématiques.

Les compétences algébriques de Mérième dans les dimensions objet et outil semblent fragiles. Mais, nous pensons déjà que certains éléments peuvent servir de points d'appui pour induire une progression rapide de Mérième.

Examinons composante par composante, les formes de connaissances algébriques construites par Mérième et les fonctions qu'elle attribue à l'algèbre. Nous commençons du côté objet.

• *Gestion dans le registre algébrique*

Le type d'écriture algébrique utilisé par Mérième est correct. Sa manipulation formelle est opératoire de niveau 0. Elle développe les identités remarquables sans les appliquer directement mais cela semble lui servir de moyen de contrôle. Pendant le test, elle confond développement et factorisation. Mérième développe alors toutes les expressions factorisées rencontrées, ce qui la mène à des impasses, en particulier pour résoudre un produit de facteurs nul. Ici, sa manipulation formelle privilégie la composante syntaxique et ne met aucunement en jeu de connaissances stratégiques.

• *Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres*

Comme Alice, Mérième utilise correctement les règles de conversion entre le registre du langage naturel et le registre des écritures algébriques dans des exercices fermés (T9, T16). Mais ces connaissances ne sont pas disponibles pour traduire algébriquement une situation dans un problème de "mathématisation".

Mérième sait passer d'une écriture numérique à une autre et semble à l'aise dans le cadre numérique. En revanche, elle éprouve des difficultés avec les écritures parenthésées pour passer du registre des écritures algébriques à celui des écritures numériques. Elle semble travailler alors dans un système "sans parenthèses", le carré étant toujours prioritaire par rapport à l'opérateur unaire '-':-9^2 vaut *81*.

Mérième possède un point d'appui très important qui la distingue de ces camarades : elle sait associer équations de droite et représentations graphiques même si l'association passe par le calcul algébrique et reste encore maladroite. Connaissant la forme générale $y=ax+b$ de l'équation réduite d'une droite passant par deux points donnés, les coordonnées de ces deux points, Mérième sait calculer le coefficient directeur et déterminer la valeur de l'ordonnée à l'origine (méthode 2, cf chapitre 2).

En revanche, dans cet exercice, elle a du mal à associer variables visuelles du tracé et coefficients, c'est-à-dire, à articuler registre des équations de droite et registre des représentations graphiques. Ce n'est plus le cas pour la tâche T18 : Mérième montre que dans un exercice concret, elle sait lire les variables visuelles d'un tracé et les associer aux données du problème.

• *Fonction apparente de l'algèbre et rationalité algébrique*

Mérième a confiance en l'outil algébrique et l'utilise pour étudier d'autres notions mathématiques, ici, pour rechercher l'équation réduite d'une droite donnée.

La capacité de Mérième à utiliser le type de traitement adapté à la résolution du problème dépend du contexte de l'exercice, mais Mérième montre une certaine adaptabilité qui, semble-t-il, peut lui permettre de rentrer dans la pensée algébrique.

Pour les exercices de mathématisation, Mérième reste du côté d'une rationalité pré-algébrique : preuves pragmatiques, appel au numérique. Les justifications données pour les tâches de reconnaissance, en particulier pour les tâches 14 et 18, semblent indiquer au contraire que Mérième est du côté d'une rationalité scolaire/scientifique : règles au niveau opératoire (T4, T6), raisonnement déductif s'appuyant sur des connaissances et outils mathématiques des cadres concernés (T18), calcul algébrique pour déterminer l'équation réduite d'une droite (T14). Les productions écrites de Mérième laissent entrevoir une activité exigeante et retenue : quand Mérième ne sait pas, elle préfère ne pas donner de réponses.

En résumé, le fonctionnement de Mérième montre plusieurs points d'appui sur lesquels on peut jouer pour faire évoluer ses connaissances (au moins trois types de traitement algébrique maîtrisés, une manipulation formelle opératoire, articulation entre le registre des écritures algébriques et au moins trois registres (numérique, langage naturel, représentations graphiques), raisonnement déductif et justifications du côté de la rationalité scientifique).

En résumé, nous obtenons le profil suivant pour Mérième :

Exercices techniques | Exercices de mathématisation

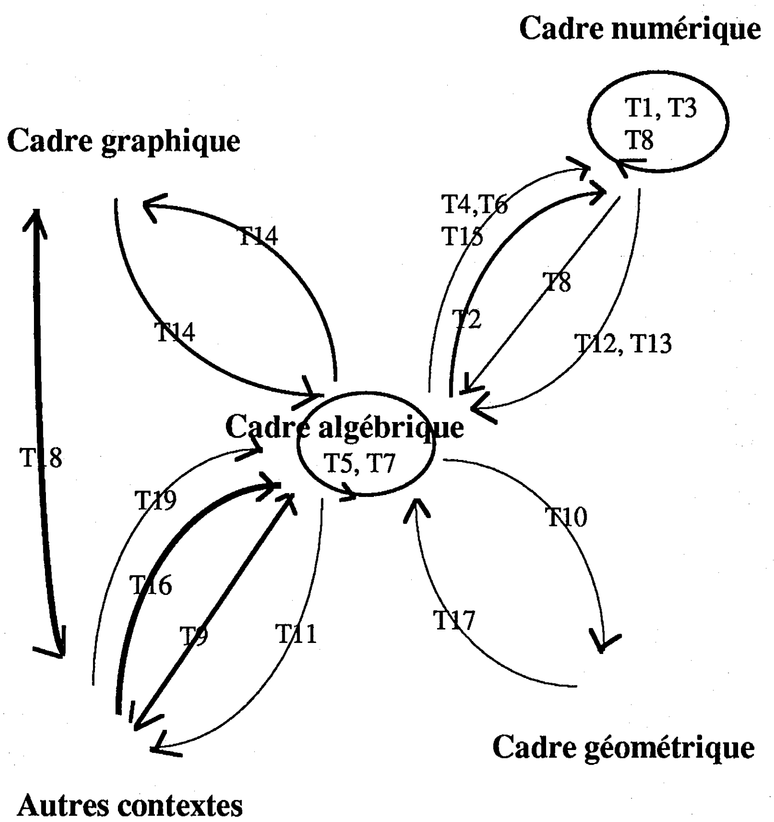
Mérième	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
type de traitement : Reproduction de tâche numérique	C				C	C	C			
Reproduct. de tâches form. n1		I C I	C	C I C I NT						
Reproduct. de tâches form. n2				I						
Interprétation						C	C	C	NT	
Etude autres notions										
Branc[t] formule et résolution										
Production aidée et résolution									NT	NT
Production et résolution						N	N			
Preuve						N	N			
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche de résolution						arithm				
Statut du signe d'égalité						Am. résult				
Statut des lettres										
Statut des objets						Proc				
Gestion dans registre algébrique										
Type de formation		Va=se	SS() pr 2 avec indic (1)	Correct	I fait/dit					
Type de traitement				tech niv 0 correct	correct. techn niv0	Recours unité				
Articulation entre registre algébrique et d'autres regitres										
Type conversion						globale et naïve	pas à pas séparé			pas à pas séparé.
Fonction de l'algèbre										
Fonction apparente						Aucune	Aucune	Traduire relation		Aucune
Rationalité algébrique										
Type de preuve						Pragm	Pragm			
Type de justification					Appel au numérique	Appel à 1 ex.	Appel à 1 ex			Appel au numérique

Tableau 15: Analyse des productions de Mérième

Mérième	T3	T4	T6	T9	T10	T11	T14	T15	T18
traitement algébrique									
type de traitement : Reproduction de tâche numérique									
Reproduct. de tâches form. n1									
Reproduct. de tâches form. n2									
Interprétation	I NT I NT	CCCCC	CCI NT NT...	NT NT C NT C NT C	NT	NT	I NT NT C	CCCC	C
Etude autres notions									
Branc^t formule et résolution									
Production aidée et résolution									
Production et résolution									
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité		Equiv	Equiv					Equiv	
Statut des lettres		Nombres	Nombres					nombres	
Statut des objets		proc/struct	Proc					Proc Struct	
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	ss () pr 2	Correct	Correct	Correct				Correct	
Type de traitement				Correct			Méth 2		
Articulation entre le rgistre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion									Correcte int globale
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente							pour trouver éq. droite		
Rationalité algébrique									
Type de preuve									
Type de justification	Réécriture Appel à propriété	Règles au niv op	Règles Faux (3)				Appel à calcul alg.	Règles niv op Réécriture	par élimination

Tableau 16 : Analyse des productions de Mérième

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
40% Reproduction tâches formelles non finalisées de ni veau 1	42% Traduire algébriquement une relation dans contexte fermé Utilisation de l'outil pour étudier d'autres notions		Traitement algébrique
	Selon contexte, du côté de l'arithmétique / du côté de l'algèbre	Du côté du formel scolaire / du côté de l'algèbre	Rapport arithmétique/algèbre
Ecriture algébrique correcte parfois sans ()	Manipulation formelle opératoire de niveau 0		Gestion dans le registre algébrique
	Aucune fonction (exercices de mathématisation) Fonction algébrique dans contexte plus fermé Produire équation de droite Traduire algébriquement rel.		Fonction de l'algèbre
	Rationalité pré-scientifique Preuves pragmatiques Appel au numérique	Rationalité scolaire scientifique - règles au niveau opératoire - raisonnement élimination - Utilisation de l'outil algébrique	Rationalité algébrique



Le profil de Mérième

IV.2.3.2 Mise en relation avec le cours en BEP

Nous reconnaissons des similarités entre le rapport personnel de Mérième à l'algèbre et le rapport institutionnel dans sa classe.

Dans la dimension objet :

- Mérième manipule correctement les expressions algébriques, mais sa manipulation formelle est de niveau 0. Cela semble bien correspondre au faible niveau d'activité développée dans sa classe autour de ce type de traitement algébrique.
- Mérième montre des compétences en germes pour articuler le registre des représentations graphiques et celui des équations. Or Mérième a effectivement reçu un enseignement favorisant cette articulation et l'interprétation globale d'un tracé de droite.

Dans la dimension outil :

- Mérième engage la détermination d'une équation de droite connaissant un tracé de cette droite. Elle met en œuvre l'algèbre comme outil pour faire fonctionner une autre notion, ce qui recoupe l'enseignement suivi.
- En revanche, malgré les exercices de mise en équation de problèmes concrets résolus en BEP, Mérième ne mobilise pas le calcul algébrique pour les résoudre.

toute situation de mise en équation non familière l'a laisse démunie : elle n'a jamais été confrontée en BEP à la traduction algébrique d'une situation extra-mathématique.

Le test d'évaluation à l'entrée en Première G permet donc de montrer certaines similarités entre le rapport personnel de Caroline à l'algèbre et le rapport institutionnel à l'algèbre mis en jeu dans sa classe de BEP.

IV.2.4 Le profil de Lucie

IV.2.4.1 Définition du profil

Lucie a réussi quatre exercices "techniques" sur dix, mais aucun des sept exercices utilisant la dimension outil de l'algèbre. Et pourtant, Lucie a utilisé l'outil algébrique pour mettre en équation des problèmes, même si sa stratégie a échoué.

Ses compétences algébriques sont fragiles dans la dimensions objet et très faibles dans la dimension outil. Seul le type de traitement *reproduction des tâches formelles non finalisées de niveau 1* semble être un peu maîtrisé.

Recherchons composante par composantes les cohérences de fonctionnement de Lucie. Nous commençons encore par le côté objet.

• *Gestion dans le registre algébrique*

De façon très claire, Lucie travaille dans un système d'écritures algébriques sans parenthèses : elle produit des écritures sans parenthèses ($b+a \times a+3$ est l'aire du rectangle de T10) et les interprète avec la conception que "les parenthèses ne changent rien".

Mais sa manipulation s'effectue avec mémoire :

-3^2 vaut 9 dans T2, pour le carré de -3, en revanche -3^2 vaut -9 pour calculer $-t^2$ pour $t=-3$. On retrouve ce même phénomène dans d'autres exercices :

dans T7.2 : $(x+1)(x+2)-5(x+2)$
$(x+2)(x+1)-5$
$(x+2)((x+1)-5)$
$(x+1)(x-4)$

dans T6 : $2x^2 = (2x)^2$

dans T15 : $b-2xc = (b-2)c$

De même, elle interprète correctement les expressions non parenthésées dans T4, T6, T15. Sa manipulation formelle est à première vue opératoire incorrecte avec mémoire dans des exercices stéréotypés. C'est un point d'appui important sur lequel on pourra jouer pour permettre la mise en place du rôle correct des parenthèses. Mais elle peut devenir pseudo-opératoire dans des situations inhabituelles afin de se ramener à une situation de calcul familière :

dans T5, $axb - bxa$ devient $-2ab$

dans T7.4, elle se ramène à des expressions du premier degré par désassemblage :

$(3-2x)(x-2)$	$-1x=-2$
$= 3x-6-2x^2+4$	$x=2$
$= 3x-2-2x^2$	
$-3x+1x+1x = -2$	

Elle réutilise la même stratégie dans T7.5.

• *Articulation entre le registre algébrique et d'autres registres*

Lucie éprouve de grandes difficultés à convertir le même objet d'un registre dans un autre. En particulier, la majorité des traductions réalisées du registre du langage naturel vers le registre des écritures algébriques tombent dans le piège d'une congruence non sémantique. Lucie n'a pas compris en quoi le langage algébrique pouvait mémoriser une relation opératoire :

dans T13 : elle traduit numériquement l'énoncé par une écriture linéaire globale qui ne correspond pas à la relation opératoire attendue.

dans T16 : elle traduit la relation "il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs" par *6E+P*.

L'articulation entre le cadre algébrique et le cadre numérique, d'une part, et celle entre le registre des représentations graphiques et celui des écritures algébriques, d'autre part, ne semblent pas non plus disponibles. Ce sont deux éléments qu'il sera certainement important de travailler avec Lucie.

• *Fonction apparente de l'algèbre et rationalité algébrique*

Et pourtant Lucie rentre dans le jeu du symbolisme. Elle semble avoir confiance dans l'outil algébrique et, quand elle peut, elle l'utilise pour résoudre des problèmes. C'est le cas, par exemple, dans le cadre géométrique. Elle échoue dans T17, non pas à cause du langage algébrique, elle sait exprimer le périmètre du carré et du triangle en fonction de chacune des longueurs des côtés, mais parce qu'elle n'arrive pas à exprimer correctement les deux longueurs en fonction l'une de l'autre.

"10-x = DC   Cf = 10-x
ABCD = 4(10-x)   CEF = 3(10-x)"

Son rapport à l'algèbre semble passer par un rapport aux équations (T8, T17). C'est là qu'elle semble le plus à l'aise et qu'elle mobilise l'outil algébrique. Ce peut être un point d'appui pour Lucie qu'il ne faudra pas négliger.

En revanche dans une situation familière la tâche T8, elle tente de se rappeler d'une démarche de nature algébrique appliquée en BEP, ici non adaptée à la situation étudiée. Elle peut donc rester prisonnière de schémas de résolution sans réel moyen de contrôle.

Dans les tâches de mathématisation, Lucie reste du côté d'une rationalité pré-algébrique : preuves pragmatiques (T12, T13) appel au numérique (T19), appel au contexte (T18). Dans les tâches internes au cadre algébrique, Lucie privilégie comme justifications, des règles au niveau opératoire mais aussi des règles énoncées au niveau de la forme, (T4, T6) des règles au niveau du légal. Dans ce cas, Lucie travaille sur un mode de rationalité scolaire.

• *Rapport arithmétique/algèbre*

Avec les éléments dont nous disposons, nous pouvons penser que Lucie a du mal à utiliser le signe d'égalité comme relation d'équivalence symétrique, même s'il joue un rôle adéquat pour déterminer si une égalité est vraie ou fausse. Le problème T17 semble en être un révélateur. En résumé, nous obtenons le profil suivant pour Lucie :

Exercices techniques | Exercices de mathématisation

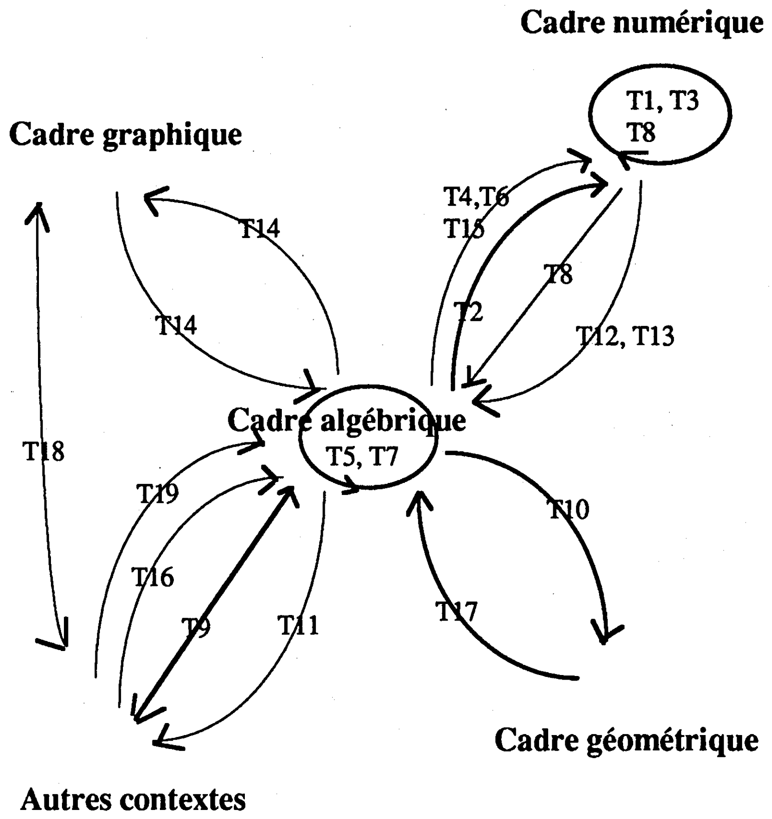
Lucie	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
type de traitement : Reproduction de tâche numérique	I	I C C			N	C	I			I
Reproduct. de tâches form. n1			I	C I C INT						
Reproduct. de tâches form. n2				I						
Interprétation					I	C	C	I	C	I
Etude autres notions										
Brancᵗ formule					I					
Production aidée										
Production						N	N	I	I	
Preuve						N	N			
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche de résolution						Arithm	Arithm			Arithm
Statut du signe d'égalité						Ann. Res	Ann Res			Ann Res
Statut des lettres					inc				inc	
Statut des objets										
Gestion dans registre algébrique										
Type de formation			non comm $ba \to -ab$	ss( ) $x^2 \to x+x$						
Type de traitement	ordre cor.	$a^2+b^2 \to (a+b)^2$	— non dist	Carré vers 1ᵉʳ deg			Arec mém			Rac. inc quotient
Articulation entre registre algébrique et d'autres regitres										
Type conversion	$10^{-1} \to 1$	ss( ) pr —			Eq rap +	para pas séparé	lin gl.	fn cong.	Rel. incor entre inc	fausse cong.
Fonction de l'algèbre										
Fonction apparente					Résoudre éq type	Aucune	Aucune	pour stéréo	pour autre éq.	
Rationalité algébrique										
Type de preuve						pragm	Pragm			
Type de justification					Appel à schéma				Appel à outil alg	Appel au numérique

Tableau 17: Analyse des productions de Lucie

Lucie	T 3	T 4	T 6	T 9	T 10	T 11	T 14	T 15	T 18
traitement algébrique									
type de traitement :									
Reproduction de tâche numérique		NNN	NNN N					NNNN	
Reproduct. de tâches form. n1									
Reproduct. de tâches form. n2									
Interprétation	I	CCCCC	CCCCI CC	CCCCC IC	C	NT	C NT I	CCIC	I
Etude autres notions									
Branc[t] formule									
Production aidée									
Production					Oui				
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité		equiv Ann Res	equiv Ann Res					equiv Ann Res	
Statut des lettres		Nbs	Nbs					Nbs	
Statut des objets		proc struct	Proc struct.					proc struct	
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	ss ()pr2	correct	ss ()		ss ()			ss ()	
Type de traitement							/		
Articulation entre le rgistre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion				fss lin inv			incl. fct		Ass. conj
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente									
Rationalité algébrique									
Type de preuve									
Type de justification	Auniv forme Regle signe	Réécriture niv. op	Reg op					Réécriture niv op	ass. inc

Tableau 18 : Analyse des productions de Lucie

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
40% Reproduction de tâches formelles non fin. niv 1	0%		Traitement algébrique
	Du côté de l'arithmétique	Du côté du formel scolaire	Rapport arithmétique/algèbre
Ecritures sans () parfois en assemblage	Opératoire incorrect avec mémoire parfois pseudo-opératoire		Gestion dans le registre algébrique
	Fonction algébrique scolaire : - pour résoudre équation		Fonction de l'algèbre
	Rationalité pré-scientifique Appel à exemples, au numérique	Rationalité scolaire Appel à règles	Rationalité algébrique



Le profil de Lucie

IV.2.4.2 Mise en relation avec le cours en BEP

Nou retrouvons certaines similarités entre le fonctionnement de Lucie et l'enseignement qu'elle a reçu en BEP. Nous en donnons ici quatre éléments :

Dans la dimension objet :

En BEP, Lucie a résolu de nombreux exercices techniques mettant en jeu des tâches de reproduction formelle de niveau 1. Dans les exercices techniques familiers du test, Lucie mobilise ses savoir-faire et les met en œuvre correctement (dans système non parenthésé).

- Face à des exercices techniques non familiers Lucie est destabilisée et se ramène à des tâches plus habituelles : c'est le cas pour la résolution d'un produit de facteurs nul où elle se ramène à la résolution d'une équation du premier degré.

Dans la dimension outil :

- Lucie mobilise des savoir-faire algorithmiques dans une situation stéréotypée bien connue, une situation de partage proportionnel, rencontrée en BEP où elle peut se ramener à résoudre une équation-proportion.
- En revanche, toute situation de mathématisation non familière l'a laisse démunie : comme Caroline, elle n'a jamais été confrontée en BEP à la traduction algébrique d'une situation extra-mathématique.

IV.2.5 Le profil de Philippe

Philippe a réussi deux exercices techniques sur dix. Il réussit l'exercice concernant un partage proportionnel en utilisant une démarche arithmétique. Philippe ne maîtrise aucun des types de traitement algébrique. Dans le test, il indique clairement plusieurs fois qu'il en est conscient en écrivant : *"je ne sais plus le faire, çà fait trop longtemps que je ne l'ai pas vu"*. Philippe a pourtant des connaissances algébriques locales et dispersées que nous allons tenter de mettre en évidence.

Commençons cette fois par la *dimension outil.*

Philippe n'a pas compris le rôle du langage algébrique pour traduire algébriquement une situation en gardant le sens opératoire initial. Par exemple, dans le problème du prestidigitateur, il traduit l'enchaînement opératoire par l'écriture linéaire globale non parenthésée puis il effectue le calcul sans garder la mémoire du problème posé.

Rapport arithmétique /algèbre

Et pourtant, il peut s'engager dans une traduction symbolique à condition de conserver des pratiques arithmétiques. Dans la tâche T16, il a compris qu'il s'agissait d'exprimer une relation entre le nombre d'élèves et le nombre de professeurs. Mais cette relation passe par l'effectuation d'une opération, celle de la division du nombre d'élèves par le nombre de professeurs. Cet exemple montre avec force que la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre n'est pas consommée : c'est le statut d'annonce de résultat du signe d'égalité qui semble d'abord disponible. C'est un élément important qu'il faudra prendre en compte.

Philippe est à l'aise pour résoudre une situation de proportionnalité, celle du partage proportionnel : il calcule numériquement chacune des grandeurs recherchées avec efficacité et assurance.

Etudions maintenant la dimension objet de l'algèbre.

• *Gestion du registre des écritures algébriques*

Philippe dit clairement qu'il ne comprend pas les écritures algébriques. Il s'est construit des règles personnelles concernant les parenthèses : les parenthèses sont associées à l'addition. Il écrit dans la tâche T6 :

"$2x^2$ c'est pour une multiplication alors quand entre parenthèse, le résultat sera une addition ($2x^2$).

Philippe confond les signes opératoires d'addition et de multiplication (l'aire du rectangle est donnée par simultanément par $3ax3bxa^2xba$ et $3a+3b+a^2+ba)$), ce qui l'amène aussi à utiliser des écritures en assemblage. Les bases opératoires ne sont pas stabilisées.

Dans la tâche T2, $nu \longrightarrow n+u$

Dans la tâche T6, on peut lire : $x^2+x^3= x^7$, $4x^2+3x^3= 7x^7$

Dans la tâche T15, $3+m=3m$, $3+2m = 5m$.

Philippe identifie des écritures algébriques comme des enchaînements opératoires ou des résultats d'enchaînements opératoires mais l'interprétation qu'il en fait reste souvent incorrecte.

Nous pouvons lier cette difficulté au statut du signe d'égalité : dans la tâche T15,

"$3+m = 3m$" est jugée vraie : il y a assemblage final, le signe d'égalité ayant le statut d'annonce de résultat ;

"$ab = a+b$" est jugée fausse : l'écriture ab est associée au produit de deux nombres et ne peut être égale à leur somme.

Dans la manipulation formelle d'expressions algébriques, Philippe semble complètement désemparé : il fait de regroupements non opératoires dans la tâche T5, par exemple : $(a-b)(b-2) + (b-2)(2-a) + (a-b)(a+b)$

devient $(ab+2a)(b^2-2b) + (b2-ba) + (a^2-ab)(ba-b^2)$. En revanche, il arrive à résoudre des équations du premier degré (T7.2).

• *Articulation entre le registre des écritures algébrique et d'autres registres*

Seule l'articulation entre le registre du langage naturel et celui des représentations graphiques, dans un contexte concret, semble disponible et mobilisée correctement. Philippe n'a pas su faire les tâches T9 et T11 et a traité incorrectement les tâches T1 et T2. Philippe ne sait pas interpréter correctement les puissances de dix et utilise la calculatrice pour obtenir des valeurs approchées fausses.

En revanche, s'il réussit à interpréter correctement une écriture algébrique, l'articulation entre le registre des écritures algébriques et le registre numérique est disponible et lui permet de mettre en œuvre correctement des calculs d'ordre numérique :

"$V = (-t^2 + 7x)^3$ *avec* $t = 3$ $x = 2$

$V = (-3^2 + 7x2)^3 = (-9+14)^3 = 125.$ "

• *Fonction apparente et rationalité algébrique* :

Philippe utilise les lettres pour désigner des grandeurs (cf T8), ces lettres gardant le statut d'étiquette. Il met en jeu le calcul algébrique dans des calculs d'ordre numérique en substituant des valeurs numériques à ces grandeurs (cf T2), dans la résolution d'une équation du premier degré. Philippe essaie de rentrer dans le jeu scolaire mais reste du côté d'une rationalité pré-algébrique.

Dans les tâches de mathématisation, Philippe reste du côté d'une rationalité pré-algébrique : preuves pragmatiques (T12, T13), appel au numérique (T18). Dans les tâches internes au cadre algébrique, Philippe utilise comme justifications, des règles au niveau opératoire mais aussi des règles énoncées au niveau de la forme (T4, T6). Il semble qu'ici, Philippe travaille sur un mode de rationalité scolaire.

En résumé, nous obtenons le profil suivant pour Philippe :

Exercices techniques — Exercices de mathématisation

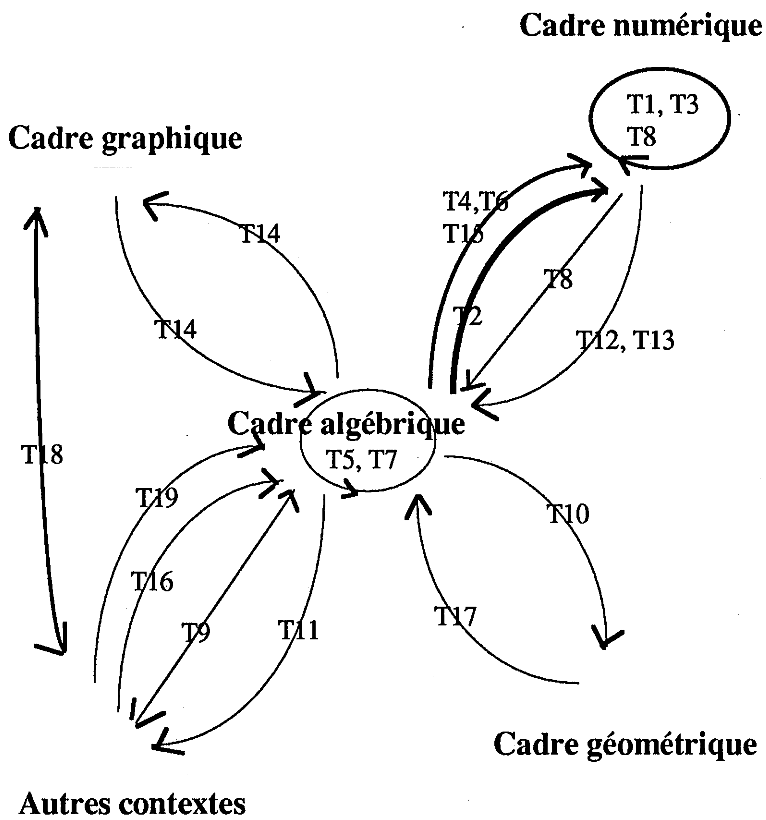
Philippe	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
type de traitement : Reproduction de tâche numérique	I	IIC			C		I			
Reproduct. de tâches form. n1			I	IICNT I						
Reproduct. de tâches form. n2				I						
Interprétation										
Etude autres notions										
Branc^t formule et résolution										
Production aidée et résolution										
Production et résolution						NT		I	NT	NT
Preuve						NT				
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche de résolution					Arithm		Arithm.			
Statut du signe d'égalité					Ann. résultat		Ann. ré	Annonce résultat		
Statut des lettres					grandeur [illegible]			grandeurs		
Statut des objets										
Gestion dans registre algébrique										
Type de formation		Désassembl	Assemb.	cf dévlt fact.						
Type de traitement			[illegible]	[illegible] pd cst			ss mbm			
Articulation entre registre algébrique et d'autres regitres										
Type conversion	Pt décimal calculatrice	ss() pr − point +			X par rapport		Ex. lin. gl	Trad. quoti.		
Fonction de l'algèbre										
Fonction apparente					Aucune		Aucune	Pour expr relation		
Rationalité algébrique										
Type de preuve							pragm ?			
Type de justification					Appel au [illegible]		cex. ?			

Tableau 19: Analyse des productions de Philippe

Philippe	T 3	T 4	T 6	T 9	T 10	T 11	T 14	T 15	T 18
traitement algébrique									
type de traitement : Reproduction de tâche numérique		N	N					N	
Reproduct. de tâches form. n1									
Reproduct. de tâches form. n2									
Interprétation	CCCC	CCCCC	IIIINT III	NT	I	NT	CII	ICII	C
Etude autres notions									
Brancᵗ formule et résolution									
Production aidée et résolution									
Production et résolution									
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité		?	?					Ann. résultat	
Statut des lettres		nbs	nbs						
Statut des objets									
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	CCC		Assemblage ()	cf +, x Assemblage lect contin				Assemblage lect gch-dte	
Type de traitement									
Articulation entre le rgistre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion							Pos. nac Thés var-inc		
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente									
Rationalité algébrique									
Type de preuve									
Type de justification	Récriture	NT NT opératoire	NT niv op fausse					niv op.	Ass compl appel cont

Tableau 20 : Analyse des productions de Philippe

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
10%	0%		Traitement algébrique
	Du côté de l'arithmétique	Du côté de l'arithmétique ou du côté du formel scolaire	Rapport arithmétique/algèbre
Ecritures en assemblage (confusion + et x)	Regroupement opératoire		Gestion dans le registre algébrique
	<u>Fonction pré-algébrique et algébrique scolaire</u> - Pour nommer - Pour substituer - Pour résoudre		Fonction de l'algèbre
	<u>Rationalité pré-scientifique</u> Appel à exemples, Appel au numérique	<u>Rationalité scolaire</u> Appel à règles Appel au niveau opératoire	Rationalité algébrique



Le profil de **Philippe**

IV.2.6 Le profil de Frédéric

IV.2.6.1 Définition du profil de Frédéric

Frédéric réussit un seul exercice technique sur dix, celui d'ordre numérique (le premier exercice de la tâche T2 a été abandonné). Frédéric maîtrise le type de traitement algébrique *reproduction de tâche d'ordre numérique non finalisée* sur des expressions peu complexes. Comme Philippe, il réussit l'exercice concernant le partage proportionnel en utilisant une démarche arithmétique.

Ce qui frappe surtout pour le test de Frédéric, c'est le nombre important de tâches non traitées. Frédéric a d'ailleurs eu besoin de s'expliquer : il écrit "*Je suis passé par la 4ième et la 3ième technologique et le BEP compta*". Cela exprime aussi une certaine retenue liée à l'évaluation : il n'écrit pas n'importe quoi dans le seul but de donner une réponse. Il est difficile de faire le profil de Frédéric, étant donné le faible nombre d'informations recueillies. Frédéric laisse à voir peu de connaissances algébriques et celles-ci paraissent inévitablement locales et dispersées. Nous donnons quand même quelques points de repère sur son fonctionnement. Commençons cette fois par la dimension outil.

• *Rapport arithmétique /algèbre*

Frédéric ne semble pas avoir compris le rôle du langage algébrique pour traduire algébriquement une situation.

Dans la tâche T8, il utilise une démarche arithmétique pour résoudre le problème : tableau de proportionnalité puis recours à l'unité pour calculer les inconnues du problème. Les lettres peuvent ainsi conserver le statut d'étiquette.

Dans la tâche T16, il a compris qu'il s'agissait d'exprimer une relation entre le nombre d'élèves et le nombre de professeurs. Mais cette relation s'exprime par un processus de calcul, celui de la division du nombre d'élèves par le nombre de professeurs. Il écrit le quotient E/P mais ne conclut pas. Cet exemple peut indiquer que la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre n'est pas consommée.

Frédéric se sent à l'aise dans le numérique : c'est un point d'appui important qu'il faudra prendre en compte mais dont il faudra aussi montrer les limites.

Dans la tâche T13 (prestidigitateur), Frédéric indique que l'affirmation "n'est pas vraie car les résultats trouvés sont tous supérieurs à 7". Aucune information ne vient justifier cette réponse, mais là encore, il est dans une démarche de calcul où le signe d'égalité conserve le statut d'annonce de résultat.

• *Fonction apparente et rationalité algébrique* :

A partir des informations partielles recueillies, on remarque que Frédéric utilise les lettres pour désigner des grandeurs, ces lettres gardant le statut d'étiquette. Frédéric réalise, dans des cas simples, des calculs d'ordre numérique en substituant des valeurs numériques à ces grandeurs (cf T2). Ici, le langage algébrique ne semble jouer qu'un rôle limité : nommer des grandeurs et faire des calculs d'ordre numérique.

Dans des exercices de mathématisation, Frédéric reste du côté d'une rationalité pré-algébrique : preuves pragmatiques, appel au numérique. Mais, Frédéric propose un "contre-exemple" pour justifier que des égalités entre expressions algébriques sont fausses. Mais, ont-ils vraiment le statut de contre-exemple ?

Etudions maintenant la dimension objet de l'algèbre.

• *Gestion du registre des écritures algébriques*

Frédéric exprime clairement qu'il n'a pas aucune familiarité avec les écritures algébriques. "Cela ne me dit plus rien". Il traite seulement trois exercices dans le cadre algébrique : les tâches T5 et T15.

La tâche T5 révèle une manipulation formelle non opératoire :

"$(a-b)(b-2)-(b-2)(2-a)+(a-b)(a+b)$
$a-b \times b-2$ - $b-2 \times 2-a + a-b \times a+b$
$a-a+a-bxa-bxb-b+b-2-2x2$
$a-ba-b^2+8$ "

Ce traitement indique que Frédéric ne tient pas compte des blocs de calcul. De plus, il travaille dans un système sans parenthèses, ce que l'on retrouve pour la tâche T15 :

l'égalité "$b - 2xc = (b-2)c$" est jugée vraie. Le calcul algébrique semble n'avoir aucun sens pour lui et est complètement déconnecté du numérique où Frédéric réussit bien.

Pourtant dans la tâche T6, il met en œuvre des souvenirs :

"$2x^2 = (2x^2)$ est faux ; si on prend un nombre le résultat est différent.

ex : $2x2^2 = 8$; $(2x2)^2 = 16$ ".

Dans ce cas, l'écriture algébrique est connectée avec le numérique et prend une signification pour Frédéric.

Enfin, dans la tâche T15, il accepte une écriture algébrique obtenue par assemblage "$3+m = 3m$".

Frédéric n'a résolu aucun des exercices de la tâche T7, qui mettent en jeu pourtant des savoir-faire de base élémentaires : c'est un signe fort qui indique le manque important de rapport formel de Frédéric à l'algèbre.

En résumé, Frédéric est complètement perdu face au traitement des expressions algébrique, à la fois, au niveau sémiotique, syntaxique.

• *Articulation entre le registre des écritures algébrique et d'autres registres*

L'articulation entre le registre des écritures algébriques et le registre numérique semble la seule disponible et dans des cas peu complexes : Frédéric ne sait pas calculer $\sqrt{9+16}$. En revanche, les calculs numériques mettant en jeu des opérations de base sont très bien menés, même avec des écritures parenthésées sur des nombres négatifs (T2).

Frédéric ne reconnaît pas différentes écritures de nombres (T1). Les tâches T9, T10, T11, T14, T18 ne sont pas traitées et mettent en évidence la faible flexibilité de Frédéric à articuler le registre des écritures algébriques et les autres registres (excepté le registre numérique).

En résumé, nous obtenons le profil suivant pour Frédéric :

Exercices techniques — Exercices de mathématisation

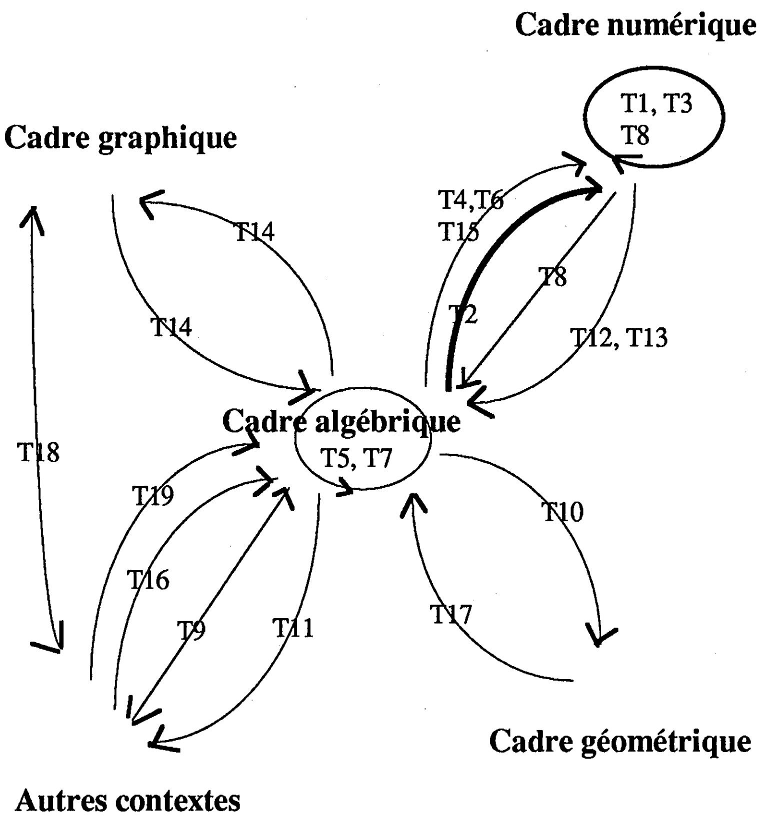
	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
type de traitement : Reproduction de tâche numérique	NT	I NT C			C					
Reproduct. de tâches form. n1			I	NT						
Reproduct. de tâches form. n2										
Interprétation					C	NT	I	?		
Etude autres notions										
Branc[t] formule et résolution										
Production aidée et résolution									NT	NT
Production et résolution						NT				
Preuve						NT				
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche de résolution										
Statut du signe d'égalité					An. Relt					
Statut des lettres					Etiquettes					
Statut des objets					Proc.			Proc.		
Gestion dans registre algébrique										
Type de formation		Rect. ênc. inc.	SS respéc.							
Type de traitement			Rec non opératoire [illegible]		Trad. quot					
Articulation entre registre algébrique et d'autres regitres										
Type conversion							?	E/R ?		
Fonction de l'algèbre										
Fonction apparente					Aucune		Aucune			
Rationalité algébrique										
Type de preuve							Pragm.			
Type de justification					Appel au numérique		Appel au numérique			

Tableau 21 : Analyse des productions de Frédéric

	T 3	T 4	T 6	T 9	T 10	T 11	T 14	T 15	T 18
traitement algébrique									
type de traitement : Reproduction de tâche numérique			C(5)					NT	
Reproduct. de tâches form. n1									
Reproduct. de tâches form. n2									
Interprétation	C C C C	NT	I I I I C C I	NT	NT	NT	NT	I C I C	NT
Etude autres notions									
Brancᵗ formule et résolution									
Production aidée et résolution									NT
Production et résolution									
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité			Equiv					non sym	
Statut des lettres			Nombres					nombres	
Statut des objets			Proc						
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	Correct		[illegible]					assemb [illegible] g.d.	
Type de traitement									
Articulation entre le rgistre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion									
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente									
Rationalité algébrique									
Type de preuve									
Type de justification	[illegible] au niv. op. [illegible]		Appel à l'ex.					Au niv op.	

Tableau 22 : Analyse des productions de Frédéric

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
10% reproduction de tâche d'ordre numérique non finalisée	0%		Traitement algébrique
	Du côté de l'arithmétique		Rapport arithmétique/algèbre
Ecritures en assemblage Ecritures dans système sans parenthèses	Regroupement opératoire		Gestion dans le registre algébrique
	<u>Rationalité pré-algébrique</u> - Pour nommer - Pour substituer		Fonction de l'algèbre
	<u>Rationalité pré-scientifique</u> Appel à exemples, Appel au numérique	Appel à Cex ?	Rationalité algébrique



Le profil de Frédéric

IV.2.6.2 Mise en relation avec le cours en BEP

Il est difficile de faire une telle mise en relation, vu le faible nombre d'informations obtenues dans le test de Fédréric. Mais nous pouvons avancer les remarques suivantes :

Dans la dimension objet :

- Fédréric a surtout travaillé sur des expressions du premier degré en BEP : dans le test il n'a traité aucun des exercices techniques mettant en jeu des expressions de degré supérieur à 1.

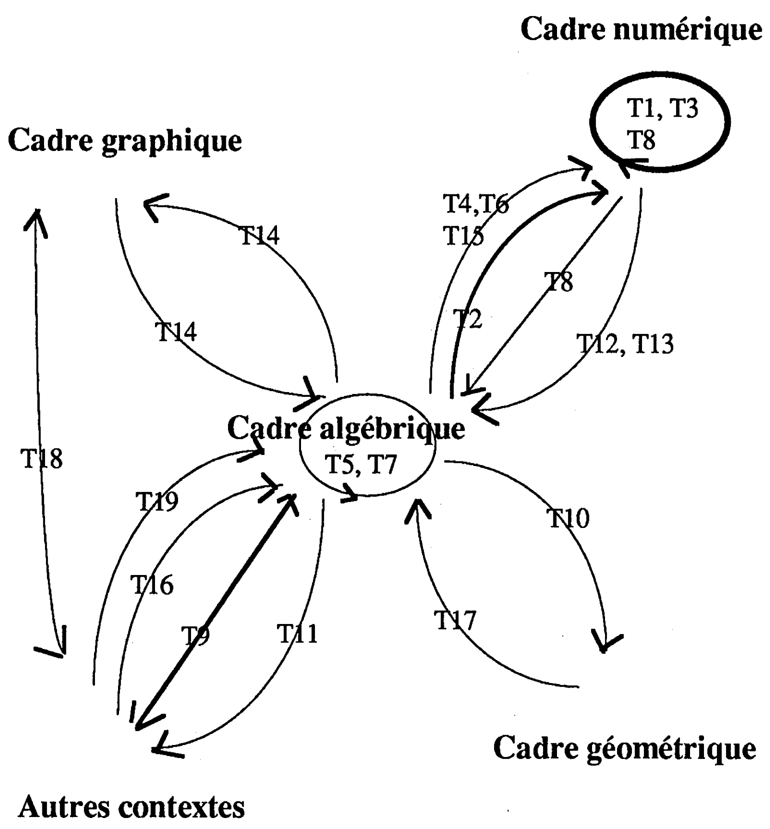
Dans la dimension outil :

- Fédréric sait mettre en œuvre des savoir-faire algorithmiques dans une situation stéréotypée bien connue, une situation de partage proportionnel, rencontrée en BEP où il peut se ramener à une situation de proportionnalité.
- En revanche, toute situation de mathématisation non familière le laisse démuni : il n'a jamais rencontré en BEP d'exercice analogue dans un contexte lié au secteur tertiaire.

IV.2.7 Le profil de Virginie

Pour conclure voici directement le profil Virginie :

Exercices techniques	Ex. de mathématisation	Ex. de reconnaissance	
10% reproduction de tâche d'ordre numérique non finalisée	0%		Traitement algébrique
	Du côté de l'arithmétique	Du côté du formel scolaire	Rapport arithmétique/algèbre
Ecritures dans système sans ()	Regroupement opératoire		Gestion dans le registre algébrique
	Aucune fonction		Fonction de l'algèbre
	<u>Rationalité pré-algébrique</u> Appel à exemples, Appel au numérique	<u>Rationalité scolaire</u> Appel à règles Appel au niveau opératoire Appel au niveau de la forme	Rationalité algébrique



Le profil de Virginie

Exercices techniques Exercices de mathématisation

	T 1	T 2	T 5	T 7	T 8	T 12	T 13	T 16	T 17	T 19
Traitement algébrique										
type de traitement : Reproduction de tâche numérique	C	NT C C			NT	C	C			
Reproduct. de tâches form. n1			I	I NT C NT NT C						
Reproduct. de tâches form. n2										
Interprétation								I	NT	I
Etude autres notions										
Brancht formule et résolution					NT					
Production aidée et résolution									NT	NT
Production et résolution						N	N	I		
Preuve						N	N			
Rapport arithmétique / algèbre										
Démarche de résolution						Arithm	Arithm.			Arithm
Statut du signe d'égalité		Equiv				Ann nés	Ann nés			Ann. nés
Statut des lettres								Etiquettes		
Statut des objets						proc	proc.			proc
Gestion dans registre algébrique										
Type de formation	Correct	Correct								
Type de traitement	Correct	Correct	Reg. termes	fss lin ?						
Articulation entre registre algébrique et d'autres regitres										
Type conversion						lin global	pas à pas séparé	trad. étiq.		[illegible] Ec. [illegible]
Fonction de l'algèbre										
Fonction apparente						Aucune	Aucune			
Rationalité algébrique										
Type de preuve						pragm non fini	pragm			
Type de justification										Appel au numérique

Tableau 23 : Analyse des productions de Virginie

	T 3	T 4	T 6	T 9	T 10	T 11	T 14	T 15	T 18
traitement algébrique									
type de traitement : Reproduction de tâche numérique									
Reproduct. de tâches form. n1									
Reproduct. de tâches form. n2									
Interprétation	CCCC	CCCCC	IICCI CC	CNTCC NTNTC	NT	NT	CNTNT	CCII	I
Etude autres notions									
Branc[t] formule et résolution									
Production aidée et résolution									
Production et résolution									
Preuve									
Rapport arithmétique / algèbre									
Démarche de résolution									
Statut du signe d'égalité	Equiv	Equiv	Equiv					Rel. equiv	
Statut des lettres		nbs gén	nbs gén					Nbs généralisés	
Statut des objets		proc						proc	
Gestion dans le registre algébrique									
Type de formation	correct	Correct	ss()					SS() Rect. gén. droite	
Type de traitement				Jsse lin ?					
Articulation entre le rgistre algébrique et d'autres registres sémiotiques									
Type conversion									ass cong
Fonction de l'algèbre									
Fonction apparente									
Rationalité algébrique									
Type de preuve									
Type de justification		Appel niv op	Aucun				Aucune	Appl vgl niv op	Aucune

Tableau 24 : Analyse des productions de Virginie

IV.3 CONCLUSION

Les sept profils illustrent bien la pertinence du détour méthodologique utilisé pour mettre en évidence les cohérences de fonctionnement des élèves. Le niveau microscopique d'analyse permis par la définition des valeurs locales des critères permet, par recoupement sur l'ensemble des tâches diagnostic, d'identifier et de décrire des cohérences de fonctionnement à partir des modalités et ceci, composante par composante.

L'analyse permet d'abord de mettre en évidence des lacunes qui peuvent paraître à première vue rédhibitoire. Citons par exemple, la manipulation pseudo-opératoire de Caroline dans un système d'écritures algébriques sans parenthèses et liées au premier degré.

Mais, au delà de ce niveau d'analyse en termes de réussite/échec par rapport à un niveau attendu, ce niveau d'analyse permet de préciser la nature des obstacles et leur cohérence interne, mais surtout de mettre en lumière des germes de compétences, même très locales, qui peuvent devenir autant de point d'appui pour une entrée dans la pensée algébrique. Nous verrons comment Mérième, qui traduit algébriquement une relation énoncée en langage naturel dans un contexte fermé et engage l'outil algébrique pour rechercher l'équation réduite d'une droite connaissant son tracé dans un repère donné, peut s'appuyer sur ses compétences locales pour rentrer dans la pensée algébrique.

En dernier lieu, ce niveau d'analyse permet de mettre en évidence les connexions existantes entre le profil d'un élève à l'entrée en Première G et son vécu algébrique en BEP tertiaire.

CHAPITRE 7

EVOLUTION DES PROFILS D'ÉLÈVES

La recherche décrite jusque-là a permis une étude :

- des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire en BEP, en Seconde indifférenciée, en Première G et, plus particulièrement, de leurs différences,
- des profils d'élèves mettant en évidence des germes d'entrée dans la pensée algébrique ainsi que d'éventuels obstacles à l'adaptation requise à l'entrée en Première G, compte-tenu justement des différences de rapports institutionnels.

En tant qu'enseignante, nous ne pouvions en rester là. Au moment où l'enseignement s'est déroulé, nous n'avions pas encore réalisé une analyse aussi fine que celle décrite dans les chapitres précédents. Mais notre enseignement s'appuyait déjà clairement sur des principes présentés au chapitre 1. Nous avions aussi dépouillé le premier test qui donnait des éléments clés sur la constitution des profils d'élèves. Et surtout, nous avions la volonté de créer des conditions susceptibles de faire évoluer les profils dans un sens adéquat, par des stratégies didactiques adaptées :

- consommation de ruptures mises en évidence,
- utilisation des appuis repérés,
- élaboration de situations a-didactiques, dans le cadre du programme de Première, susceptibles de donner l'occasion aux élèves de reconstruire un rapport à l'algèbre plus adéquat, à plusieurs moments de l'année scolaire.

Nous présentons dans ce chapitre l'organisation de l'action enseignante et l'étude des évolutions constatées dans les profils d'élèves. Nous essayons aussi de mettre en relation a posteriori, les profils initiaux tels qu'ils sont perçus actuellement, l'action enseignante telle qu'elle est analysée rétrospectivement et l'évolution des profils repérés à travers l'évolution d'un certain nombre de marqueurs. Nous testons ainsi, même si ce test garde un caractère très exploratoire, la validité des analyses faites en termes de germes, de points d'appui, d'obstacles dans les chapitres précédents, comme celle des principes d'action.

Il nous est très vite apparu que l'analyse visée ne pouvait prendre sens si nous nous restreignions aux trois composantes mentionnées ci-dessus, qu'il nous fallait prendre en compte des déterminants plus généraux des rapports à l'école et des rapports au savoir des élèves. C'est pourquoi, nous avons complété l'étude de l'évolution des profils par la détermination de points de repère sur l'histoire scolaire des élèves, en nous appuyant sur les données issues de deux questionnaires réalisés en début et en fin d'année scolaire dans notre classe. Ceci ne fait que rejoindre les résultats des travaux d'autres chercheurs montrant l'importance de ces facteurs dans l'apprentissage [Perrin 1992, Charlot et al 1992].

La structure du chapitre se déduit directement de ces choix :

Dans le paragraphe I, nous indiquons la démarche suivie pour réaliser un bilan de scolarité d'élèves dont nous avons précédemment défini les profils.

Dans le paragraphe II, nous présentons les choix stratégiques de notre enseignement.

Dans le paragraphe III, nous présentons la méthodologie construite pour suivre, de façon exploratoire, l'évolution des profils d'élèves.

Dans le paragraphe IV, nous présentons des études de cas concernant quatre des élèves précédents.

I. POINTS DE REPÈRE SUR L'HISTOIRE SCOLAIRE DES ÉLÈVES

Pour intégrer à l'analyse des déterminants plus généraux des rapports à l'école et des rapports au savoir des élèves, nous avons essayé de repérer des éléments dans l'histoire personnelle et, en particulier, dans l'histoire scolaire de chacun des élèves plus particulièrement étudiés. Pour cela, nous avons pris en compte les dimensions suivantes :

- le passé scolaire des élèves que nous retraçons dans ses grandes lignes,
- leurs projets d'avenir à plus ou moins long terme,
- leur perception, en termes de continuités ou de ruptures, de l'articulation entre le BEP tertiaire et la Première G d'adaptation,
- leur représentation des mathématiques,
- leur rapport au travail et à l'école.

Précisons pour chaque dimension, les sources que nous avons utilisées et les renseignements précis sur lesquels nous nous sommes fondée. Ils proviennent essentiellement, comme nous l'avons indiqué plus haut, de questionnaires que nous donnons classiquement en début d'année et en fin d'année scolaire en Première G d'adaptation pour réaliser le suivi de l'ensemble des élèves de la classe. Les questionnaires n'étaient donc pas explicitement construits pour l'exploitation qui en a été faite. Ils fournissent des informations parfois très partielles mais qui nous semblent malgré tout remplir le but recherché, c'est-à-dire, apporter quelques éléments susceptibles d'éclairer le rapport à l'école et au savoir des élèves concernés. Nous complétons ces informations par celles issues des bulletins scolaires des élèves[1].

[1]Je remercie Madame N. Villatte, Proviseur Adjoint de mon établissement, qui m'a donné accès aux dossiers scolaires des élèves : j'ai pu ainsi disposer des bulletins scolaires du collège et du lycée pour six élèves, des résultats au BEP et des bulletins scolaires de Première G pour la septième élève.

I.1 LE PASSÉ SCOLAIRE DES ÉLÈVES

L'étude du passé scolaire doit permettre d'obtenir des points de repère importants concernant la scolarité des élèves. Nous nous limitons ici à des événements qui, nous semble-t-il, peuvent avoir marqué significativement leur parcours et peuvent permettre d'expliquer certains comportements observés : redoublement d'une classe, changement brutal des résultats pendant une année scolaire ou lors d'un changement de classe, processus de choix d'une orientation.

Pour obtenir ces informations, nous exploitons les bulletins scolaires de collège et de BEP tertiaire dont nous disposons et, en particulier, les appréciations des professeurs. Nous recoupons cette analyse avec les réponses des élèves à la question 23 du questionnaire de fin de scolarité en Première G :

<u>Question 23.1</u> En primaire

Votre scolarité a été sans problème — *oui* ☐ *non* ☐
Si non, précisez.

Avez-vous redoublé une classe en primaire ? — *oui* ☐ *non* ☐
Si oui, laquelle ?

<u>Question 23.2</u> En collège
a. Rappelez votre niveau scolaire. Etiez-vous un bon élève, moyen ou faible ?

en 6ième :	*bon*	☐	*moyen*	☐	*faible*	☐	*passage*	☐	*Red*	☐
en 5ième :	*bon*	☐	*moyen*	☐	*faible*	☐	*passage*	☐	*Red*	☐
en 4ième :	*bon*	☐	*moyen*	☐	*faible*	☐	*passage*	☐	*Red*	☐
en 3ième :	*bon*	☐	*moyen*	☐	*faible*	☐	*passage*	☐	*Red*	☐
	Si passage,		*BEP*	☐	*autres*	☐				

Deux questions extraites du questionnaire de début d'année permettent de savoir si les élèves avaient choisi ou non leur orientation en BEP, puis en Première G et les raisons de ces choix :

<u>Q1-2</u>
Avez-vous choisi d'aller en BEP ? Avez-vous choisi de continuer vos études au lycée en Première G, ou bien, est-ce l'équipe des professeurs qui vous y a incité(e) ?

<u>Q1-3</u>
Pourquoi avez-vous choisi une Première G d'adaptation plutôt qu'une première professionnelle ? Quelles sont les raisons qui vous poussent à poursuivre vos études ?

I.2 LES PROJETS D'AVENIR DES ÉLÈVES

Nous recherchons les projets d'avenir formulés par les élèves (études et métier éventuel) qui nous semblent, en effet, pouvoir fournir des éléments explicatifs intéressants quant à leur investissement personnel, à leur implication dans les études. Pour cela, nous utilisons les réponses aux questions suivantes :

Q11(questionnaire de début d'année scolaire)
Quel métier voulez-vous exercer ?

Voulez-vous continuer vos études après votre baccalauréat ? *oui* ☐ *non* ☐
Si oui, dans quel type d'études ?

Q22(questionnaire de fin d'année scolaire)
Quelles études et quelle profession envisagez-vous ?

I.3 L'ARTICULATION ENTRE LE BEP ET LA PREMIÈRE G D'ADAPTATION

Nous étudions la perception qu'ont les élèves de leur passage de BEP en Première G d'adaptation : Comment l'anticipent-ils à leur entrée en Première ? Comment l'interprètent-ils rétrospectivement en fin d'année scolaire ? Ce point est important car une rupture effective a été mise en évidence dans le chapitre 5. Une mauvaise perception de cette rupture peut entraîner chez les élèves des désillusions profondes et constituer un frein à leur adaptation. Si l'on se replace dans l'approche anthropologique de Y. Chevallard [Chevallard 1992], cela met en jeu le rapport personnel des élèves à des objets institutionnels qui ne sont pas des objets de savoir, et en particulier, la perception qu'ils se font du métier d'élève, de l'activité mathématique, etc.

Pour cette dimension, nous recoupons leurs réponses aux questions des questionnaires de début et de fin d'année scolaire portant sur la continuité ou la rupture entre les deux classes :

Q1-6 (questionnaire de début d'année scolaire)
Pensez-vous que l'enseignement sera très proche, proche, éloigné, très éloigné de l'enseignement reçu en BEP ? Précisez votre réponse ?

Q1-1 (questionnaire de fin d'année scolaire)
Avez-vous ressenti un changement avec l'enseignement suivi au lycée sur les points suivants :

- Enseignement général plus abstrait *oui* ☐ *non* ☐

-Plus de travail personnel *oui* ☐ *non* ☐

- Nature du travail demandé *oui* ☐ *non* ☐
(moins d'exercices d'application directe du cours, plus d'exercices de synthèse)

- Relations élèves/professeurs *oui* ☐ *non* ☐

- Plus grande exigence de formulation des connaissances *oui* ☐ *non* ☐

- Autres.

Q4 (questionnaire de fin d'année scolaire)
Vous-êtes vous senti moins, autant ou plus encadré par les enseignants du lycée que par ceux de LEP ?

En mathématiques :	*moins*	☐	*autant*	☐	*plus*	☐
En Français :	*moins*	☐	*autant*	☐	*plus*	☐
En TQG[2] :	*moins*	☐	*autant*	☐	*plus*	☐
En langues vivantes :	*moins*	☐	*autant*	☐	*plus*	☐
En droit :	*moins*	☐	*autant*	☐	*plus*	☐

I.4 LA REPRÉSENTATION DES MATHÉMATIQUES

Nous voulons mettre en évidence certaines représentations que les élèves se font des mathématiques. Nous utilisons ici le terme "représentation" en nous référant à la notion de "représentation métacognitive" introduite par A. Robert et J. Robinet [Robert, 1989]. Il nous renvoie donc aux représentations des élèves sur ce que sont les mathématiques, la manière de les apprendre et de les enseigner, leur rôle dans la formation cultuelle et technique, leur rôle dans la société et dans l'acquisition d'un métier.

Concernant cette dimension, nous nous basons sur les réponses à cinq questions issues des questionnaires. Ce sont les suivantes :

Q8 (questionnaire de début d'année scolaire)
Quelles sont, pour vous, les principales différences entre une matière professionnelle (par exemple, comptabilité ou techniques administratives) et une matière d'enseignement général (par exemple, français ou maths) ?

Q4 (questionnaire de début d'année scolaire)
Dans quel type d'activité, pensez-vous être le plus actif en mathématiques ?
- recherche d'exercices en travail individuel
- recherche d'exercices en groupe
- contrôle écrit en classe
- recherche d'exercices sur ordinateur
- recherche de documentation sur un sujet

Q5 (questionnaire de début d'année scolaire)
Dans les cours de mathématiques,
qu'est-ce-qui vous plaît ?
qu'est-ce-qui ne vous plaît pas ?
qu'est-ce-que vous avez trouvé facile ?
qu'est-ce-que vous n'avez pas trouvé facile ? Essayez d'expliquer pourquoi ?

[2]TQG est le sigle de techniques quantitatives de gestion.

Q11 (questionnaire de fin d'année scolaire)
"Faire des mathématiques", cela évoque pour vous une activité :

semblable à la pratique d'un jeu ☐

inintéressante et embêtante ☐

contrôlable de bout en bout ☐

trop exigeante ☐

trop vite incompréhensible ☐

nécessaire dans la formation ☐

Q17 (questionnaire de fin d'année scolaire)
Pensez-vous que l'étude des mathématiques" rende des services pour :

organiser vos connaissances ☐

éviter de commettre des erreurs de raisonnement ☐

être précis dans votre façon de vous exprimer ☐

déceler des contradictions non immédiates ☐

Nous sommes bien consciente des limites des informations que ces questions nous permettent de recueillir sur les représentations métacognitives des élèves, compte tenu de leur petit nombre bien sûr, mais aussi de la formulation même de certaines d'entre elles, Q11 par exemple, dont nous estimons les catégories très négativement orientés.

I.5 LE RAPPORT À L'ÉCOLE ET AU SAVOIR

En dernier lieu, nous essayons d'approcher le rapport des élèves au savoir et à l'école, d'une part, à partir de leur rapport au travail, de leur habitus de travail construit, d'autre part, à partir de leur mobilisation à l'école et de leur rapport à l'avenir via le savoir et l'école. Ici, c'est le point de vue social qui est privilégié en prenant en compte les notions de "rapport au savoir" et de " rapport à l'école" définies par Charlot, E. Bautier et J.Y. Rochex [Charlot, Bautier et Rochex, 1992][3]

Des deux questionnaires, nous avons retenu pour cette dimension, les questions suivantes :

[3]*"Nous dirons que (...) le rapport au savoir est une relation de sens, et donc de valeur, entre un individu (ou un groupe) et les processus ou produits du savoir. Parallèlement, nous définirons le rapport à l'école comme une relation de sens, et donc de valeur, entre un individu (ou un groupe) et l'école comme lieu, ensemble de situation et de personnes."*

Habitus de travail :

Q2-1 (questionnaire de début d'année scolaire)
En LEP, l'encadrement des élèves vous-a-t-il semblé suffisant ?
Comment se manifestait-t-il ?
- vérification des retards
- vérification des absences
- entretiens avec les élèves
- organisation de club
Autres réponses ?

Q20-2 (questionnaire de fin d'année scolaire)
En première G, le nombre d'heures de travail que vous avez consacré par semaine aux mathématiques, vous semble-t-il trop élevé, normal, insuffisant ?

trop élevé ☐ normal ☐ insuffisant ☐

Rapport à l'école :

Q23-2 f (questionnaire de fin d'année scolaire)
En collège, certains professeurs vous ont-ils fait aimer ou "détester" une matière

oui ☐ non ☐

Donnez quelques exemples :

Q10 (questionnaire de début d'année scolaire)
Si vous avez été, au cours de votre scolarité, en échec scolaire, donnez-en les principales raisons :

- difficultés familiales ☐
- raisons de santé ☐
- manque de travail ☐
- des difficultés d'apprentissage ☐
- manque de motivation ☐
- autres ☐

Dans ce dernier cas, précisez.

Rapport à l'avenir via l'école :

Q23-2 c (questionnaire de fin d'année scolaire)
Au collège, quels étaient vos objectifs ? (Numérotez par ordre de préférence)

- passer dans la classe supérieure ☐
- éviter d'"attraper" trop de lacunes ☐
- apprendre avec intérêt des connaissances ☐
- retrouver les copains en cours et participer à la vie collective ☐

Q24 (questionnaire de fin d'année scolaire)
Quel est le rôle de l'école pour vous ? (Numérotez par ordre de préférence)

- permettre d'avoir un bon métier ☐
- permettre d'apprendre le plus de connaissances pour avoir un bon avenir ☐
- permettre d'acquérir des connaissances dans de nombreux domaines ☐
- permettre d'apprendre le programme, d'écouter en cours, pour obtenir plus tard un bon métier ☐
- permettre d'apprendre des connaissances utiles à un futur métier ☐

I.2 ETUDE DE CAS

Nous présentons ci-après les traits les plus marquants de l'histoire scolaire de chacun des élèves dont nous étudions l'évolution dans ce chapitre, en essayant de pointer les éléments qui nous semblent avoir pu jouer un rôle non négligeable dans cette évolution.

I.2.1 Le cas de Caroline

• *Le passé scolaire*

Caroline se rappelle d'une scolarité difficile en primaire, mais sans associer ceci à des souvenirs précis. Elle est rentrée en collège en Septembre 1985 et a obtenu des résultats insuffisants en sixième : on note dans ses bulletins, des notes insuffisantes dans de nombreuses matières, en particulier en français, en maths et en langue, mais aussi la mention à plusieurs reprises, de "bases insuffisantes", de "bavardages" et de "manque d'attention". Caroline a redoublé sa sixième et a poursuivi une scolarité terne en collège : ses résultats en français semblent être devenus convenables mais elle n'a obtenu que 5 au brevet blanc ; en mathématiques, en revanche, les résultats deviennent de plus en plus faibles (11; 12,5; 9,5 en sixième (2) ; 8,5;6;7 en cinquième ; 7,5;8,5;8 en quatrième et 8,5;4,5 et 5 en troisième). Ses bulletins soulignent régulièrement le manque de travail approfondi et toujours des bavardages. Caroline est orientée en BEP tertiaire et s'y plie sans enthousiasme car elle ne désirait pas cette orientation. Elle travaille peu en première année de BEP et semble s'y mettre en deuxième année : ces résultats progressent alors notamment en maths où elle obtient 16,5 de moyenne en fin d'année de BEP et 12 à l'examen. C'est elle qui choisit son orientation en Première G d'adaptation et non en Première professionnelle : elle ne veut pas continuer vers un métier lié à la branche commerciale et la classe de Première G peut lui ouvrir d'autres perspectives.

• *Les projets d'avenir*

Comme nous l'avons dit précédemment, Caroline veut continuer ses études après le baccalauréat mais elle n'a pas a priori d'idée de son futur métier. Elle considère cette classe comme une nouvelle classe de détermination et veut avant tout, "enfin être fière d'elle" : cela revient comme un leitmotiv dans ses réponses aux questionnaires.

• *L'articulation entre le BEP et la Première G*

Dès l'entrée en Première, Caroline est consciente que l'enseignement proposé sera très éloigné de celui reçu en BEP : elle l'exprime en termes de différence de niveau entre les deux classes, surtout dans les matières générales. A posteriori, elle conserve le même point de vue.

"C'est toujours difficile au début de s'adapter à une classe qui n'a pas le même niveau mais au cours de l'année on s'aperçoit que d'aller au BEP n'est pas dévalorisé".

Elle différencie clairement en fin de Première des différences entre le BEP et la Première : reproduction d'exercices modèle en BEP, cours plus abstraits et exercices demandant plus d'initiative en Première, mais aussi, exigences plus grandes au niveau du travail personnel et de la formulation. Elle écrit notamment :"en BEP, on nous demandait d'appliquer bêtement des formules sans savoir exactement d'où ces formules provenaient". Elle dit avoir travaillé davantage en Première et avoir consacré entre une et trois heures par semaine aux mathématiques, ce qu'elle pense être insuffisant.

Il nous semble donc que Caroline était relativement bien préparée psychologiquement aux ruptures prévisibles qu'elle aurait à assumer et qu'elle avait une volonté très forte de surpasser les difficultés attendues pour réussir.

• *La représentation des mathématiques*

Pour Caroline, une matière professionnelle spécialise vers un métier. Au contraire, les mathématiques font partie d'un enseignement général et donnent une formation générale. Ses rapports au savoir mathématique semblent d'abord s'exprimer en termes de type d'activité (exercices ou contrôle, ...), de type de mathématiques abordées (soit maths de BEP, soit de collège) plutôt qu'en termes de contenu. Ainsi en réponse à la question Q5, elle écrit :

"**Contenu mathématique**
Q5 : Dans les cours de mathématiques,
qu'est-ce-qui vous plaît ? les exercices en classe
qu'est-ce-qui ne vous plaît pas ? les contrôles écrits quand je ne sais pas
qu'est-ce-que vous avez trouvé facile ? les maths de BEP
qu'est-ce-que vous n'avez pas trouvé facile ? les maths de collège"

En général, Caroline pense que l'activité mathématique, nécessaire à la formation, est trop exigeante. En revanche, elle considère que les mathématiques peuvent permettre de structurer les connaissances et d'éviter de commettre des erreurs de raisonnement. On peut mettre ce point de vue en relation avec la confiance et l'intérêt de Caroline à travailler et à raisonner à partir d'écritures algébriques incorrectes mais construites par elle dans un système cohérent. Elle indique par ailleurs que sa perception des mathématiques a beaucoup évolué entre le collège et la Première.

• *Le rapport à l'école et au savoir*

Très clairement, Caroline explique ses difficultés scolaires en collège par un manque de travail et un manque de motivation. Ses bulletins scolaires indiquent d'ailleurs, comme nous l'avons souligné, des bavardages fréquents, un travail souvent superficiel. Au collège, son objectif était de passer dans la classe supérieure, de retrouver ses copains, d'apprendre mais avant tout pour éviter d'"attraper" trop de lacunes. Il semble ainsi que son regard sur un savoir donné dépende beaucoup du professeur qui l'enseigne : en particulier, elle indique avoir détesté les maths et l'anglais à cause des professeurs qu'elle a eus. Pour elle, l'enseignant, qui "doit être compréhensif", joue un rôle central de médiateur entre le savoir et l'élève.

Son rapport au savoir et à l'école a beaucoup évolué au cours de l'année de Première : en fin d'année, se forger un avenir implique pour elle l'acquisition de connaissances et plus seulement le passage dans la classe supérieure.

En résumé, Caroline est consciente des ruptures entre le BEP et la Première et semble bien en avoir pris la mesure au cours de l'année. Elle est rentrée en Première avec des connaissances très fragiles en maths et dans les autres matières, mais d'une part, avec une volonté très forte de réussir pour être enfin fière d'elle, d'autre part, avec la conviction de pouvoir enfin trouver une filière d'avenir correspondant à ses choix et à ses connaissances.

I.2.2 Le cas d'Alice

• *Le passé scolaire*

Alice se rappelle, de façon très vivace, d'une scolarité très difficile en primaire : "en CE1, je ne parlais pas, j'étais très timide, je ne savais pas lire, pas écrire. J'étais un bébé et je passais mon temps à dormir : j'étais coupée du monde jusqu'au CE1". Il y avait des problèmes chez elle et elle ne dormait pas la nuit. Elle évoque ses souvenirs lorsqu'elle habitait chez sa tante qui l'obligeait à apprendre ses tables de multiplication : elle lie ses difficultés en mathématiques à cet épisode de sa scolarité. Elle a redoublé son CE1 et considère avoir été très "mauvaise jusqu'au deuxième CE1"[4].

Alice est rentrée en collège en Septembre 1985 et y a obtenu des résultats moyens. Elle se rappelle avoir été bonne élève en sixième et en cinquième : on note pourtant dans ses bulletins la mention "d'efforts irréguliers" et "d'un travail parfois insuffisant". Le passage en cinquième se fait "au bénéfice de l'âge". Ses résultats en quatrième et en troisième sont faibles dans les matières scientifiques. En mathématiques, ses moyennes passent de 10-11 en sixième-cinquième à (9,3 ; 6,7 ; 5,3) en quatrième puis (5,7 ; 2,9 ; 5,4) en troisième avec le même professeur. En français, l'ensemble est irrégulier, mais il arrive à

[4]Ses informations sont issues d'entretiens avec les élèves.

Alice d'avoir d'excellents résultats. On conseille alors à Alice d'aller en BEP et elle y rentre sans enthousiasme.

En BEP VAM, les résultats d'Alice sont bons dans les matières littéraires et en langues, juste convenables dans les matières professionnelles, très irréguliers en maths (de 19 à 0,5). On peut lire comme appréciations : "Des efforts réguliers, Continuez" ; "Des difficultés ce trimestre. Il faut se ressaisir" ; "Il ne faut pas paniquer lors de contrôles". Comme appréciation finale du bulletin, il est noté "Ensemble moyen. Et les stages !". Voici l'image qu'elle garde de son passage en BEP :

"J'ai appris à me défendre, à "ouvrir ma bouche" plus souvent. Ça forge le caractère. Au niveau des études, cela m'a beaucoup apporté, car comme tous les élèves étaient mauvais j'avais l'impression d'être bonne. Je ne suis ni à ma place en BEP, ni en cycle "normal", plutôt entre les deux".

La première année a été très dure et elle a détesté les stages en deuxième année : "les stages ont été terribles, pire que terribles ; c'était de l'exploitation : au lieu de vendre, on lavait le sol, portait des cartons, ...". "Donc je n'aime pas travailler, je préfère les cours."

Alice a choisi d'aller en Première G d'adaptation, malgré certaines réticences de ses professeurs. Elle ne voulait pas aller en Première professionnelle pour ne pas effectuer de stage. "Je n'aime pas la vie active" dit-elle.

• *Les projets d'avenir*

Elle ne sait pas quel métier exercer plus tard, ni même en début d'année si elle veut continuer ses études. En fin d'année scolaire, elle envisage une profession d'enseignante.

• *L'articulation entre le BEP et la Première G*

Dès l'entrée en Première, Alice a été consciente que l'enseignement proposé pouvait être éloigné de celui reçu en BEP. Elle l'exprime en ces termes : "éloigné, car même dans les matières communes aux 2 lycées, l'enseignement est différent".

A posteriori, Caroline a conservé le même point de vue. Elle l'exprime sur les deux plans : administratif et scolaire.

"Au niveau administratif, en LEP c'est moins strict. On est plus livré à nous même en LEP, c'est donc plus libre.

Niveau scolaire, c'est juste le temps de s'y mettre, ensuite ça va. Il y a plus de travail à la maison. Maintenant, il faut travailler."

Elle insiste ensuite, en disant que le niveau est très différent, que l'enseignement général est plus abstrait, demande une plus grande rigueur dans la formulation et surtout qu'il y a beaucoup plus de travail.

Alice était donc bien préparée psychologiquement aux ruptures prévisibles entre le BEP et la Première et voulait absolument réussir pour échapper au monde du travail.

• *La représentation des mathématiques*

Elle ne voit aucune différence entre une matière professionnelle et une matière d'enseignement général, excepté dans les contenus à enseigner.

Alice avoue ne pas avoir beaucoup de connaissances en mathématiques. Les mathématiques enseignées sont d'abord associées à "bien expliquer doucement", "ne pas aller au tableau", "comprendre en classe mais une fois à la maison, ne plus rien comprendre".

Alice considère que "faire des mathématiques" est une activité intéressante (elle l'a rajouté) mais très vite incompréhensible. Elle ajoute dans le cadre d'une autre question : "Il me manque des bases et j'ai quelques difficultés à apprendre les règles de calculs mais quand il s'agit de réfléchir, ça va mieux". Elle n'a jamais appris de formules et a du mal à utiliser le symbolisme algébrique. Elle insiste sur une différence essentielle entre mathématiques et français :

"En mathématiques, ce que vous nous donnez, c'est quelqu'un d'autre qui l'a trouvé : c'est très difficile de retenir et d'appliquer des théorèmes qu'on n'a pas faits soi-même. Le mode de pensée est différent en français : il suffit d'argumenter dans notre langue. En maths, il y a obligation de déduire. On n'a pas le droit d'exprimer sa personnalité".

En début d'année, Alice restait ouverte aux mathématiques. Elle écrivait :

"Je suis très mauvaise en mathématiques, c'est certainement pour cela que je ne les aime pas. Mais je ne suis pas bornée, je suis prête à ouvrir mes oreilles et à essayer de comprendre le cours".

Mais Alice a distingué toute l'année "comprendre" et "apprendre". Elle écrivait encore en Novembre :

"J'apprend rien du tout. j'ai un bon dicton : apprendre ou comprendre.

Ça veut dire que si on comprend, on n'a pas besoin d'apprendre, ça marche en général. En plus, je ne comprends pas les cours de mathématiques et je ne sais pas comment on apprend des maths".

• *Le rapport à l'école et au savoir*

Alice relie ses difficultés scolaires à des raisons très diverses : manque de travail et manque de motivation, mais aussi, difficultés familiales, manque d'intérêt pour l'école et difficultés d'apprentissage. Ses bulletins scolaires conjuguent ces différents points de vue à travers les appréciations des professeurs.

Alice n'a pas mis en place un habitus de travail, ni en collège, ni en LEP. Ses objectifs étaient, comme pour Caroline, de passer dans la classe supérieure, de retrouver ses copains, d'apprendre des connaissances pour éviter d'"attraper" trop de lacunes.

Comme pour Caroline aussi, son regard sur un savoir enseigné dépend beaucoup du professeur qui l'enseigne. Elle en donne deux exemples l'anglais et les maths : elle aime l'anglais, car "ses professeurs ont eu une bonne influence au collège" ; "je n'aimais pas les maths car je ne les comprenais pas ; l'indifférence de mon prof de $3^{ième}$ n'a pas arrangé les choses : mon prof ne s'intéressait qu'aux bons élèves, au moins, il me laissait tranquille".

Le rapport avenir/école et savoir a beaucoup évolué chez Alice au cours de l'année de Première : pour elle, se forger un avenir implique en fin d'année l'acquisition de connaissances et non plus seulement la possibilité de passer dans la classe supérieure. Mais elle pense que l'école a d'autres rôles beaucoup plus importants à jouer et rajoute : "il n'y a pas que les connaissances et le métier, l'école peut aussi avoir un rôle social".

En résumé, Alice est consciente des ruptures entre le BEP et la Première et semble bien en avoir pris la mesure au cours de l'année. Elle est rentrée en Première avec des connaissances très fragiles en maths, une représentation des mathématiques (et d'autres matières) qui lui impose la compréhension pour progresser, un certain manque de confiance en elle dans quelques matières. Mais elle a une volonté très forte de réussir, ce qui sera pour elle un atout important. De plus, elle veut échapper au monde du travail et se sent a priori plus à sa place dans la filière choisie.

I.2.3 Le cas de Mérième

• *Le passé scolaire*

Mérième a eu une scolarité sans problème en primaire et jusqu'en fin de cinquième. Elle dit avoir "subi" un peu l'école mais dans un contexte très studieux. Mérième parle alors d'un événement qui semble avoir joué un rôle important dans sa scolarité : "Mon père et ma mère tenaient beaucoup à ce qu'on fasse des études. Mon père nous rassemblait tous les soirs pour faire nos devoirs. Après la décision de ma sœur aînée d'arrêter ses études pour se marier alors qu'elle réussissait brillamment, mon père s'est désinvesti de notre éducation et a mis ses autres enfants devant leur responsabilité : pour réussir il faut travailler, maintenant vous travaillez si vous voulez."

En quatrième, Mérième s'est donc retrouvée livrée à elle-même. En quatrième et en troisième, ses résultats restent moyens excepté en langues vivantes où ils deviennent très faibles voire catastrophiques. Le travail semble irrégulier. En mathématiques, ses notes restent autour de la moyenne. Mérième conserve un assez bon niveau en français, le travail étant superficiel. Elle est orientée en BEP habillement ! Elle pouvait passer en Seconde, mais vu ses résultats en langues, elle a préféré choisir le BEP.

Un autre épisode a joué alors un rôle déterminant dans ses choix d'orientation : les stages de BEP. "Quand j'ai compris que mon avenir se limitait à travailler dans des caves, à transporter des cartons dans des caves, alors là, j'ai vu qu'il fallait vraiment que je bosse".

Mérième a d'excellents résultats en BEP habillement et est remarquée par un professeur qui l'a aidée à se réorienter en BEP CAS. Elle y réussit alors brillamment : les six appréciations des conseils de classe varient entre "Très bons résultats", "Très bon travail", "Excellent trimestre". En mathématiques, elle obtient des résultats entre 16 et 20.

Mérième choisit alors de passer en première G d'adaptation et non en Première professionnelle : elle ne pense pas pouvoir aller en BTS avec un bac professionnel et veut pouvoir trouver du travail avec un bon diplôme dans la branche souhaitée. Elle préfère en effet continuer vers des études de comptabilité.

• *Les projets d'avenir*

A l'entrée en Première, elle ne sait pas quel métier exercer, mais elle veut poursuivre ses études en BTS. En fin de Première, elle veut continuer ses études dans l'option comptabilité et peut-être devenir par la suite enseignante.

• *L'articulation entre le BEP et la Première G*

Mérième est entrée en Première avec l'idée que l'enseignement serait très proche de l'enseignement reçu en BEP. Elle énumère toutes les matières enseignées et pense que l'enseignement professionnel sera "repris à zéro".

Dans le questionnaire de fin d'année scolaire, elle constate qu'il s'est produit un changement important entre les deux cycles (enseignement plus abstrait, plus de travail personnel, plus de rigueur dans la formulation, plus d'exercices de synthèse). Mais elle s'y est bien adaptée : "En s'y mettant dès le début, dès la première leçon, car si on ne comprend pas les premières leçons, on comprendra difficilement les autres".

Pour résumer, terminons par son point de vue personnel qui nuance ses réponses initiales et indique rétrospectivement sa grande confiance en elle :

"Quand je suis arrivée en Première, j'étais préparée mentalement à travailler : on me disait tellement que la première d'adaptation était très difficile pour une élève de BEP. Franchement, je pensais travailler plus, mais en fait c'est bien assez, on a fait je pense une superbe année".

• *La représentation des mathématiques*

Mérième établit une nette différence entre matière professionnelle et matière d'enseignement général : une matière professionnelle "me servira le plus tard possible".

Pour Mérième, le cours de mathématiques correspond à des contenus mathématiques et elle ne se trouve pas à l'aise en géométrie. Elle voit dans les mathématiques une activité semblable à la pratique d'un jeu qui est contrôlable de bout en bout. Certes les mathématiques sont nécessaires dans la formation, mais elles "peuvent aussi nous apprendre à réfléchir différemment". Avant son entrée en première, elle considérait que les mathématiques étaient trop répétitives : "on nous donnait seulement des formules à appliquer ainsi que les opérations sur lesquelles on devait appliquer ces formules".

Les mathématiques permettent aussi selon elle d'organiser ses connaissances, d'éviter de commettre des erreurs de raisonnement, de déceler des contradictions immédiates.

Mérième résume très bien comment elle perçoit l'apprentissage des mathématiques en classe :

"1) le cours en classe, où j'entendais le raisonnement, souvent pour la première fois donc je ne comprenais pas toujours tout.

2) exercice en classe : où j'essayais de retranscrire en comprenant ; ici, le raisonnement apparaissait.

3) Correction très utile[5] car c'est sur ces corrections que nous apprenons car là, tout est écrit parfaitement, pas sur notre exercice où nous avons essayé, raturé, ...

4) Il y a toujours eu un résumé de la leçon fait oralement où là normalement je comprenais. En plus, en prenant des notes (petites), cela nous fait rentrer dans la tête. Il est important de comprendre l'ensemble de la leçon (il n'y a plus de lien sinon, (...))."

Lorsqu'on lui demande si elle n'a pas été gênée par le changement de contrat intervenu en Première G - on ne demande plus seulement d'appliquer une formule pour des valeurs mais on demande de la produire - elle écrit : "Déjà, cela est plus intéressant et nos recherches aboutissent toujours à des connaissances inconnues avant. De plus, si c'est nous qui cherchons, je pense que l'on s'en souvient plus après".

• *Le rapport à l'école et au savoir*

Pour elle, ses difficultés scolaires relèvent exclusivement d'un manque de travail. En Première, elle a repris un rythme de travail normal qui lui permet d'apprendre dans des conditions qui lui semblent optimales.

Il semble que l'apprentissage d'un savoir soit encore un peu lié à l'enseignant de la matière, surtout lorsque Mérième ne réussit pas : "Un professeur d'anglais m'a fait détester l'anglais : je l'ai eu en 6e, 5e et imaginez mon désespoir lorsque j'ai su que je l'avais en tant que prof en 3^{e} et professeur principal". Mais, dans l'ensemble, l'apprentissage semble un peu transcender l'enseignant.

En collège, Mérième venait avant tout à l'école pour retrouver les copains en cours. "En troisième, je ne m'intéressais à aucune matière donc je ne sentais pas que les maths avaient quelque chose à me donner. Je n'avais aucune réaction envers les maths sauf que c'était une heure au collège sans plus (comme pour les autres matières)".

En fin d'année, il semble que Mérième vienne à l'école pour apprendre des connaissances avec même, un certain plaisir.

En résumé, Mérième est préparée mentalement à suivre les cours de Première et arrive déjà avec un bagage intellectuel certain et une grande confiance en elle. Nous verrons par la suite que Mérième a franchi cette étape avec intelligence et humanité.

---

[5]souligné par Mérième.

I.2.4 Le cas de Frédéric

• *Le passé scolaire*

Après une scolarité sans problème en primaire, Frédéric rentre en sixième. Une maîtrise insuffisante de la langue française (écriture, orthographe, construction des phrases et oral), un "travail brouillon, anarchique qu'il ne parvient pas à dominer" compromettent son année de sixième. Malgré des efforts notés par l'ensemble des professeurs, Frédéric redouble cette classe. Il garde le même professeur de français qui note un travail approfondi et des progrès réguliers. En fin d'année de sixième, des résultats convenables et un travail sérieux dans l'ensemble des matières lui permettent de passer en cinquième. En cinquième, on note à nouveau un travail et des résultats insuffisants. Frédéric est orienté en quatrième technologique. Pendant ces deux années, Frédéric redevient un élève sérieux, appliqué, agréable en classe qui obtient de bons résultats. En français, ses résultats voisinent la moyenne ; en maths, il obtient 15 ; 16 ; 16,1 sur l'année. Frédéric est alors orienté en BEP comptabilité. Il réalise deux années de BEP satisfaisantes : en mathématiques, sa moyenne oscille entre 13,5 et 17. Ces résultats restent très moyens en français. Il est orienté selon son choix en Première G d'adaptation.

• *Les projets d'avenir*

Frédéric n'a pas de projet précis de métier mais il veut s'orienter vers une section comptabilité pour poursuivre ses études vers une activité comptable.

• *L'articulation entre le BEP et la Première G*

A l'entrée en Première, Frédéric pensait que l'enseignement proposé serait proche de celui reçu en BEP. A posteriori, Frédéric n'a pas conservé ce point de vue. "Je ne me suis pas trop rendu compte de la différence entre la Première G et le BEP". Il indique que le travail personnel demandé a été plus important, beaucoup plus synthétique et exigeait une plus grande rigueur dans la formulation des connaissances. En mathématiques, il est gêné par le changement de contrat intervenu en Première : on produit des expressions, il ne faut plus seulement appliquer des formules. Il rajoute : "Je me suis aperçu qu'il fallait toujours démontrer notre réponse, car en BEP, il suffisait d'inscrire le résultat avec les calculs mais en aucun cas, on devait justifier notre réponse par des phrases explicatives. "

• *La représentation des mathématiques*

Frédéric se représente les mathématiques d'abord en termes de contenus : en particulier, il aime les statistiques, les pourcentages, les fonctions linéaires et affines et a trouvé facile les cours correspondants. Au contraire, il n'est pas à l'aise en géométrie.

Mais il voit avant tout dans les mathématiques, une activité nécessaire dans la formation et qui permet d'éviter de erreurs de raisonnement. Nous retrouverons souvent ce leitmotiv par la suite.

• *Le rapport à l'école et au savoir*

Frédéric relie ses difficultés scolaires à des raisons très diverses : manque de motivation, mais aussi, manque d'intérêt pour l'école et des difficultés d'apprentissage. Ses bulletins scolaires confirment ces origines différentes à travers les appréciations des professeurs.

Frédéric travaillait au collège et en BEP sur des tâches répétitives et très stéréotypées. Ses objectifs étaient, comme pour Caroline, de passer dans la classe supérieure, de retrouver ses copains, d'apprendre des connaissances pour éviter d'"attraper" trop de lacunes.

Son regard sur le savoir enseigné semble aussi dépendre du professeur : en particulier, il dit avoir aimé les maths et le français à cause des enseignants. Ce fut le contraire pour l'anglais qu'il détesta. Il considère qu'à moyen terme, l'école doit permet d'apprendre des connaissances utiles à un métier et donc d'avoir un bon métier. Dans ce but, il est nécessaire d'apprendre les connaissances des différents domaines du programme enseigné.

En résumé, Frédéric n'avait pas pris conscience des ruptures entre le BEP et la Première. Il est rentré en Première avec des connaissances en mathématiques très spécialisées au contexte tertiaire, comme nous l'avons vu dans l'analyse de son cahier, une représentation des mathématiques très utilitaire, un projet déjà très arrêté pour faire de la comptabilité.

II. L'ENSEIGNEMENT DISPENSÉ EN PREMIÈRE G

II.1 NOS OBJECTIFS

Lorsqu'a débuté l'enseignement dont nous rendons compte dans ce paragraphe de façon très synthétique, notre travail de recherche nous avait permis d'identifier certaines différences dans les rapports institutionnels à l'algèbre en BEP et Première G et de constater que les rapports à l'algèbre de nos élèves à l'entrée en première G étaient très différents de ceux normalement attendus. Comme enseignante, nous avons choisi de prendre en compte ces différences, au moins provisoirement en début d'année scolaire, ainsi que les ruptures de contrat qu'elles allaient nécessairement produire.

Notre objectif a été de permettre aux élèves de faire évoluer, voire de reconstruire, leurs rapports personnels à l'algèbre. C'est pour le rendre possible que nous avons tenté de faire vivre le *jeu de la dévolution* [Brousseau, 1990]. Nous avons donc construit globalement nos séquences d'enseignement autour des principes suivants :

- donner aux élèves la possibilité de revivre des situations a-didactiques afin qu'ils trouvent l'occasion, à plusieurs moments de l'année, de reconstruire un rapport à l'algèbre élémentaire plus idoine au rapport institutionnel en jeu en Première G,
- permettre la consommation des nécessaires ruptures de contrat mises en évidence,
- prendre en compte les appuis repérés dans l'analyse des cahiers.

Répétons qu'il ne s'agissait en aucun cas de construire une ingénierie didactique. Nous voulions créer des conditions, d'une part, pour permettre aux élèves de construire les connaissances mathématiques attendues au baccalauréat technique en fin de terminale, d'autre part, pour étudier l'évolution et les conditions d'évolution des profils d'élèves au moins sur le moyen terme. Nous avons donc proposé un enseignement différent de l'enseignement habituel, sur le long terme, qui a fonctionné cependant sans trop singulariser la classe.

Il ne nous est pas possible, dans le cadre de ce document, de présenter et donc a fortiori d'analyser de façon détaillée notre enseignement. Mais il nous semble aussi impossible de présenter l'évolution des profils sans donner au lecteur des repères sur l'enseignement qui a conditionné cette évolution. C'est pourquoi dans le paragraphe suivant nous présentons synthétiquement la façon dont les principes généraux cités ci-dessus ont été mis en œuvre.

II.2 LA MISE EN ŒUVRE DES PRINCIPES

II.2.1 Reconstruire via de l'a-didactique

Nous avons proposé aux élèves des situations, échelonnées au cours du premier trimestre voire des deux premiers trimestres, pour leur permettre de reconstruire diverses formes de compétences algébriques dans les dimensions outil et objet, dans des domaines d'emploi aussi diversifiés que faire se peut. Nous avons pour ceci construit, tout en respectant les exigences du programme, des situations-problèmes adaptées aux connaissances algébriques mises en scène dans un fonctionnement laissant place à des phases a-didactiques [Douady, 1984], [Brousseau, 1986].

Précisons dans ces grandes lignes la démarche suivie dans ce type d'action didactique, à partir d'un exemple de séquence :

<u>Thème mathématique support</u> : la programmation linéaire

Objectifs :

- Faire vivre et donner du sens à la rupture arithmétique/algèbre
- Mettre en évidence les conditions nécessaires pour traduire algébriquement des relations exprimées en langage naturel
- Caractériser les instruments de la résolution algébrique

Organisation de la séquence :

Deux étapes sont proposées dans cette séquence (2 heures):

1. Une première situation-problème qui permet une démarche arithmétique (du fait du nombre fini réduit de solutions envisageables).

<u>Enoncé 1</u> : Pour faire pousser une plante, il est nécessaire d'utiliser deux types d'engrais, A et B, en même temps. Chaque sachet de 4 g d'engrais A la fait pousser de 15 cm. Chaque sachet de 20 g d'engrais B la fait pousser de 3 cm.

Je ne veux pas que la plante dépasse 90 cm et je sais qu'à partir de 80 g, au total, les engrais deviennent toxiques.

Combien de sachets faut-il utiliser pour que la plante soit la plus grande possible ? Quelle sera sa taille ?

2. Une deuxième situation-problème où la démarche arithmétique devient trop coûteuse.

<u>Enoncé 2</u> :

Un certain animal d'un zoo a besoin chaque jour, pour se nourrir, d'absorber au moins 3 kg de féculents, 4,5 kg de fruits, 15 kg de fibres végétales et 12,75 kg de viandes. Pour obtenir la nourriture, on mélange deux farines A et B dont les compositions par kilogramme sont données dans le tableau ci-dessous :

	A	B
Féculents	250 g	0
Fruits	0	250 g
Fibres	250 g	500 g
Viande	500 g	250 g

Déterminez la composition du mélange pour nourrir l'animal au moindre coût sachant que le prix au kilogramme de la farine A est 18F et celui de B est 30F.

Scénario de la séquence :

Le scénario ménage une alternance de phases a-didactiques et didactiques pour permettre aux élèves de vivre et de donner du sens à la rupture arithmétique/algèbre, tout en les aidant à gérer cette rupture. Il est conçu de la façon suivante :

• Résolution de l'énoncé 1:

Les élèves travaillent par groupe de quatre pendant une demi-heure : ils peuvent utiliser des démarches personnelles anciennes pour résoudre le problème ; on s'attend à voir réapparaître de nombreuses résolutions arithmétiques.

• Présentation des solutions développées par chaque groupe, débat :

Le professeur demande successivement au représentant de chaque groupe de venir présenter sa solution, en s'arrangeant pour que les démarches arithmétiques soient présentées avant les démarches algébriques.

Il organise un débat autour des solutions, sur leur champ de validité, leur coût respectif.

Il propose une mise au point collective sur les instruments de la résolution algébrique puis graphique. Les différentes formulations algébriques incorrectes sont mises en évidence et analysées. On aborde les conditions nécessaires pour traduire algébriquement des relations exprimées en langage naturel (articulation entre registre du langage naturel et registre des inéquations, différents statuts que peuvent prendre le signe d'égalité, les lettres, articulation entre registre des inéquations et registre des représentations graphiques) ;

• Résolution de l'énoncé 2 :

Les élèves réalisent une recherche individuelle. Le professeur propose un soutien en cas de blocage à l'utilisation des instruments de la résolution algébrique.

• Discussion, institutionnalisation :

Une discussion permet de mettre en évidence les raisons pour lesquelles une démarche arithmétique n'est plus adaptée, le faible coût de la démarche algébrique et son caractère automatique.

Le professeur institutionnalise la démarche algébrique, le travail dans les différents cadres de résolution et les techniques de résolution associées.

Nous avons réalisé ce travail environ une fois par quinzaine, sur des situations qui nous semblaient importantes du point de vue de la réinstallation des connaissances algébriques.

II.2.2 Prendre en compte les ruptures de contrat

L'analyse des programmes comme celle des cahiers d'élèves a permis de mettre en évidence des ruptures importantes de contrat. Nous les avons explicitement prises en compte dans la gestion du programme, la progression du cours et des exercices proposés aux élèves. Nous voudrions dans ce paragraphe préciser comment nous avons principalement organisé cette prise en compte.

De nombreuses notions ont déjà été étudiées par les élèves en BEP mais souvent avec un point de vue différent de celui adopté en Première. Dans la mesure du possible, nous avons pointé les notions ou démarches déjà étudiées, leur domaine de validité, leur efficacité et ses limites voire les obstacles occasionnés. La progression choisie pour les exercices devait permettre une telle détection. Les principales sources de rupture que nous avons essayé de gérer sont les suivantes :

• *La rupture avec la démarche arithmétique*

Il nous a semblé important de faire émerger les démarches arithmétiques des élèves, très prégnantes à l'entrée en Première. Après avoir fait résoudre un problème où la démarche arithmétique s'avérait efficace, nous avons proposé des exercices qui mettaient en évidence leurs limites et leur inefficacité. La situation de programmation linéaire décrite précédemment en donne un exemple où le travail de cette rupture est repris à propos de l'introduction de problèmes nouveaux. Mais cette rupture a été également abordée à travers le travail sur des objets anciens comme les problèmes du premier degré. Elle a permis de travailler le statut du signe d'égalité et des lettres et de contribuer à installer l'algèbre comme outil de preuve de l'arithmétique (cf problèmes analogues au problème du prestidigitateur).

• *La dimension outil et la rupture avec le seul contexte d'application tertiaire*

Nous avons montré qu'en BEP le rapport à l'algèbre passe d'abord par un rapport d'utilisation de formules dans des situations contextualisées au secteur tertiaire qui mettent en jeu un traitement algorithmisé semblable à celui donné dans des exercices modèles. Ceci conduit à un rapport organisé autour de la substitution des lettres-grandeurs par des valeurs numériques et de la résolution d'équations du premier degré.

Dès le début d'année nous avons proposé, à côté de situations habituelles, des situations liées au contexte tertiaire où il n'était plus possible d'utiliser directement des formules et qui conduisaient à travailler dans le cadre algébrique ou fonctionnel : résolution d'équations de degré supérieur ou égal à 1, étude de fonctions polynômes du deuxième ou du troisième degré ou de fonctions rationnelles. Nous avons diversifié peu à peu les emplois et les domaines d'emploi pour les amener à mobiliser d'autres types de traitement algébrique que ceux utilisés en BEP : utilisation de l'outil algébrique pour faire fonctionner d'autres notions, production d'expressions algébriques et de relations, avec par voie de conséquence production d'autres techniques de résolution.

En particulier, nous leur avons montré comment démontrer les formules utilisées en BEP puis comment réinvestir ce savoir-faire pour résoudre d'autres problèmes de Première.

Comme on peut l'imaginer, cette rupture ne fut pas sans provoquer des conflits : la production d'équations ou d'expressions fonctionnelles fut un peu mieux acceptée quand le travail commença vraiment à donner des résultats.

• *La dimension objet et le rapport à la manipulation formelle*

L'analyse des cahiers d'élèves de BEP a bien montré, qu'excepté collectivement avec les professeurs, les élèves ont peu travaillé la manipulation formelle des expressions algébriques, que ce soit au niveau de la technique ou en faisant intervenir les dimensions syntaxique et sémantique des expressions. Nous avons réintroduit le calcul algébrique à partir de situations d'emploi qui nécessitaient l'utilisation de la manipulation formelle, le sens des expressions restant en filigramme (problèmes conduisant à des preuves dans le cadre numérique, géométrique ou graphique). A partir de ces supports, nous avons travaillé les transformations algébriques et tenté de mettre en place un équilibre entre construction du sens et familiarité technique avec des algorithmes.

Là encore, nous avons proposé des exercices où il était possible d'utiliser "directement" des algorithmes et d'autres où, très rapidement, ce comportement était mis en échec : dans ce cas, nous avons travaillé l'implicite des écritures algébriques, "fait parler" les expressions en termes de processus de calcul ou de résultat, articulé le registre des écritures algébriques avec d'autres registres, engagé les élèves à faire des contrôles numériques ou autres[6].

• *Articulation entre le registre des écritures algébriques et les autres registres*

Mérième fut la seule élève ayant acquis avant l'entrée en Première un début de flexibilité à articuler différents registres d'écritures. Nous verrons le rôle de cet acquis dans l'évolution de Mérième. Nous avons beaucoup développé un travail d'interprétation d'expressions mettant en jeu au moins deux registres, en insistant sur la non-congruence sémantique éventuelle de deux représentations d'un même objet et la nécessaire reformulation pour obtenir une traduction algébrique opératoire, en insistant aussi sur l'articulation entre le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques. L'utilisation d'imagiciels a pris une part importante dans la gestion des activités associées. Citons par exemple :

---

[6]C'est ici en particulier, que les élèves ont utilisé le logiciel EXOPOLY pour pratiquer le développement et la factorisation d'expressions algébriques.

- le logiciel EQUA pour associer les variables visuelles du tracé d'une droite et les variables symboliques de l'équation réduite associée ;

- le logiciel PARABOLE pour associer fonction trinôme et parabole, ...

De même, l'utilisation d'imagiciels a joué un rôle important pour faire "comprendre" aux élèves la notion de variable et pour faire conjecturer le sens de variation d'une fonction.

II.2.3 Accompagner les ruptures

Il nous a semblé nécessaire non seulement de permettre aux élèves de vivre, de façon "non purement contractuelle", les ruptures en construisant des situations permettant de les mettre en scène de façon a-didactique, mais aussi d'accompagner en un certain sens ces ruptures.

Ceci s'est effectué via la dialectique étroite que nous avons cherché à instituer entre les jeux a-didactiques et didactiques, comme nous avons essayé de le montrer très schématiquement sur l'exemple de la programmation linéaire.

Ceci s'est effectué aussi en ayant recours au niveau méta [Robert, Robinet 1989]. A ce niveau, citons par exemple les actions suivantes :

- explicitation de certains éléments relevant de la coutume didactique [Balacheff 1988] en rupture avec les pratiques précédentes ou plus généralement les pratiques usuelles (en particulier, le rôle des erreurs) ;

- explicitation du jeu joué entre démarches anciennes et nouvelles ;

- enseignement de méthodes, par exemple, questionnement explicite en termes de stratégies et méthodes dans la résolution d'une classe de problèmes donnés (résolution d'équations).

En dernier lieu, s'est ajouté à diverses occasions un discours plus général sur les mathématiques, leur apprentissage, la normalité et le caractère inévitable des erreurs, des difficultés et aussi au cours de l'année, de façon publique ou plus privée, sur la nécessité des efforts, du travail de la technique.

III. MÉTHODOLOGIE POUR SUIVRE L'ÉVOLUTION DES PROFILS

L'étude de l'évolution des profils initiaux des élèves reprend les deux niveaux de description utilisés dans la définition de ces profils. Nous suivons, d'une part, les variations de l'ensemble des types de traitement algébrique maîtrisés, et d'autre part, celles des modalités relatives aux composantes d'analyse (cf chapitre 6).

III.1 MÉTHODOLOGIE : LES SÉANCES-REPÈRES

• *Mise en place*

A partir du deuxième trimestre, nous avons construit des séances-repères pour suivre l'évolution des profils initiaux des sept élèves venant de BEP tertiaire. Les séances-repères ont eu lieu en dehors du cours de mathématiques, à peu près toutes les trois semaines[7]. Elles réunissaient les sept élèves, deux observateurs M. Artigue et moi-même et parfois d'autres élèves de Première G d'adaptation, Aline, Christophe, Véronique ou Zakia[8]. Chaque observateur observait un groupe d'élèves. Les élèves savaient que nous exploitions ces séances dans le cadre de notre recherche et, en contrepartie, nous essayions de leur apporter une aide individualisée.

• *Objectifs*

Pour repérer des évolutions mêmes subtiles et légères, il nous a semblé nécessaire de ne pas nous limiter à étudier le fonctionnement algébrique autonome. Suite à une résolution autonome d'exercices, nous avons donc cherché à déterminer comment les élèves exploitaient des propositions d'aide, des éléments explicatifs fournis par leurs camarades ou l'observateur. Nous observions aussi l'évolution des connaissances algébriques, non seulement à travers celles de capacités autonomes mais aussi à travers un fonctionnement "aidé".

Dans ce but, il nous a semblé nécessaire de construire des exercices suffisamment complexes pour permettre d'étudier les phases transitoires d'une résolution. Chaque exercice imbriquait de fait plusieurs types de tâches mettant en jeu différentes composantes de la structure d'analyse. En ce sens, les exercices construits pour ces séances diffèrent donc de ceux construits pour le diagnostic.

De plus, pour des raisons évidentes de contrat, les exercices font intervenir des situations en accord avec la progression de l'enseignement en première G. En particulier, beaucoup plus d'exercices intègrent la dimension fonctionnelle. Ils tiennent compte aussi

---

[7]Voici les dates des séances-repères : 2 Février 1993, 15 Mars 1993, 2 et 9 Avril 1993, 7 Mai 1993 et 4 Juin 1993.

[8]Nous remercions M.J. Perrin d'avoir bien voulu remplacer M. Artigue lors de la séance-repère du 7 Mars 1993.

du travail spécifique réalisé dans la classe autour du calcul algébrique et des représentations. Nous présenterons les tâches constitutives des exercices dans le paragraphe suivant.

• *Organisation des séances-repères*

Pour prendre en compte nos objectifs, nous avons organisé les séances-repères en deux périodes :

- pendant une demi-heure, les élèves résolvaient de façon autonome les tâches proposées ;

- la demi-heure suivante, l'observateur et les élèves analysaient le travail effectué dans le cadre d'un travail collectif. L'un des objectifs de cette phase était d'amener chaque élève à prendre de la distance par rapport à sa production : il leur était demandé d'expliciter, d'évaluer, voire de corriger si nécessaire leur solution. L'observateur menait le débat, proposait des éléments explicatifs, des aides pour tenter de faire bouger les points de vue respectifs et les connaissances mises en jeu par les élèves. Il essayait aussi de cerner ce qui était accessible avec aide, en jouant sur des connaissances en germes. Il essayait aussi de tester la force des résistances repérées, voire de faire apparaître les points de blocage.

Chaque observateur notait avec soin, pour chaque élève du groupe, les phases de la résolution (temps mis pour chaque question, changement de stratégie non visible à partir d'une production écrite, etc) ainsi que le déroulement des entretiens. Pour ces derniers, l'observateur se centrait plus particulièrement sur les réactions des élèves aux propositions d'aide : réaction immédiate et exploitation des aides par appui sur des connaissances en germe, remise en question d'un résultat, ou au contraire, inexploitation des propositions et maintien d'une solution erronée ou d'un blocage. Certains groupes étaient enregistrés.

• *Analyse des séances-repères*

Nous avons, dans un premier temps, décrit les productions écrites des élèves réalisées pendant la période de travail autonome en utilisant la structure d'analyse définie aux chapitres 3 et 4 : pour ceci, nous avons déterminé les valeurs prises par les critères mis en jeu par les tâches. Nous avons aussi dépouillé et retranscrit les enregistrements réalisés pendant les séances-repères.

Nous ne présenterons ici qu'une synthèse des différentes analyses afin d'illustrer les évolutions constatées dans les profils d'élèves. Nous indiquerons, en particulier, les types de traitement algébrique attendus maîtrisés dans les différentes situations et nous exploiterons certains épisodes extraits de la période d'activité aidée des élèves qui correspondent à des moments où se manifestent, soit les germes d'une évolution, soit des indices d'un blocage.

III.2 VUE D'ENSEMBLE DES EXERCICES DES SÉANCES-REPÈRES

III.2.1 Classification selon les types de tâches

Nous avons construit les cinq séances-repères sur des modèles semblables, afin de pouvoir réaliser une étude transversale de l'évolution des profils initiaux.

Nous avons classé les questions de chaque exercice selon les divers types de tâches algébriques (cf chapitre 2). Ceci donne la répartition suivante :

• tâches techniques : calcul numérique [I.2 (15/3), I.1.b) et II.2 (9/4)], calcul algébrique [V.1 (4/6)], résolution d'équation [II.4 (9/4)], calcul de dérivée [III.3 (7/5) et III (4/6)]) ;

• tâches d'interprétation et de reconnaissance :

- internes au cadre algébrique (recherche des écritures algébriques désignant une expression donnée [1 (5/2), I (15/3), II (9/4), III.3 (7/5), II (4/6)]),

- mettant en jeu l'articulation entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres, soit du registre des écritures algébriques vers le registre du langage naturel (explicitation du processus de calcul réalisé pour obtenir une expression algébrique donnée à partir de x [IV.1 (15/3), I.2.a) (9/4)]), soit entre le registre des écritures algébriques et le registre des représentations graphiques (association entre deux représentations d'une expression dans les deux registres [3) 4)c)f) (5/2), I.4 (9/4)], interprétation graphique [4 b) e) (5/2), III.3 (15/3), II.4 (9/4), III.4 (7/5), V.2 (4/6)] ou résolution graphique [III.5, IV (4/6)]) ;

Les tâches internes au cadre algébrique nécessitent l'enchaînement de plusieurs types de traitement algébrique pour permettre d'étudier les composantes syntaxiques et sémantiques mises en jeu par les élèves dans la manipulation formelle des expressions.

• tâches de mathématisation :

- traduction algébrique des propriétés numériques, géométriques ou graphiques [I (5/2), III.5,6 (15/3), II.4 (2/4)]

- mise en équation de situations [IV.2 (15/3), III.1 (9/4)], ces situations étant liées au cadre fonctionnel [III.2 (9/4), II (7/5), I (4/6)] dans un contexte concret ,

- preuve [2 (5/2), II (15/3)].

Nous pouvons mettre alors en évidence les élèves pour qui, les situations dans lesquelles évoluent les objets et les outils algébriques commencent à être génératrices de signification pour l'algèbre.

Nous récapitulons dans un seul tableau, la répartition des tâches des cinq séances-repères en fonction des critères mis en jeu, des types de traitement algébrique attendus dans la résolution de chaque tâche, des registres concernés.

Séance-repère Critères	5/2/1993	15/3/1993	9/4/1993	7/5/1993	4/6/1993
type de trait algébrique :					
Réalis. de tâche d'ordre num.		I.2, III.2,4 (substitution)	I.1.b, I.3.a, II.2 (substitution)		
Repr . de tâches alg niv1	1) 2) développ^t	I.1,II développ^t	I.3.b,II.1,	III.3 développ^t 4 calcul dérivée	IIIcalcul dérivée IV.1 résol équ,
Repr. de tâches alg niv2		III.5,6 résol équ ou syst équ	II.4 résol équat. 2^e deg		V.1 calcul
Interprétation	1) 2) 3) 4)	I.1,2, III, IV.1	I.1.a, I.2.a,II.2, III.1	III.4	V.1,2
Etude autres notions	I.1,2 traduction algébrique ppté graphique	III.5, III.6 trad. algébrique ppté graphique	I.3.b, II.3 trad. alg. relation	III.2 étude de fonction	III étude de fonction
Trad/branc^t sur formule					I
Trad/production ds contexte fam					I
Trad/prod ds cont. non fam	2)	II, IV.2	III.1,2	II.dans cadre géométrique	
Utilisation de l'algèbre pour prouver	2)	II			
Démarche de résolution	2)	II, IV.2		II	I
Statut du signe d'égalité	3) 4), I	III	I.3.a), II	III.1	IV
Statut ds lettres	2) 3) 4)				
Objet et statut des objets	2) 3) 4)				
Type de formation	1) 2)	I.1, II	I, II	III.1,2	II
Type de traitement	1) 2) 3)	I.1, II	I, II	III.1,2	II
Type de conversion	2)$R_{lg\ nat->alg}$ 4)$R_{grap<->alg}$	II$R_{lg\ nat->alg}$ III$R_{grap<->alg}$ IV$R_{alg<->algo}$	I $R_{alg<->algo}$ II $R_{grap<->alg}$ III.1,2$R_{lg->alg}$	II$R_{lg\ nat->alg}$	I $R_{lg\ nat->alg}$ IV, V.2 $R_{grap<->alg}$

Tableau n°1 : Vue d'ensemble des types de tâches pour l'ensemble des cinq séances-repères

La présence de plusieurs composantes d'analyse pour un même exercice met bien en évidence bien la complexité de chaque exercice.

III.2.1 Présentation des exercices de chaque séance-repère

Avant d'analyser l'évolution des profils d'élèves, nous présentons les exercices des cinq séances-repères pour en avoir une vue d'ensemble. Globalement, ils recouvrent les tâches suivantes :

- recherche des écritures algébriques désignant une expression donnée,

- manipulation formelle ou calcul d'ordre numérique dont l'efficacité dépend du choix de l'écriture,

- interprétation et/ou traduction algébrique de situations du premier ou du deuxième degré dans l'articulation entre le cadre graphique et le cadre algébrique,

- traduction algébrique d'une situation, soit pour prouver une propriété numérique, soit pour résoudre une équation, soit pour se ramener à l'étude d'une fonction.

Séance-repère du 2 Février 1993 :

1) Les deux expressions $\dfrac{((a+4)3+a)}{4}$ et $a+3$ sont-elles égales ?

2) Un élève multiplie un nombre par 5 et ajoute 12 au résultat. Il soustrait alors au résultat le nombre initial et divise le résultat par 4. Il remarque qu'il obtient un nombre supérieur de 3 au nombre initial.
Il dit : "Je pense que cela arrivera, quel que soit le nombre initial".
Est-ce vrai ? Justifier votre réponse.

3) Vous avez à résoudre le système $\begin{cases} 2x+y=5 \\ -4x-2y=-10 \end{cases}$
Un camarade vous propose la résolution suivante :

$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ -4x-2(-2x+5)=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ -4x+4x-10=-10 \end{cases}$$

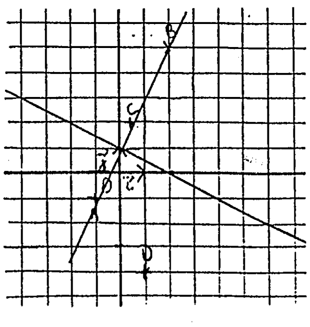
$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ 0x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$$

Que pensez-vous de cette résolution (stratégie, méthode et résultat) ?

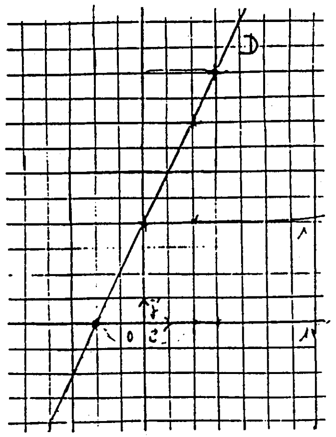
4) (O,i,j) est un repère du plan.
Soit E la représentation graphique de la fonction affine f définie par $x \longrightarrow 2x+1$
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Expliquez chaque réponse. Si vous ne savez pas, répondez par ?

(a) *(E)* est une droite	*Vrai*	*Faux*	?
(b) Après calculs on obtient $f(-1)=-1$, $f(2)=5$ et $f(0.5)=2$ Les points $A(-1,-1)$, $B(2,5)$ et $C(0.5,2)$ sont alignés.	*Vrai*	*Faux*	?
(c) Une équation de *(E)* est $y=2x+1$	*Vrai*	*Faux*	?
(d) Les coordonnées (x,y) de tout point M de *(E)* vérifient la relation $2x-y+1=0$	*Vrai*	*Faux*	?
(e) Le point $D(1,-4)$ appartient à *(E)*	*Vrai*	*Faux*	?
f) Voici la représentation graphique de f dans (O,i,j)	*Vrai*	*Faux*	?



I.1

Le plan étant rapporté à un repère *(O,i,j)* :
Déterminer l'ordonnée du point *A*, sachant que *A* est le point de la droite *(D)* d'abscisse *15* représentée sur la figure ci-dessous.



2 Soit f la fonction affine définie par $x \longrightarrow 2x+4$

a) Tracer la représentation graphique D' de la fonction f

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de D' avec l'axe $x'Ox$ puis avec l'axe $y'Oy$

3. On considère l'ensemble E des points du plan dont les coordonnées (x,y) sont liées par la relation $3x+2y-1=0$.

a) Représenter graphiquement E. Justifier votre tracé.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de E avec l'axe $x'Ox$ puis avec l'axe $y'Oy$.

4. Existe-t-il des points communs à D'' et à E ? Si oui, après l'avoir justifié, déterminer algébriquement les coordonnées du point commun.

5. Représenter graphiquement l'ensemble F des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient le système d'inéquations

$$\begin{cases} 2x-y+4<0 \\ 3x+2y-1>0 \end{cases}$$

Séance-repère du 15 Mars 1993 :

I.1 Les écritures suivantes désignent-elles le même polynôme du second degré ? Justifier votre réponse.

$-2(x-3)(x+1)$ $\qquad$ $-2x^2+4x+6$ $\qquad$ $-2(x-1)^2+8$

I.2 Lorsque x vaut 3, quelle expression choisissez-vous pour calculer la valeur du polynôme ? Justifier et faire le calcul.

II. Un élève multiplie un nombre par 5 et soustrait 12 au résultat. Il soustrait alors au résultat le nombre initial et divise le résultat par 4. Il remarque qu'il obtient un nombre inférieur de 3 au nombre initial et ceci, quel que soit le nombre initial.
Est-ce vrai ? Démontrer-le.

ou bien

II. On considère un entier. On le multiplie par son consécutif. Au résultat obtenu, on soustrait l'entier initial. Que constatez-vous ? Prouvez le.

III. Soit f la fonction affine définie par $x \longrightarrow -2x^2+4x+6$
Dans un repère (I,i,j), on considère la courbe représentative P de la fonction f d'équation $y=-2x^2+4x+6$.
1. Décrivez rapidement comment vous procédez pour obtenir la courbe représentative P dans (I,i,j) lorsque x prend des valeurs de -2 à 4.

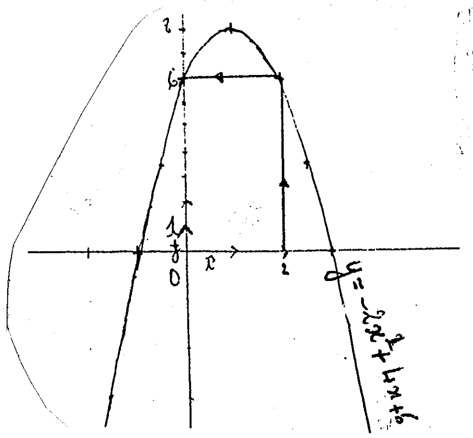
2. Le couple (2,4) vérifie-t-il la relation $y=-2x^2+4x+6$? Justifier.

3. Le point A(2,4) appartient-il à la courbe P d'équation $y=-2x^2+4x+6$? Justifier.

4. Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe P d'équation $y=-2x^2+4x+6$? Justifier.

5. Déterminer graphiquement (s'ils existent) l'abscisse des points de la courbe P d'équation $y=-2x^2+4x+6$ dont l'ordonnée est nulle ? Quelle relation vérifie l'abscisse des points de la courbe P dont l'ordonnée est nulle ? Justifier puis indiquer comment déterminer les valeurs recherchées.

6. Soit la fonction g définie par $x \longrightarrow 2x-+2$
D est la droite représentative de g dans (O,i,j)
Quelle relation vérifie l'abscisse des points d'intersection des courbes B et D, s'ils existent.
Indiquer votre démarche pour déterminer l'abscisse des points d'intersection des deux courbes, s'ils existent.



IV. 1) Quel est le processus de calcul permettant d'obtenir à partir de x, $(10-0{,}5x)(80+10x)$?

2) Le directeur d'un théâtre de verdure remarque que, lorsque le prix de la place est de 10F, il y a eu 80 billets vendus. A chaque baisse de 0,50F, il y a dix spectateurs de plus.

a) <u>Si x est le nombre de spectateurs,</u> l'expression précédente exprime-t-elle la recette d'une soirée de théâtre ? Justifier

b) Après une étude fine, le directeur affirme que la recette maximale est atteinte, lorsqu'on réalise 6 baisses de 0,50F sur le prix du billet initial. Est-ce-vrai ?

Séance-repère du 2 et 9 Avril 1993 :

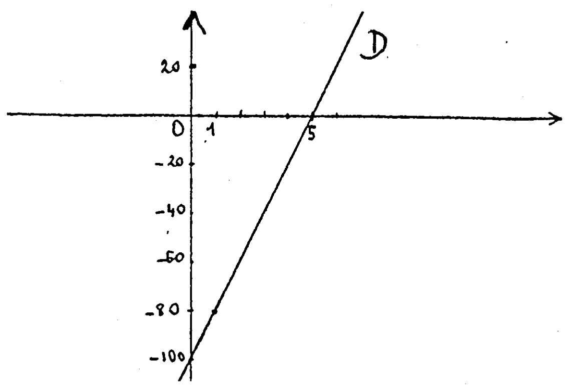
I.1.a) Indiquer un processus de calcul permettant d'obtenir $x^2 - (10-x)^2$ *à partir d'un nombre x.*

1.b Calculer le résultat obtenu pour 5.

3.a) Le couple (4,-10) vérifie-t-il la relation $y = x^2 - (10-x)^2$*. Justifiez*

3.b) Existe-t-il des nombres permettant d'obtenir -5 comme résultat ? Si oui, lesquels ? Justifiez.

4) Soit C la fonction numérique qui a tout nombre x associe $x^2 - (10-x)^2$
Est-il vrai que la droite D représentée ci-dessous est l'ensemble des points M(x,C(x)) lorsque x varie ? Justifiez.



II. Soit $A : x \longrightarrow 2x^2 - 20x+100$. Les écritures suivantes désignent-elles le même polynôme du second degré ? Justifier votre réponse.

I.1 Les trois écritures désignent-elles *A(x)* ?

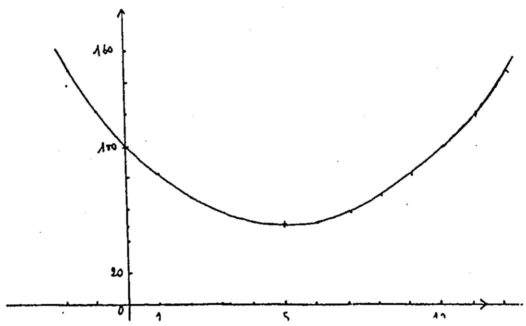
$x^2 - (10-x)^2$ $\qquad$ $(x-10)^2+x^2$ $\qquad$ $2(x-5)^2+50$

I.2 Quelle expression choisissez-vous pour calculer A(x) ? Justifier. Expliquer et calculer A(5).

I.3 Existe-t-il des valeurs de *x* pour lesquelles *A(x)* s'annule ?

I.4 Résolvez l'équation *A(x) = 0*.

Expliquez comment vous vérifiez ces réponses en exploitant la représentation graphique de la fonction x——> A(x)



III.1On admet qu'un rubis est une pierre dont la valeur en francs est égale à 5000 fois le carré de sa masse en grammes.

Un rubis de 10 grammes tombe et se casse en deux morceaux pas forcément de même taille. Soit x la masse en grammes de l'un des deux morceaux. Indiquez si les expressions suivantes expriment la valeur en francs obtenue lors de la vente des deux morceaux.

Expressions	Oui/Non	Justifiez
$5000(x^2+(10-x)^2)$		
$5000x^2+(10-x)^2$		
$5000(x+10-x)^2$		

III.2 Soit un nombre. On le soustrait à dix. On ajoute au carré du résultat précédent le carré du nombre initial. Comment varie le résultat obtenu en fonction du nombre initial ?
Est-il vrai que l'on obtient toujours un nombre supérieur à 50. Justifier votre réponse.

<u>Séance-repère du 7 Mai 1993 :</u>

Contexte : On veut fabriquer un cadre pour afficher des photos. On a déjà acheté 50 cm de baguette d'encadrement pour faire le cadre. On veut laisser en haut et en bas une marge de 2 cm de haut et de chaque côté une marge de 1 cm.

En fait, le problème se ramène au problème mathématique suivant : déterminer les dimensions d'un rectangle de 50 cm de périmètre pour que l'aire de la partie centrale de ce rectangle(c'est-à-dire l'aire de la partie centrale de ce rectangle (c'est-à-dire l'aire du rectangle privé des marges comme définies plus haut) soit maximale.

I. Existe-t-il plusieurs rectangles aynat un périmètre de 50 cm ? Donner des exemples.

II. On désire résoudre le problème initial. Proposez une résolution en essayant d'expliquer la stratégie utilisée, les différentes étapes, les calculs mis en jeu, le raisonnement.

III.1 Voici une étape de la résolution. Explicitez avec soin les étapes de calcul ou du raisonnement qui n'apparaissent pas.

<u>Mise en équation du problème.</u>

x et y vérifient l'égalité $2(x+y)=50$

Soit A l'aire (en cm$^{2)}$ cadre privé des marges :

$A = (x-2)(21-x)$

A = (x-2)(21-x)

III.2 L'aire dépend des deux dimensions. On considère la fonction qui à tout nombre x de l'intervalle [2 ;21] associe l'aire A, soit $a : x \longrightarrow (x-2)(21-x)$.

Indiquez comment vous étudiez cette fonction pour rechercher les dimensions du cadre pour que l'aire du cadre privé des marges soit maximal.

III.3 L'aire A dépend de x et on a défini $a(x) = (x-2)(21-x)$. Les expressions suivantes sont-t-elles égales ? Justifiez rapidement votre réponse à l'aide d'un seul calcul ou d'indices pertinents.

$(x-2)(21-x)$ $\quad$ $x-2(21-x)$ $\quad$ $-x^2+23x+42$ $\quad$ $(x-11{,}5)^2-90{,}25$

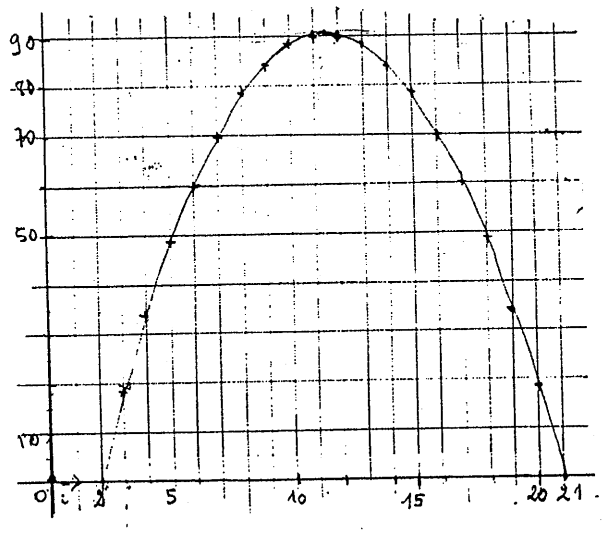
La fonction $x \longrightarrow -2x+23$ est-elle bien la fonction dérivée de la fonction a ? Justifiez.

III. 4 On considère la fonction $a : x \longrightarrow (x-2)(21-x)$

a) Voici la courbe représentative C de la fonction a dans un repère (O,i,j) d'équation $y=(x-2)(21-x)$

Interpréter la courbe C pour conjecturer le sens de variation de la fonction a sur l'intervalle [2;21].

b) Prouvez cette conjecture.



Séance-repère du 4 Juin 1993 :

I. Une entreprise fabrique des chaises. Les charges se répartissent en charges fixes : 7500F par mois et en charges variables : 12F par mois et par chaise.
Calculer le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois. Prouver votre conjecture.

II. Pour tout réel x non nul, on pose $C(x) = \dfrac{7500+12x}{x}$

Les expressions suivantes sont-elles égales à $C(x)$?

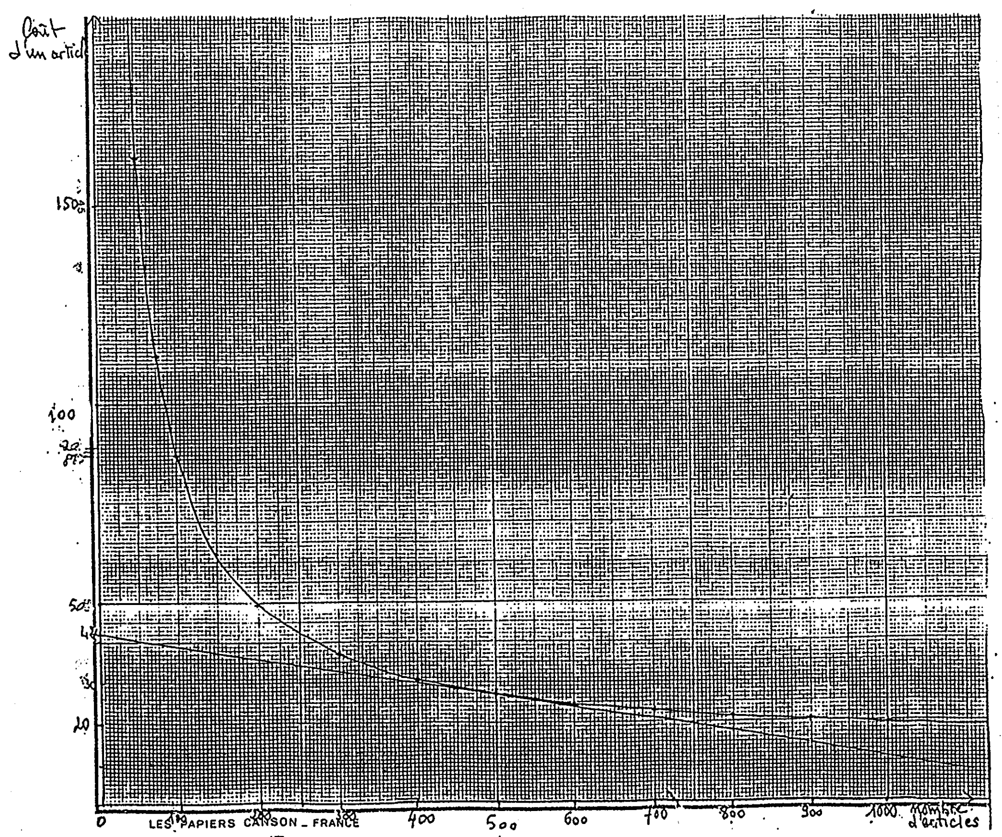
$\dfrac{7500}{x} + 12$; $\dfrac{7500+12x}{x}$; 7512 $12x + 7500\, x\dfrac{1}{x}$

III. On définit la fonction C par : $C(x) = \dfrac{7500+12x}{x}$

Etudier le sens de variation de C sur l'intervalle [1 ; 1000]. Comparer avec le résultat de la question I.
IV. Voici la courbe représentative de la fonction C dans un repère (O,i,j). C associe au nombre de chaises fabriquées par mois le coût moyen d'une chaise.
1. Résoudre graphiquement l'équation $C(x) = 87$.
Interpréter le résultat. Vérifier.

2. Déterminer graphiquement une valeur approchée de $C(87)$. Vérifier.

V. On rappelle que le coût marginal est $C(x+1)-C(x)$, x désignant le nombre de chaises fabriquées.
1. Calculer $C(x+1)-C(x)$
2. On constate que pour tout réel x non, $C(x+1)-C(x) = C'(x)$
Lire graphiquement une valeur approchée du coût marginal pour 500 articles. Retrouver le résultat par le calcul.



IV LES ÉTUDES DE CAS

IV.1 PRÉSENTATION

Notre objectif via les études de cas rappelons-le était d'étudier les évolutions constatées dans les profils des élèves que nous suivions dans la recherche. Notre objectif est de mettre en relation a posteriori, les profils initiaux présentés au chapitre 6, notre action enseignante telle que nous la voyons rétrospectivement et l'évolution des profils telle que nous la repérons maintenant à travers un certain nombre de marqueurs, de petites variations. Nous tentons de montrer, même si le caractère de notre travail reste encore très exploratoire, en quoi la structure d'analyse construite constitue un outil assez efficace pour faire apparaître des germes, des obstacles à l'évolution des profils. Nous pouvons aussi commencer à tester la validité de nos principes d'action, leur efficacité et leurs limites.

Pour rendre compte synthétiquement de cette étude, nous décrivons d'abord dans un tableau récapitulatif les productions écrites de chaque élève (données en annexe IV), relativement aux critères des composantes d'analyse mises en jeu dans les tâches, transversalement aux cinq séances-repères (cf chapitre 3 et 4).

Dans ce tableau, pour chaque tâche proposée, nous notons si l'élève a mobilisé le (ou les) type(s) de traitement algébrique attendu(s) pour la résolution d'une tâche donnée, puis si la solution effective est correcte ou non. Nous codons par C (respectivement par N ou I), le cas où le type de traitement algébrique attendu est mobilisé correctement (respectivement non mobilisé ou mobilisé de façon incorrecte).

Ensuite, nous décrivons et faisons ressortir, à la fois à partir de l'analyse précédente et à partir de certains épisodes des phases orales des séances-repères, les évolutions constatées, et plus précisément des germes de connaissances qui deviennent disponibles suite à une proposition d'aide, des leviers sur lesquels on peut jouer pour faire bouger certaines connaissances décelées au cours de la séance. Nous mettons en relation ces éléments, avec les points d'appui relevés dans les profils initiaux et les stratégies d'enseignement privilégiées. De même, nous mettons en lumière des résistances qui constituent autant de barrières, voire d'obstacles, à l'exploitation des aides proposées.

Nous décrivons tous ces "petits phénomènes" afin de montrer en "mouvement" des évolutions possibles ou des résistances à l'évolution. Nous tenterons aussi de montrer l'imbrication des différentes formes de connaissances algébriques, les conséquences que cela induit sur l'apprentissage de nouvelles connaissances, mais aussi le rôle d'éléments plus globaux tels que le rapport à l'école et au savoir sur l'évolution des profils.

IV.1 LE CAS DE CAROLINE

Caroline a participé à toutes les séances avec bonne volonté. Elle pensait qu'elle pourrait en profiter pour "mettre à plat" un certain nombre de difficultés et reconstruire d'autres connaissances. Pendant les phases orales, elle apparaît assez effacée, ayant des difficultés à exploiter les propositions d'aide. Mais comme nous allons le voir, tout au long des séances, Caroline a quand même évolué lentement, par petites touches.

Donnons d'abord une vue d'ensemble des productions écrites réalisées par Caroline au cours de ces séances-repères :

Séance-repère Critères	5/2/1993	15/3/1993	9/4/1993	7/5/1993	4/6/1993
type de trait algébrique : Réalis. de tâche d'ordre num.		I.2, III.2,4 (substitution) C N C	I.1.b, I.3.a, II.2 (substitution) C C C		
Repr . de tâches alg niv1	1) 2) développ^{t} I N	I.1,II développ^{t} C N N	I.3.b,II.1 N C II.4 résol équat. 2^{e} deg N	III.3 développ^{t} 4 calcul dérivée C N	II, III dérivée IV.1 résol équ, V.1 calcul I I N N
Repr. de tâches alg niv2		III.5,6 résol équ ou systNN	II.4 résol équat. 2^{e} deg N		
Interprétation	1) 3) 4) I I Cb,eNd,f	I.1,2, III, IV.1 I C N	I.1.a, I.2.a,II.2, III.1 I N I abs[9]	III.4 N	V.1 N
Etude autres notions	I.1,2 traduction algébrique ppté graphique N	III.5, III.6 trad. algébrique ppté graphique N N	I.3.b, II.3 trad. algébrique ppté graphique N N	III.2 étude de fonction I	III étude de fonction I
Trad/branc^{t} sur formule					
Trad/production ds contexte fam					I. I
Trad/prod ds cont. non fam	2) N	II, IV.2 N N	III.1,2 (abs)	II.dans cadre géométrique N	
Utilisation de l'algèbre pour prouver	2) N	II N			

Tableau n°1 : Mobilisation des types de traitement algébrique pour Caroline

Nous faisons immédiatement deux constatations :

- à partir de la deuxième séance-repère, Caroline réussit à faire des calculs d'ordre numérique (substitution de valeurs numériques dans des expressions) et à manipuler

[9]Caroline était absente lors de cette séance supplémentaire.

formellement des expressions algébriques, ce qui n'était pas le cas à son entrée en Première (manipulation formelle pseudo-opératoire) ;

- en revanche, Caroline a toujours autant de difficultés à mettre en œuvre ou à réaliser les autres types de traitement algébrique.

Reprenons dans le détail les évolutions et les résistances constatées en essayant de mettre en évidence les mécanismes en jeu.

1) La dimension outil

Dans les cinq séances-repères, Caroline n'a tenté que deux fois de résoudre un problème de mathématisation : dans 2) (5/2) et I. (4/6). Il s'avère qu'aucune tâche ne permet ici de se brancher directement sur une formule pour mathématiser une situation, ce qu'elle réussit bien à son entrée en Première G.

• *Deux obstacles essentiels : rationalité pré-algébrique et faible maîtrise de la conversion entre expressions*

Pour le problème 2) du (5/2) qui met en jeu la généralisation et la preuve d'une propriété numérique, Caroline écrit d'abord sur sa feuille "soit x le nombre inconnu". Nous avions beaucoup travaillé ce type d'exercice et Caroline réagit certainement au contrat. Elle raye alors proprement et propose une preuve pragmatique à partir d'un exemple et d'une écriture pas à pas séparée. Elle conclut "Oui, cela arrivera, quel que soit le nombre initial car quand on prend un chiffre au hasard on est obligé de trouver un nombre supérieur de 3 au nombre initial". Caroline semble encore loin d'une preuve mathématique.

Caroline propose toujours une solution pragmatique dans 2) (15/3), en faisant le calcul pour un exemple avec une écriture pas à pas séparée. L'interprétation incorrecte de l'enchaînement opératoire conduit à un résultat faux. Elle traduit "soustrait 12 au résultat" par 12-10. Les difficultés relèvent donc de deux ordres : d'une part, l'outil algébrique n'est pas disponible pour généraliser et prouver une propriété et, d'autre part, la non congruence sémantique entre l'énoncé en langage naturel et sa traduction numérique ou algébrique n'est pas perçue.

Dans le problème I. (4/6) de la dernière séance-repère, problème lié au contexte tertiaire, Caroline traduit algébriquement la situation mais de façon incorrecte. C'est la première fois en cinq séances que Caroline tente de traduire algébriquement un énoncé. Elle a certainement reconnu une situation connue. Elle commence par schématiser le problème puis donne l'expression du coût moyen unitaire en fonction du nombre x de chaises fabriquées :

"Charges fixes : 7500^{F}/mois

charges variables : 12^{F}/mois/chaise

Soit x le nombre de chaises fabriquées par mois

$$\frac{7500 + 12}{x} = \frac{7512"}{x}$$

En cette fin d'année, Caroline n'arrive toujours pas à reformuler un énoncé : "12 francs par chaise" a été traduit en divisant par x et éprouve autant de difficultés à convertir les expressions entre le registre du langage naturel et le registre des écritures algébriques, en cas de non congruence sémantique.

• *Lien avec la dimension fonctionnelle*

Dans l'exercice II (7/5), Caroline ne traduit pas algébriquement la situation géométrique qui met pourtant en jeu des formules, celles de l'aire et du périmètre d'un rectangle. Elle a beaucoup de mal à mobiliser ces connaissances de base (cf confusion entre produit et somme pour exprimer le périmètre d'un rectangle dans T10) et un échange verbal avec Alice indique bien qu'elle confond aire et périmètre. Dans la question III, elle tente d'interpréter la solution proposée dans l'énoncé et écrit :

Soient x et y sont les dimensions du cadre

"$(x-2\ )$ = *c'est la longueur en cm - 2cm de marge*

$(y-4)$ = *c'est la largeur en cm - 4cm de marge*

$A=(x-2)(y-4)$

$= xy-2y-4x+8$ ". Ne sachant que faire, elle développe l'expression. Elle n'arrive pas à comprendre comment obtenir $A= (x-2)(21-x)$ à partir de la ligne précédente. Deux raisons peuvent être invoquées pour expliquer ce blocage :

- la mauvaise connaissance des formules et la non coordination entre les deux données de l'énoncé : à aucun moment, elle ne fait référence à la condition vérifiée par le périmètre de cadre, c'est-à-dire $2(x+y)=50$;

- la difficulté, voire l'obstacle, à exploiter la dépendance entre deux variables.

Cette deuxième raison ressort bien lors de la phase orale. Ce qui frappe Caroline et les autres élèves du groupe dans le passage de $A=(x-2)(y-4)$ à $A= (x-2)(21-x)$, c'est la "disparition" de y. La "disparition" de y ne semble pas coordonnée avec l'"apparition" de x : si y a disparu, c'est parce qu'on lui a donné une valeur numérique. Malgré l'insistance de l'observateur, aucun lien n'est réalisé avec l'égalité $x+y=25$. Qui plus est, le fait d'exprimer y en fonction de x et d'écrire $y=25-x$ ne permet pas de débloquer la situation : on peut d'ailleurs penser que le raisonnement "Exprimons y en fonction de x " est lié à une "habitude" de transformation d'équations et n'est donc pas disponible ici. C'est la vision numérique de la dépendance entre x et y qui va amener du sens à l'écriture algébrique de cette dépendance. L'observateur propose en effet de donner à x des valeurs et de calculer, y puis $y-4$ et $21-x$. Le calcul est fait pour $x=10$ et l'égalité des expressions $y-4$ et $21-x$ crée alors un effet de surprise : $y-4$ et $21-x$ n'étaient pas du tout comprises comme des expressions équivalentes puisque substituées l'une à l'autre. La suite de l'entretien entre l'observateur, Caroline et les autres membres du groupe confirme le décalage entre les deux niveaux :

- la capacité à calculer les deux expressions *y-4* et *21-x* pour une valeur quelconque et la constatation pragmatique de l'égalité,

- la capacité à passer de *y-4* à *21-x* en exprimant *y* en fonction de *x* et en substituant l'expression obtenue dans *y-4*.

Cet épisode révèle bien une autre résistance à exploiter le calcul algébrique pour traduire une situation mettant en jeu deux variables : la gestion des variables et des relations de dépendance entre elles, c'est-à-dire en filigramme, le statut du signe d'égalité et des expressions algébriques, la difficulté à dissymétriser une expression de deux variables pour l'inscrire dans un schéma fonctionnel.

2) <u>La dimension objet</u>

• *Le numérique*

Dans les séances-repères, Caroline réalise tous les calculs d'ordre numérique à une exception et les solutions données sont correctes. Elle a visiblement réussi à construire une connexion "viable" entre le registre des écritures algébriques et celui des écritures numériques. Mais cette compétence récente reste encore fragile principalement pour deux raisons :

- Les connaissances numériques de Caroline restent limitées. Illustrons-le à l'aide de quelques exemples :

Pendant la phase orale de la séance-repère du 15/3, l'observateur demande à Caroline : "Que se passe-t-il si on remplace *x* par 3 dans l'expression *-2(x-3)(x+1)* ?" Elle répond que 3-3, ça fait 0 donc que ce facteur ne compte pas. Caroline semble donc effectuer cette transformation numérique au seul niveau des écritures.

De même, après substitution des lettres par des valeurs numériques, Caroline effectue les calculs proposés en dehors de toute signification numérique : elle transpose les règles de transformation algébrique au calcul numérique. Par exemple, c'est le cas pour l'exercice I.b) du (2/4). Pour calculer le résultat de $x^2 - (10-x)^2$ obtenu pour $x=5$, Caroline réalise l'enchaînement suivant

"$f(5) = (5)^2-(10-5)^2$ $\quad = 25-(100-50-50+25)$
$\quad = 25 -((10-5)(10-5)$ $\quad = 25-25$ $\quad f(5) = 0$"

Et ce n'est pas un cas isolé puisque nous retrouvons aussi ce comportement dans le calcul 3 a) (2/4). Maintenant, Caroline sait associer des valeurs aux expressions algébriques et les calculer, ce qui n'était pas le cas à son entrée en première, mais au travers du filtre algébrique. L'observateur indique aussi dans cette séance, que Caroline fait preuve de peu d'assurance, refait plusieurs fois les calculs, utilise la calculatrice.

- Des difficultés liées au type d'écriture incorrect privilégié par Caroline[10] réapparaissent épisodiquement : le (2/4), pour vérifier si l'égalité est vraie en remplaçant x par 4 et y par -10, Caroline réalise le calcul suivant :

" $-10 = (4)^2-(10-4)^2$

$-10 = 8 - (10-4)(10-4)$

Elle utilise donc localement la règle de formation $x^2 \longrightarrow 2x$ et ce n'est pas encore un cas isolé.

En résumé, Caroline sait maintenant associer des valeurs numériques aux expressions algébriques mais ne semble pas capable de façon générale de désencapsuler des expressions numériques pour remonter aux processus à leur source.

• *Le traitement formel des expressions*

A l'entrée en Première, Caroline travaillait avec un système de règles de formation et de transformation incorrectes, mais non contradictoires, qui empêchait toute manipulation formelle opératoire : depuis Caroline, toujours confiante dans l'écriture algébrique, a construit à la place du système précédent des règles correctes de formation et de transformation des écritures algébriques. Son manque de familiarité avec ces règles laisse cependant subsister des règles de formation incorrectes, ce qui va provoquer encore des dérapages. Illustrons-le par deux exemples :

- la règle $x^2 \longrightarrow 2x$ reste toujours prégnante (I. 3.a (2/4));
- le rôle des parenthèses n'est pas complètement stabilisé : dans 1) (5/2) Caroline transforme l'expression comme suit

$$"\frac{((a+4)3+a)}{4} = \frac{3a}{4} + \frac{12}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{4a}{4}"$$

On peut remarquer que l'accroissement de la complexité, par exemple dû à la présence des fractions, déstabilise presque systématiquement Caroline.

La manipulation formelle des expressions ne constitue pas pour elle une activité familière. Dans les nombreux exercices I.1 (15/3), I.1.b (2/4), où il est demandé si des écritures désignent la même expression, Caroline développe correctement toutes les expressions polynomiales et indique les expressions égales. Elle n'utilise pas les identités remarquables mais la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Sa manipulation formelle est devenue opératoire mais reste de niveau 0. Caroline est lente et manque d'assurance ; les transformations sont souvent réalisées à l'aveuglette.

Donnons un autre exemple où la complexité des expressions perturbe Caroline. Dans II (4/6), Caroline transforme les fractions rationnelles de la façon suivante :

[10] Rappelons qu'à son entrée en première, Caroline travaillait dans un système d'écritures non parenthésées, associées au premier degré, parfois en assemblage.

"$\dfrac{7500}{x} + 12$; $\dfrac{7500+12}{x}$; 7512 ; $12x + 7500 \times \dfrac{1}{x}$`

$\dfrac{7512}{x}$ Non $\dfrac{7512}{x}$ Non Non $\dfrac{12x+7500}{x}$ Oui "

Caroline ne tient compte ici, ni des règles de calcul sur les fractions, ni des parenthèses.

L'aspect *sémantique* semble absent du traitement. Ce n'est pas un cas isolé :

- de nombreux calculs sont réalisés en dehors de la dénotation des expressions : Caroline reproduit une erreur proche de celle signalée plus haut ("3-3, c'est rien") dans la question III. (4/6), soit

$$\frac{7500 - 7500}{x^2} = x^2.$$

- elle n'utilise pas le sens des expressions, par exemple, pour trouver une stratégie efficace de résolution d'équations (II.3 (2/4)) ou pour faire un calcul numérique économique (I.2 (15/3) ; II.2 (2/4)). Les expressions ne sont encore très "parlantes" pour elle.

- Cela n'est pas non plus systématique : à un autre moment, elle se montre capable d'interpréter correctement des expressions fonctionnelles comme processus de calcul pour calculer leur fonction dérivée. Dans le cas de l'exercice I. (4/6) :

Pour calculer la dérivée de la fonction $x \text{—>} \dfrac{7500+12x}{x} = C(x)$

Caroline interprète $C(x)$ comme un quotient, mobilise la dérivée d'un quotient, écrit correctement la formule de dérivée, instancie correctement la formule mais se trompe dans le calcul des dérivées :

"On reconnaît $\dfrac{u}{v}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ *avec* $u' = 7512, v'=1$

$$C'(x) = \frac{7512(x) - (7500+12x)1}{x^2}$$

$$C'(x) = \frac{7512x - (7500+12x)}{x^2} = \frac{7512x - 7500 - 12x}{x^2}$$

$$C'(x) = \frac{7500-7500}{x^2}$$ "

Cet exercice qui mêle plusieurs types de traitement montre les acquis et les limites de compétences de Caroline : l'écriture du numérateur est lue dans un système non parenthésé, ce qui explique $u' = 7512$; la réduction du numérateur n'est pas opératoire.

En résumé, Caroline a progressé indiscutablement dans le traitement algébrique, mais ses compétences restent extrêmement fragiles surtout dans des exercices complexes qui mettent en jeu des types de traitement algébrique différenciés, des techniques récemment étudiées et l'aspect sémantique des expressions.

3) Un obstacle toujours important : la conversion entre le registre des écritures algébriques et les autres.

Ces séances-repères montrent la difficulté de Caroline à acquérir une certaine flexibilité à articuler différents registres de représentation. Nous l'avions déjà évoqué dans le cas de l'articulation entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques 2) (5/2). Il en est de même, dans le cas inverse : Caroline convertit de façon incorrecte une expression algébrique en processus de calcul exprimé en langage naturel : par exemple, dans I.1.a), elle convertit $10-x$ en "10 est soustrait de x"

L'autre obstacle concerne l'articulation entre le registre des représentations graphiques et celui des écritures algébriques. Toutes les séances-repères montrent les difficultés résistantes rencontrées par Caroline pour articuler ces deux registres :

- associer variables visuelles d'un graphique et coefficients d'une équation réduite de droite (cf I., 5/2),
- construire un lien entre (x,y) vérifie l'équation d'une courbe et le point de coordonnées (x,y) est sur la courbe,

Pour l'exercice III 6 (15/3), à la question "*Quelle relation vérifie l'abscisse des points d'intersection des courbes P et D, s'ils existent.* ", Caroline ne répond pas. La connexion algébrique/numérique et graphique n'est pas réalisée et elle n'arrive pas à exprimer algébriquement des propriétés graphiques.

En conclusion, malgré un handicap très lourd à l'entrée en Première, Caroline a reconstruit des connaissances algébriques qui restent encore partielles : elle réussit à manipuler opératoirement avec un niveau 0 les expressions algébriques peu complexes dans un contexte assez stéréotypé, sans pour ceci faire appel à l'aspect sémantique des expressions, elle commence à interpréter les expressions algébriques dans un contexte ou en liaison avec d'autres. En revanche, la dimension outil de formulation de l'algèbre reste absente et elle a toujours autant de difficultés à articuler différents registres de représentation.

Caroline avait pris la mesure des difficultés auxquelles elle serait affrontée dès la rentrée. A force de volonté et de travail, Caroline est parvenue à maintenir en mathématiques des résultats proches de la moyenne, en Première (8 ; 10 ; 9) ainsi qu'en terminale G1 (8,5 ; 12,5 ; 8) avec un professeur différent. Caroline a obtenu son baccalauréat G1 en 1993 et continue maintenant ses études.

IV.2 LA CAS D'ALICE

Alice a aussi participé à toutes les séances-repères. Elle venait pour travailler mais aussi pour avoir un autre rapport avec le professeur, avec l'école. Elle pensait qu'elle pourrait s'appuyer sur ces séances pour "comprendre" certaines connaissances restées "floues" après le cours et les séances d'exercices. Pendant les phases orales, elle apparaît active mais très sensible : le fait de dévoiler ses difficultés devant un observateur inconnu, devant ses camarades, la met mal à l'aise et la fragilise au début. Ceci explique peut-être certains abandons face à des exercices faciles où elle peut réussir en classe. Cette difficulté s'estompera au cours des séances et Alice prendra de plus en plus d'assurance.

L'évolution d'Alice va s'avérer différente de celle qu'on pouvait attendre en début de Première, suite à la définition de son profil : son histoire scolaire et son rapport aux mathématiques va permettre d'éclairer certains comportements.

Donnons d'abord une vue d'ensemble des productions écrites réalisées par Alice au cours des cinq séances-repères :

Séance-repère Critères	5/2/1993	15/3/1993	9/4/1993	7/5/1993	4/6/1993
type de trait algébrique : Réalis. de tâche d'ordre num.		I.2, III.2,4 (substitution) N N N	I.1.b, I.3.a, II.2 (substitution) C C N (pb tps)		
Repr. de tâches alg niv1	1) 2) développp^t I I	I.1,II développp^t I N	I.3.b,II.1 C I II.4 résol équat. 2^e deg C	III.3 développp^t 4 calcul dérivée C C	II, III dérivée IV.1 résol équ, V.1 calcul C N N N
Repr. de tâches alg niv2		III.5,6 résol équ ou systNN	II.4 résol équat. 2^e deg N		
Interprétation	1) 3) 4) I N CeNb.d.f	I.1,2, III, IV.1 N C4) N	I.1.a, I.2.a,II.2, III.1 I N N I	III.4 N	V.1 I
Etude autres notions	I.1,2 traduction algébrique ppté graphique N	III.5, III.6 trad. algébrique ppté graphique N N	I.3.b, II.3 trad. algébrique ppté graphique C N	III.2 étude de fonction C	III étude de fonction I
Trad/branc^t sur formule					
Trad/production ds contexte fam					I. C
Trad/prod ds cont. non fam	2) C	II, IV.2 C I	III.1,2 I C	II.dans cadre géométrique N	
Utilisation de l'algèbre pour prouver	2) N	II N			

Tableau n°2 : Mobilisation des types de traitement algébrique pour Alice

A la vue de ces résultats, nous pouvons faire deux remarques :

- Alice réussit les exercices de manipulation formelle de façon très inégale : comme nous le verrons par la suite, la réussite va dépendre du contexte de l'exercice, de la complexité des expressions transformées mais aussi de paramètres non mathématiques ;
- Alice met en œuvre des types de traitement algébrique diversifiés excepté dans des situations graphiques : une évolution positive se dessine par rapport à l'entrée en Première.

On voit apparaître dès maintenant un déséquilibre entre les dimensions outil et objet.

Reprenons dans le détail les évolutions et les résistances constatées en essayant de mettre en évidence les mécanismes en jeu.

1) La dimension outil

Rappelons qu'à son entrée en Première, Alice savait traduire algébriquement un énoncé en langage naturel dans un contexte fermé mais, même si Alice savait la démonstration nécessaire, l'outil algébrique n'était pas disponible pour résoudre de tels problèmes (recherche de preuve, recherche de solutions).

• *Deux appuis importants : rationalité scientifique et maîtrise de la conversion* entre expressions du registre du langage naturel et registre des écritures algébriques

Pour le problème 2) du (5/2) qui met en jeu la généralisation et la preuve d'une propriété numérique, Alice commence par une phase de conjecture en calculant avec un nombre. Elle utilise alors une écriture pas à pas séparée. Elle écrit pour conclure cette phase : "Si on donne une valeur et qu'on effectue toutes les opérations, il semble que son affirmation soit fondée, mais on ne peut le prouver."

Elle continue par une preuve algébrique :

"le nombre x, $\dfrac{(5x+12)-x}{4} = x+3$

$\dfrac{(2x+12) - ?}{4} = x+3$

Il faut donner x comme nombre initial et calculer."

En fait, Alice ne mène pas le calcul jusqu'à son terme et ne conclut pas. Pendant la phase orale, elle indique qu'elle ne sait pas comment soustraire x à $5x+12$. L'expression est bien, pour elle, calculable formellement mais les parenthèses semblent faire obstacle à toute réorganisation du calcul sous la forme $5x-x+12$.

Nous retrouvons le même comportement dans sa résolution de l'exercice II (15/3) : Alice propose une solution algébrique pour prouver que la différence entre le produit d'un entier et son consécutif avec l'entier initial est le carré de l'entier initial.

"Soit x un nombre, $x+1$ l'entier consécutif

$[x(x+1)]-x$

Soit 2 représente l'entier

2x3=6 je ne constate rien[11]

6-2=4 je constate que ~~le résultat est un nombre pair~~

Soit 2 représente l'entier

3x4=12

12-3=9 "

Pendant la phase orale, l'observateur pointe la difficulté rencontrée : Alice rencontre un obstacle à réduire l'expression $[x(x+1)]-x$, obstacle lié à la présence des crochets et des parenthèses. Elle ne s'"autorise" pas à enlever les crochets ce qui empêche le développement et la réduction de l'expression. Elle se replie alors sur le numérique, mais

[11] Alice écrit ce commentaire après avoir rayé nombre pair suite au deuxième exemple.

les résultats numériques obtenus ne lui permettent pas de conjecturer que ce sont les carrés des entiers initiaux. Remarquons que le deuxième exemple lui a permis, en revanche, de rejeter la première conjecture : "le résultat est pair". Alice joue vraiment le jeu mathématique.

Dans l'exercice III.2 (9/4), Alice traduit algébriquement l'énoncé correctement alors que l'énoncé et sa traduction algébrique ne sont pas sémantiquement congruents. Il en est de même pour une situation contextualisée au secteur tertiaire (cf I. (4/6)).

• *Lien avec la dimension fonctionnelle*

Dans l'exercice II (4/6), Alice a saisi immédiatement le thème du problème : elle représente un rectangle avec les marges. Elle donne plusieurs exemples de rectangle qui remplissent les conditions mais ne s'engage pas dans une démarche algébrique pour exprimer l'aire du cadre en fonction d'un des côtés.

Après la distribution de la question III, Alice explique avec soin les étapes du calcul et du raisonnement proposé dans cette question.

Soient x et y sont les dimensions du cadre

"2cm de marge sur y, on le multiplie par 2 car il y a deux côtés

1cm de marge sur x, on le multiplie par 2

On soustrait la marge aux longueurs

donc x-$2x1$

y-$2x2$

donc $(x-2)(y-4) \longrightarrow Lxl$ "

Alice s'arrête. Pendant la phase de travail autonome, l'observateur suggère d'utiliser l'égalité $2(x+y)=50$. Alice répond que c'est possible et écrit $2x=50-2y$, obtient $x=25-2y$ puis barre. Alice ne sait que faire de cette égalité.

La phase orale, déjà présentée pour Caroline (cf IV.1), montre que ce blocage est certainement lié ici à la difficulté d'exploiter la dépendance entre deux variables.

En résumé, ces différentes analyses laissent à penser que Alice est prise entre deux courants : d'abord, pour elle l'outil algébrique est nécessaire pour prouver, pour résoudre des problèmes, pour étudier le sens de variations des fonctions (cf III.2 (7/5)) et elle veut s'engager résolument dans une démarche algébrique, ce qu'on la voit faire, d'autre part, elle a du mal à manipuler les expressions, à gérer les écritures algébriques, à exploiter la dépendance entre plusieurs variables, ce qui l'oblige à certains abandons ou replis sur le numérique.

2) La dimension objet

A son entrée en Première, Alice maîtrisait juste la reproduction de tâches formelles de niveau 0 (50% de réussite). Elle manipule parfois de écritures algébriques dans un système non parenthésé. A la lecture des résultats de cette analyse, nous sommes encore frappée par le grand nombre d'exercices non traités. 3/8 d'exercices seulement sont réussis. Examinons d'un peu plus près ce phénomène.

• *La connexion avec le numérique*

Les calculs numériques sont menés par Alice avec efficacité, en respectant les priorités opératoires.

Mais, dans la question III.2 (15/3), elle ne comprend pas immédiatement la signification attribuée à la phrase : "Le couple (2,4) vérifie-t-il la relation $y=-2x^2+4x+6$?" On peut avancer deux raisons à cette difficulté : le statut du signe d'égalité et l'articulation entre l'algébrique et le numérique. Cette difficulté a peu à peu disparu dans les séances suivantes.

• *Les écritures algébriques et le traitement des expressions*

Alice n'a pas confiance en elle, dès qu'elle travaille sur des écritures algébriques : dans les comptes-rendus, on la montre lente, hésitante. Lorsqu'elle ne comprend pas la formulation d'une question ou le symbolisme algébrique, elle peut passer de longs moments à réfléchir sans écrire. Alice considère qu'il y a un enjeu intellectuel et qu'on ne doit pas donner une réponse au hasard.

- Les écritures parenthésées gênent Alice : elle travaille encore dans un système non parenthésé. En particulier, dans l'exercice 1) (5/2),

"$\dfrac{((a+4)3+a)}{4} = \dfrac{3a+12+a^2+4a}{4} = \dfrac{a^2+7a+12}{4}$", l'expression 3+a est prise comme un facteur à multiplier avec l'expression $a+4$.

Dans I.1) (15/3), Alice commence par réécrire $-2(x-3)(x+1)$ sous la forme $-2x+6-2x-2$. Elle est gênée à la fois par la formulation de l'énoncé, par la présence de trois facteurs et par le rôle des parenthèses. Lors de la phase orale, elle dit ne pas savoir ce que veulent dire : "développer", "polynôme". De plus elle n'a pas compris ce que demande l'énoncé. Elle n'a rien fait.

- La manipulation formelle des expressions n'est toujours pas familière à Alice, au bout de six mois, même pour le développement de polynômes. Elle applique les identités remarquables mais de façon incorrecte : dans II.1 du (2/4), Alice utilise à deux reprises la règle incorrecte : $(a-b)^2=a^2-b^2$.

"$2(x-5)^2 + 50$

$2(x^2-25)+50$

$2x^2-50+50$

$2x^2$"

Elle pense que son calcul est faux, aussi le barre-t-elle. Elle refait la même erreur sur l'expression précédente. L'observateur lui demande si elle est sûre d'elle : elle dit qu'elle ne sait pas faire avec les lettres. Il y a des formules mais elle les a oubliées. Elle se souvient du système de flèches utilisé en 3ième mais pense qu'il ne faut plus l'utiliser. A la demande de l'observateur, elle développe $(a\text{-}b)^2$. Elle exploite l'aide de camarades pour transformer $(a\text{-}b)^2$ en $(a\text{-}b)(a\text{-}b)$ puis développe et obtient $a^2\text{-}2ab+b^2$. L'observateur insiste beaucoup sur le fait qu'elle peut utiliser encore les méthodes de 3ième.
Au contraire, dans l'exercice III.1. 7/5, la première expression est développée correctement mais toujours avec lenteur et hésitation : pour l'expression $x\text{-}2(21\text{-}x)^2$, après une longue réflexion, elle écrit :"l'expression ne peut être égale car c'est 2 qui est un facteur commun et non (x-2), ce qui est finalement plus élaboré qu'un traitement algébrique. Alice semble rattacher l'activité mathématique au seul raisonnement et de ce fait péjore l'acquisition des automatismes nécessaires à ce raisonnement.

Les formules pour résoudre une équation du second degré ne sont pas disponibles juste après l'apprentissage. Il en est de même pour les formules de dérivation.

- Aucune des questions faisant intervenir le sens de expressions n'est traitée, aussi bien pour effectuer un calcul efficace, que pour résoudre des équations.

En résumé, Alice n'a pas confiance dans le calcul algébrique. Son traitement formel des expressions algébriques reste peu automatique et encore incertain : ceci nous semble à relier avec l'opposition qu'elle fait entre "apprendre" et "comprendre" dans les questionnaires et entretiens.

3) <u>L'articulation entre registre des représentations graphiques et registre des écritures algébriques</u>

Alice éprouve toujours beaucoup de difficultés à articuler le registre des représentations graphiques et le registre des écritures algébriques. Alice manifeste cette difficulté dès la première séance (5/2). Pour rechercher l'ordonnée d'un point d'une droite situé à l'extérieur de la feuille, Alice se ramène d'abord à une situation de proportionnalité entre les coordonnées de deux points de la droite. Après avoir exclu cette solution, elle a beaucoup de mal à transposer la situation de proportionnalité aux accroissements des coordonnées des deux points. La difficulté résiste quand il s'agit d'exprimer algébriquement cette relation. Comme Caroline, elle éprouve des difficultés à :

- associer variables visuelles d'un tracé de droite et coefficients d'une équation réduite de droite (cf I. (5/2)),

- construire un lien entre (x,y) vérifie l'équation d'une courbe et le point de coordonnées (x,y) est sur la courbe et ceci dans les deux sens (cf III 3,4, 5, 6 (15/3)). Cette difficulté commence à s'estomper lors des séances suivantes, en particulier pendant la dernière séance (cf IV.1 (4/6)).

En conclusion : En fin de Première, Alice met en œuvre des types de traitement algébriques diversifiés, dans divers emplois, dans la dimension outil. Mais Alice ne maîtrise pas la manipulation formelle des expressions, surtout dans son aspect technique, même si l'aspect sémantique des expressions apparaît plus disponible. Sa progression semble entravée par ce refus de s'engager dans un travail technique et de voir son utilité.

Les résultats de Alice dans toutes les matières sont restés juste moyens, excepté en français où Alice a conservé 11,5 ; 12 toute l'année. Les résultats de Alice en mathématiques reflètent l'analyse précédente : 8 ; 8,5 ; 8. Alice est passée en terminale G1 et a obtenu son baccalauréat en 1994. Elle continue maintenant ses études en faculté de droit.

IV.3 LE CAS DE MÉRIÈME

Mérième a toujours participé à ces séances avec un intérêt non dissimulé. Ce fut l'un des éléments moteurs d'un des deux groupes : elle est toujours intervenue avec discernement, en évitant de monopoliser le jeu mathématique. Son exigence de rigueur et sa volonté de comprendre les notions mathématiques fut un catalyseur important pour le bon fonctionnement de certaines séances. Elle savait qu'elle était plus à l'aise en mathématiques que ses camarades et voulait les en faire profiter.

Suite à l'analyse des productions écrites de Mérième, nous récapitulons les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :

Séance-repère Critères	5/2/1993	15/3/1993	9/4/1993	7/5/1993	4/6/1993
type de trait algébrique : Réalis. de tâche d'ordre num.		I.2, III.2,4 (substitution) C C C	I.1.b, I.3.a, II.2 (substitution) C C C		
Repr . de tâches alg niv1	1) 2) développ^{t} C N	I.1,II développ^{t} C C	I.3.b,II.1 C I II.4 résol équat. 2^{e} deg C	III.3 développ^{t} 4 calcul dérivée I C	II, III dérivée IV.1 résol équ, V.1 calcul C I N I
Repr. de tâches alg niv2		III.5,6 résol équ ou systNN	II.4 résol équat. 2^{e} deg N		
Interprétation	1) 3) 4) C C C	I.1,2, III, IV.1 I C C	I.1.a, I.2.a,II.2, III.1 C C I C	III.4 N	V.1 C
Etude autres notions	I.1,2 traduction algébrique ppté graphique N	III.5, III.6 trad. algébrique ppté graphique C C	I.3.b, II.3 trad. algébrique ppté graphique C C	III.2 étude de fonction C	III étude de fonction I
Trad/branc^{t} sur formule					
Trad/production ds contexte fam					I. C
Trad/prod ds cont. non fam	2) N	II, IV.2 C N	III.1,2 C C	II.dans cadre géométrique C	
Utilisation de l'algèbre pour prouver	2) N	II C			

Tableau n°3 : Mobilisation des types de traitement algébrique pour Mérième

Nous constatons que Mérième a réussi à mettre en œuvre progressivement tous les types de traitement algébrique. Partons des points d'appui et des difficultés repérées dans son profil initial pour illustrer les évolutions constatées.

1)<u>La dimension outil de l'algèbre</u>

A l'entrée en Première, Mérième savait traduire algébriquement une relation opératoire dans un contexte fermé (cf T16) et utiliser l'outil algébrique pour déterminer l'équation réduite d'une droite (cf T14). Son comportement indiquait des éléments d'une rationalité partagée entre rationalité pré-scientifique, scolaire et scientifique. Au cours des séances-repères, Mérième a montré qu'elle réussissait à mobiliser et à maîtriser de mieux en mieux l'outil algébrique pour traduire algébriquement des situations dans différents contextes : généralisation et preuve [II (15/3)], traduction algébrique de propriétés graphiques et mise en équation [III (15/3), III.1,2 (9/4) et II (2/4)], étude de fonction pour la recherche d'un extremum dans un contexte familier [II (7/5), I (4/6)]. Nous pouvons penser que la résolution de nombreux problèmes en classe, mettant en jeu des emplois diversifiés de l'outil algébrique, a pu favoriser cette évolution. Nous allons montrer à partir d'exemples, les résistances tenaces voire rémanentes mais aussi les points d'appui utilisés par Mérième pour mettre en œuvre la dimension outil de l'algèbre.

• *Le balancement entre rationalité scientifique et pré-scientifique : le poids de la conversion des expressions et du numérique*

En ce qui concerne l'utilisation de l'algèbre comme outil de preuve, nous voyons clairement dans les deux premières séances-repères que Mérième reste confrontée à deux résistances : l'articulation entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques et le rôle du numérique :

- Mérième commence l'exercice II (5/2) dans une logique de preuve algébrique. Le compte-rendu de l'observation montre qu'en effet, Mérième traduit d'abord algébriquement l'enchaînement opératoire (elle ne l'a pas rendu). Mais elle semble ne pas comprendre la signification opératoire de la phrase "nombre supérieur de 3 au nombre initial", ce qu'elle écrit d'ailleurs sur sa feuille. Rappelons que Mérième avait déjà montré des difficultés (cf T9) à convertir des expressions entre le registre du langage naturel et celui des expressions algébriques. Dans le doute, elle préfère se replier sur le numérique vers une preuve pragmatique en réalisant le calcul pour le nombre initial 2. Elle ne conclut pas sur sa feuille ce qui laisse penser qu'elle réalise l'insuffisance de sa démarche.

Pendant la phase orale, l'observateur demande à Alice, autre membre du groupe, d'expliquer sa solution pour le nombre 2. Alice termine sa réponse en disant "le résultat était toujours supérieur de 3 au nombre initial". Au cours de la discussion, l'observateur cherche alors à leur faire évoquer un moyen pour prouver qu'une propriété est toujours vraie. Après un silence, Mérième dit "avec des x, alors ? ". Les deux informations précédentes lui permettent alors de traduire aisément le résultat de l'enchaînement opératoire en gérant la complexité de l'enchaînement avec des parenthèses, de le réduire et de montrer que le résultat de l'enchaînement opératoire est $x+3$. Mérième a su faire le lien entre sa solution initiale et les informations données au cours des deux précédentes interventions : elle a compris l'interprétation qu'il fallait associer à l'énoncé exprimé en langage naturel et a réalisé la connexion nécessaire entre une généralisation et l'utilisation du calcul algébrique.

- Dans l'exercice II (15/3), Mérième se lance à nouveau rapidement dans une démarche algébrique pour prouver. A partir de x, elle obtient x^2-x, expression qui ne lui parle pas. Elle repasse alors dans le numérique pour trouver la propriété recherchée. Elle n'est pas convaincue par ses deux solutions numériques qui ne font apparaître aucune propriété invariante. Elle pose alors la question : "Que signifie "entier consécutif" ?" l'observateur donne alors une explication en français. Mérième raye sa solution initiale et utilise l'écriture générique d'un entier consécutif dans une écriture pas à pas séparée et obtient :

$x \times (x+1)=x^2+1$

$x^2-x+x=x^2$.

Mérième ne s'arrête pas pour autant. Elle vérifie numériquement qu'on obtient bien le carré du nombre initial et conclut "je constate que si l'on suit ce programme on trouve le carré de l'entier initial". Mérième rentre bien dans le jeu de l'algèbre mais le numérique semble rester plus fort et plus porteur de signification que l'algèbre. Mérième reste encore hésitante entre rationalité pré-scientifique et scientifique.

- Les exercices IV.1 (15/3) et I.1a) (2/4) indiquent que Mérième acquiert peu à peu de l'assurance à convertir une expression entre le registre du langage naturel et celui des écritures algébriques et que les difficultés s'estompent.

• *Contexte et sémantique des expressions*

Dans les autres exercices de mathématisation, Mérième montre qu'elle sait s'appuyer sur le contexte pour donner du sens aux expressions algébriques ou aux relations construites mais qu'elle sait aussi s'en dégager pour calculer. Prenons par exemple l'exercice III.1 (9/4).

Mérième prend d'abord un exemple pour "comprendre" comment est calculé le prix d'un rubis en fonction de sa masse. Elle calcule le prix de vente des deux morceaux : si x désigne la masse d'un des deux morceaux, elle obtient $5000(x^2+(10-x)^2)$. Elle a exprimé sans difficultés la masse de l'un en fonction de l'autre, puis calculé le prix de vente. Nous voyons bien ici la maîtrise affichée par Mérième pour dissymétriser une formule.

Elle exclut ensuite les réponses proposées, d'une part, en jouant sur l'articulation entre le contexte et le registre des écritures algébriques, et d'autre part, en sachant se dégager du contexte pour utiliser des règles de calcul :

- l'expression $5000x^2+ (10-x)^2$ est exclue car $(10-x)^2$ ne correspond pas à un prix, $(10-x)^2$ n'ayant pas 5000 comme coefficient,

- l'expression $5000(x+10-x)^2$est exclue numériquement par comparaison des données initiales du problème.

• *La prise en compte de la dimension fonctionnelle*

Pour l'exercice II (7/5) Mérième montre ici une certaine flexibilité en intégrant d'elle-même la dimension fonctionnelle. Elle a compris qu'il était intéressant d'exprimer l'aire du rectangle en fonction d'un des deux côtés[12] pour étudier ses variations. Après avoir exprimé l'une des dimensions en fonction de l'autre, elle calcule facilement l'aire du rectangle en fonction du côté retenu.

[12]En fait, elle exprime l'aire en fonction des nouvelles dimensions, ce qui est un peu inhabituel.

En résumé, Mérième a acquis une certaine habileté à traduire algébriquement des situations dans différents cadres, cadre géométrique, cadre fonctionnel ou cadre graphique et commence à mobiliser de façon adaptée l'outil algébrique dans différents emplois.

2) <u>Un point d'appui transversal</u> : la flexibilité entre les différents registres et la dimension fonctionnelle

Ce peut-être en particulier le registre des représentations graphiques et le registre des écritures algébriques. Etudions comment Mérième s'appuie sur des compétences déjà en germes pour traduire algébriquement une propriété graphique (ce sera aussi le cas pour résoudre graphiquement une équation) en jouant sur la conversion des tracés du registre des représentations graphiques dans celui des écritures algébriques. Nous mettrons aussi en évidence les difficultés rencontrées. Nous verrons bouger les capacités de Mérième à articuler ces registres au cours des différentes séances-repères.

Etudions quelques passages de la première séance-repère du 5/2 pour mettre en évidence certains mécanismes en jeu, les appuis et les limites initiales auxquelles Mérième est confrontée. L'analyse des exercices 3), 4), que Mérième réussit bien, met en évidence les connaissances suivantes:

- (i) la solution de l'ex 3 indique l'association entre équation du type $ax+by+c=0$ et tracé d'une droite ;

- (ii) la solution à la question 4.d) montre que Mérième a construit un lien entre (x,y) vérifie une équation de droite D et le point $M(x,y)$ appartient à D ;

- (iii) la solution à la question 4.f) montre que la variable symbolique a de l'équation réduite $y=ax+b$ est associée à la pente de la droite, et son signe au fait que la droite "monte" ou "descend".

Mérième sait donc mettre en œuvre localement ses connaissances. Globalement dans l'exercice plus complexe I.1 (5/2), dont nous rappelons ici l'énoncé

"Le plan étant rapporté à un repère (O,i,j). Déterminer l'ordonnée du point A, sachant que A est le point de la droite (D) d'abscisse 15 repésentée sur la figure ",

Mérième a du mal à les coordonner. Illustrons-le par l'épisode ci-dessous :

Aline, Mérième et Virginie travaillent ensemble. Par écrit, Mérième écrit un début de solution mais Aline et Virginie sont bloquées. L'observateur ne peut rester en position d'observateur et demande à Mérième de présenter ses idées. Mérième explique qu'on ne peut pas déterminer l'ordonnée du point A qui est en dehors de la feuille, "car on n'a pas la fonction". Elle ajoute "mais puisqu'on a la droite, on peut trouver la fonction correspondante". Mérième associe bien les cadres géométrique et fonctionnel puis fait le détour par le cadre algébrique pour résoudre le problème posé en raisonnant comme suit :

A non accessible géométriquement	—>	si on avait une expression on saurait répondre	—>	comme la droite est tracée, on sait la trouver.

L'observateur détaille l'idée de Mérième et indique que le problème se ramène alors à la recherche de l'équation de la droite. Mérième intervient encore, indique qu'on peut se servir de l'ordonnée à l'origine et de la pente mais ne cherche pas à imposer son point de vue[13]. Après une intervention d'Aline, Mérième reprend l'initiative : "ça va être $y=ax+b$, tu devrais déjà le mettre". L'observateur tente de les aider en leur proposant la stratégie suivante : on utilise les coordonnées de deux points pour obtenir un système et, en le résolvant, on obtient a et b. Mérième semble rester dans la stratégie suivante : a et b peuvent être déterminés par lecture graphique, c'est le cas pour b ordonnée à l'origine.

Dans la suite, l'observateur tente surtout de faire participer Aline et Virginie qui sont complètement perdues et Mérième continue sa recherche en intervenant de temps en temps. Elle intervient en particulier à deux moments de blocage pour indiquer deux stratégies possibles pour calculer a : utiliser le point $(-2,0)$ car c'est le plus simple ou trouver directement la pente, "il faut regarder de combien ça avance et ça monte". Malgré toutes les connaissances mobilisées, Mérième n'a trouvé ici l'équation qu'avec l'aide finale de l'observateur.

On voit bien les connaissances locales mises en jeu par Mérième mais aussi les difficultés à les coordonner dans cet exercice (ce ne fut plus le cas par la suite). Ces difficultés sont liées nous semble-t-il, d'une part, à la non coordination entre la propriété (ii) et la recherche des coefficients a et b, et d'autre part, à un guidage distinct de son point de vue initial. Un autre obstacle lié à la non reconnaissance du statut d'équation pour $-2a+4=0$ s'est peut-être rajouté. Remarquons que dans notre cours, nous avions donné trois méthodes pour déterminer l'équation réduite d'une droite connaissant un tracé dans un repère donné, mais il s'avère que la stratégie proposée par l'observateur est celle qui fut peut-être la moins développée. De plus, nous travaillions beaucoup l'association entre le registre des équations et celui des représentations graphiques, ce qui explique peut-être le point de vue privilégié par Mérième.

3. La dimension objet de l'algèbre

L'exemple précédent montre bien que, suite à une traduction algébrique, Mérième reconnaît les objets de l'algèbre institutionnalisés dans le cadre du cours, ici les équations de droites, mais ce peut être aussi, les expressions algébriques, les équations du premier ou du deuxième degré à une inconnue, les fonctions. Elle essaye alors de mobiliser les savoirs et savoir-faire associés.

Cette mobilisation suppose une certaine maturation : par exemple, dans les exercices III.5, III.6 (15/3), Mérième ne mobilise pas encore la méthode du discriminant pour résoudre une équation du second degré. Deux raisons peuvent être invoquées, soit la solution graphique demandée lui paraît suffisante, soit aucune méthode n'est encore

[13]J'avais indiqué au début de la séance à Aube de ne pas donner la solution tout de suite et de permettre aux autres de chercher.

disponible pour résoudre une équation du second degré. Ce n'est plus le cas, dans les séances suivantes.

• *La manipulation formelle des expressions*

Rappelons qu'à l'entrée en Première, Mérième savait reproduire des tâches formelles non finalisées de niveau 1. Elle utilisait parfois des écritures dans un système non parenthésé et sa manipulation formelle était opératoire de niveau 0. Etudions maintenant comment évolue sa manipulation formelle des expressions algébriques, en pointant les aspects sémiotique, syntaxique et sémantique développés.

Dans les tâches techniques (niveau 1) et les tâches de reconnaissance internes au cadre algébrique, Mérième montre une certaine familiarité à manipuler les écritures algébriques : d'une part, elle utilise des règles de formation et de transformation correctes, et d'autre part, elle interprète aussi bien une expression comme processus de calcul, comme résultat d'un enchaînement opératoire ou comme expression fonctionnelle.

Les comptes-rendus d'expérimentation [cf I.1 (15/3), II.3 (9/4) et III.3 (7/5)] indiquent que Mérième est rapide et montre une certaine assurance. Mérième mobilise les identités remarquables, les instancie puis effectue les calculs demandés, sait décomposer un calcul en plusieurs étapes, apprend à mettre en œuvre des savoir-faire nouveaux (résolution d'équation du second degré, calcul de dérivée) [cf I.1 (15/3), II.3 (9/4) et III.3 (7/5)]. Dans le cas d'un apprentissage récent, l'application des formules peut encore rester maladroite voire incorrecte (calcul de la fonction dérivée I. (4/6)).

Pour calculer la dérivée de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{7500+12x}{x}$

Mérième reconnaît la dérivée d'un quotient et écrit correctement la formule de dérivée :

"On reconnaît $\dfrac{u}{v}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ d'où $f'(x) = \dfrac{12x-(7500+12x)}{x^2}$ "

Globalement, on constate une progression pour atteindre le niveau 1 d'opérationnalité de la manipulation formelle.

Mais cette manipulation formelle reste fragile et dès qu'elle travaille sur des fractions rationnelles ou sur des expressions plus complexes et peu traitées, Mérième commet des erreurs grossières. Par exemple, elle identifie correctement les termes de l'expression fonctionnelle $C(x+1)-C(x)$ puis l'exprime correctement.

$$C(x+1) = \frac{7500+12(x+1)}{x+1} = \frac{7500+12x+12}{x+1} = \frac{12x+1512}{x+1}$$

$$C(x+1) - C(x) = \frac{12x+1512}{x+1} - \frac{7500+12x}{x}$$

Mérième a fait une erreur de calcul mais de plus elle conclut que $C(x+1) - C(x) = 1$

Cette erreur semble liée à une lacune concernant des techniques de base, ici l'addition de deux fractions.

Mérième est aussi très étourdie : recopie incorrecte de l'énoncé (au moins deux fois). Mais pendant les phases orales, elle trouve très vite ses erreurs : en particulier pour celle du 9/4, se rendant compte d'une erreur d'étourderie, Mérième amusée dit "non, non, non, moi non plus, moi aussi j'ai pas fait attention au moins".

• *La sémantique des expressions*

Mérième sait montrer que plusieurs expressions sont égales : deux écritures peuvent désigner la même expression. En revanche, même si elle sait distinguer les formes d'écriture pour les polynômes du second degré : développée, canonique ou factorisée, (cf production du 15/3), elle ne sait pas toujours les exploiter pour éviter des calculs ou des procédures de résolution à l'aveuglette. Mérième n'exploite vraiment pas le *sens* des expressions (dans l'acception de Drouhard) pour choisir les démonstrations les plus appropriées. Illustrons le par deux exemples.

Dans l'exercice II (9/4), la question I.1 consistait à montrer que les trois écritures $2(x-5)^2+50$, $(x-10)^2+x^2$ et $2x^2-20x+100$ désignent la même expression $A(x)$. A la question I.2, on demandait de choisir une expression pour calculer $A(5)$. Mérième choisit la deuxième en donnant comme argument "car elle est plus simple et plus courte à réaliser". Mérième n'a pas mis en relation la valeur 5 et la forme canonique de la fonction polynôme. On retrouve le même argument dans I.2 (15/3).

Donnons encore l'exemple de la séance du 2/4 où Mérième passe par les identités remarquables pour calculer de $5^2 + (10-5)^2$: le rapport au calcul formel empiète alors sur le rapport au calcul numérique. Ce n'est plus le cas le 9/4 : le sens numérique reprend ses droits sur l'algébrique.

De même, Mérième résout l'équation du second degré $A(x)=0$ à l'aide du discriminant sans tenir compte des deux écritures algébriques sous forme d'une somme de carrés. En revanche, elle est toujours à l'aise quand il s'agit d'articuler le registre des écritures algébriques et celui des représentations graphiques : ici, elle sait lier l'intersection vide entre l'axe $x'Ox$ et la courbe représentative de A au signe négatif du discriminant de l'équation du second degré $A(x)=0$ (l'équation n'a pas de solution) et le sens de variation de la fonction $x \longrightarrow A(x)$ au signe du coefficient de x^2. On retrouve cette même capacité au cours des séances, cf II. (7/5) : Mérième conjecture le sens de variation d'une fonction du second degré à partir du signe du coefficient de x^2.

En résumé, il semble que le travail algébrique de Mérième se situe majoritairement au niveau syntaxique et technique mais Mérième commence à développer l'aspect sémantique des expressions algébriques peut-être en liaison avec le travail important fait en cours.

• *Le statut des objets et du signe d'égalité*

Mérième développe, selon les situations, une conception procédurale ou structurale des objets. De plus, elle adapte le statut du signe d'égalité en fonction du type de tâche réalisée (par exemple, calcul d'image x_0 ou recherche d'antécédent de y_0). Comme nous l'avons déjà vu, Mérième sait exprimer une variable en fonction d'une autre "naturellement". C'est le cas dans l'exercice II (7/5) qui propose de déterminer les dimensions d'un rectangle de 50cm de périmètre pour que l'aire de la partie centrale soit maximale.

Mérième modélise elle-même la situation en choisissant comme variables l et L respectivement les longueurs des côtés de la partie centrale.

"Si $2(l+L) = 38$, $L+l = 19$ donc $L = 19-l$. donc l'aire du rectangle est égale à $(19-l)l$ soit $19l-l^2$ donc la fonction est $f(x) = -x^2+19x$. Mérième dissymétrise l'égalité pour exprimer L en fonction de l. pour rechercher l'aire en fonction de l'une des longueurs. Le cadre fonctionnel est disponible chez Mérième. En revanche, elle n'arrive pas à terminer la mise en équation commencée dans la question suivante III (7/5), alors qu'elle vient de réaliser la même démonstration : on retrouve la même difficulté (cf I.1 (5/2) à exploiter des solutions proposées par d'autres, cette solution étant réalisée avec un choix de variables différents.

4) <u>En conclusion</u> : En fin de première, Mérième maîtrise des types de traitement algébriques diversifiés, dans divers emplois, à la fois dans leur dimension outil et objet. L'activité algébrique est menée avec flexibilité certaine, même si certaines compétences restent fragiles : techniques de manipulation formelle de base, jeu sur le sens des expressions pour trouver les stratégies appropriés, ...

Mérième est devenue l'une des meilleures élèves de la classe de Première et ceci dans toutes les matières. Ses moyennes de maths sur les trois trimestres ont été 14,5, 14,5 et 15. Elle est passée en Terminale G2 avec les félicitations et comme appréciations du proviseur adjoint "Toujours excellent". En terminale, Mérième avait un autre professeur de mathématiques : ses moyennes de maths sur les trois trimestres ont été 14, 13,5 et 14. Ce fut une excellente élève dans toutes les matières. Elle a obtenu son bac G2 avec mention Assez Bien et continue maintenant ses études en deuxième année de BTS comptabilité.

Il nous semble particulièrement important de rapporter l'image si positive de cette évolution aux résultats de Mérième au test d'entrée. <u>Ces résultats, même si nous avons pu y lire des germes d'entrée dans la pensée algébrique a priori exploitables, sont objectivement très faibles et, dans un contexte standard, ils n'avaient aucune raison de garantir la réussite de l'adaptation.</u>

IV.4 LE CAS DE FRÉDÉRIC

Frédéric n'a pas participé aux séances-repères du 5 Février et du 7 Mai 1993. Au début, il était intéressé, et très rapidement, il ne voulut plus participer à ces séances : pendant la séance du 4 Juin, il assista passivement au travail des autres et ne commença un exercice que sur ma demande insistante. Il considérait ces séances comme une heure de plus au lycée. Quand Frédéric a considéré, au vu de ses résultats scolaires après le deuxième conseil de classe que son année se conclurait par un redoublement, il n'a plus jugé nécessaire de s'investir dans une activité scolaire. Les résultats que nous donnons par la suite sont donc là encore partiels. Ils montrent quand même, et c'est important, des capacités de Frédéric en mathématiques, capacités qu'il n'exploitera pas cette année par abandon progressif, comme d'ailleurs dans toutes les matières mais l'année suivante.

Donnons d'abord une vue d'ensemble des productions écrites réalisées par Frédéric au cours des cinq séances-repères :

Séance-repère Critères	5/2/1993	15/3/1993	9/4/1993	7/5/1993	4/6/1993
type de trait algébrique : Réalis. de tâche d'ordre num.		I.2, III.2,4 (substitution) C C N	I.1.b, I.3.a, II.2 (substitution) C C C		
Repr . de tâches alg niv1		I.1,II développ^{t} C C	I.3.b,II.1 N C II.4 résol équat. 2^{e} deg N		II, III dérivée IV.1 résol équ, V.1 calcul N N N N
Repr. de tâches alg niv2		III.5,6 résol équ ou systNN	II.4 résol équat. 2^{e} deg N		
Interprétation		I.1,2, III, IV.1 I C4) N	I.1.a, I.2.a,II.2, III.1 I N C N		V.1 I
Etude autres notions		III.5, III.6 trad. algébrique ppté graphique N N	I.3.b, II.3 trad. algébrique ppté graphique N N		III étude de fonction N
Trad/branc^{t} sur formule					
Trad/production ds contexte fam					I. C
Trad/prod ds cont. non fam		II, IV.2 C N	III.1,2 N I		
Utilisation de l'algèbre pour prouver		II C			

Tableau n°3 : Mobilisation des types de traitement algébrique pour Frédéric

Dès maintenant, deux remarques s'imposent :

- dans la dimension objet, Frédéric maîtrise les exercices techniques mettant en jeu des calculs d'ordre numérique mais commence aussi à réussir des exercices de manipulation formelle de niveau 1 ;

- dans la dimension outil, Frédéric réussit à mathématiser des situations dans des contextes différenciés (recherche de preuve, résolution dans un contexte familier tertiaire).

Mettons en évidence les évolutions repérées et les difficultés qui résistent :

1) <u>Dans la dimension outil</u>

A son entrée en Première, l'outil algébrique n'était disponible pour Frédéric. En quelques mois, il a appris à mobiliser l'outil algébrique pour traduire algébriquement des situations dans certains contextes (numérique cf III.2 (9/4), économique cf I. (4/6)), pour généraliser et prouver des propriétés (cf II. (15/3)).

Montrons un peu Frédéric au travail :

• Pour l'exercice II. du (15/3), Frédéric se lance immédiatement dans une résolution algébrique :

$$"\frac{(5x-12) - x}{4} = x-3 \quad "$$

Après quelques instants de réflexion, il demande à l'observateur : "On ne peut pas savoir si c'est vrai ? ". L'observateur lui répond "Essaie de conclure ?" Après un moment, Frédéric écrit alors sur sa feuille : "il faut donner plusieurs valeurs à x. "

On peut penser que Frédéric s'est engagé dans une preuve algébrique, plus par contrat que par rationalité. En effet, nous avions beaucoup travaillé cette dimension de l'algèbre. Mais cet exercice montre que Frédéric traduit algébriquement correctement la relation qui est à prouver. Les écritures algébriques sont reliées au numérique qui reste encore plus porteur de sens que l'algébrique. Pendant la phase orale, il demande comment calculer une expression s'il n'y a pas de valeur pour x. Une expression n'est pas encore considérée par Frédéric comme un objet calculable formellement. C'est Mérième qui intervient alors pour expliquer comment la réduire.

• Dans l'exercice III.2 du (9/4), Frédéric exprime algébriquement le résultat de l'enchaînement opératoire en fonction du nombre initial : "Soit un nombre. On le soustrait à 10. On ajoute au carré du résultat précédent le carré du nombre initial. " Il obtient $(x-10)^2+ x^2$. puis développe l'expression ainsi obtenue : $x^2-20x+100+x^2$ soit $2x^2-20x+100$.

Les expressions algébriques sont maintenant calculables. En revanche, Frédéric applique à l'aveuglette les règles de calcul qu'il connaît, sans anticiper le raisonnement ou les transformations pour les questions suivantes.

2) Dans la dimension objet

A son entrée en première, le traitement formel réalisé par Frédéric n'était pas opératoire.

• L'analyse des trois séances montre que Frédéric maîtrise correctement le développement des polynômes du second degré (cf I.1 (15/3), II.1 (9/4)).

• La connexion algébrique/numérique fonctionne bien, et il apprend à exploiter le *sens* des expressions (dans l'acception de Drouhard) pour choisir l'expression la plus appropriée à tel calcul ou telle résolution. Le traitement intègre peu à peu l'aspect sémantique des expressions. Illustrons le par deux exemples :

Pour l'exercice I.2 (15/3), il choisit l'écriture $-2x^2+4x+6$ d'une expression pour calculer sa valeur pour $x = 3$ et non $-2(x-3)(x+1)$.

En revanche, pour l'exercice II.2 (9/4), il choisit parmi les trois écritures d'une expression, celle adaptée c'est-à-dire $2(x-5)^2+50$, pour calculer sa valeur pour $x=5$.

• Au cours des séances, le signe d'égalité est utilisé avec le statut approprié à la situation étudiée.

3)L'articulation entre registres

Frédéric commence à mettre en place des articulations entre le registre des écritures algébriques et les autres registres :

- registre numérique : l'articulation entre le registre des écritures algébriques et le registre numérique reste un point d'appui important.

- registre du langage naturel : Frédéric interprète une expression algébrique comme un enchaînement opératoire. Mais certaines incorrections subsistent (ordre des termes dans un soustraction, cf I.1 (2/4)). Nous avons déjà vu qu'il savait mobiliser le langage algébrique pour traduire algébriquement une relation énoncée en langage naturel (cf I. 6/4))

- registre des représentations graphiques : Frédéric a construit un lien entre (x,y) vérifie l'équation d'une courbe et le point de coordonnées (x,y) est sur la courbe (cf III.3 (15/3)). En revanche, il conserve des difficultés à traduire algébriquement des propriétés graphiques (cf III.5,6 (15/3)).

En conclusion, Frédéric est rentré en Première G avec des compétences algébriques limitées. N'ayant pas pris la mesure des ruptures entre BEP et première G, l'handicap à surmonter en Première était certainement trop grand. Et comme lors de son passage de CM2 en sixième, Frédéric a décroché. Mais, il a su, pendant l'année de Première, reconstruire des connaissances algébriques à la fois dans les dimensions outil et objet. Même si elles furent insuffisantes la première fois, elles lui permirent de mettre en place les conditions d'une réussite future. Frédéric a redoublé sa Première dans de bonnes conditions : il a conservé des notes convenables en mathématiques toute l'année (12 ; 9 ;

10). En Juin 1995, Frédéric a obtenu son baccalauréat technologique série CG (comptabilité gestion) et vient d'entrer en première année de BTS Action Commerciale.

IV.5 CONCLUSION

Pour conclure, nous voulons insister sur un élément qui peut ne pas apparaître à première vue. Le niveau d'analyse nous oblige à prendre conscience du chemin parcouru par les élèves entre le profil initial et le profil de sortie. Ce résultat n'apparaît pas de manière évidente au vue de l'évolution des élèves : il n'y a eu pas de progression spectaculaire excepté pour Mérième et les autres élèves restent encore loin d'un fonctionnement algébrique adéquat, à ce niveau scolaire.

Ces quatre études de cas mettent en lumière, du moins le pensons-nous, la complexité des constructions et des connexions à élaborer par les élèves pour rentrer dans une activité algébrique. Chacun d'entre eux va évoluer, dans son originalité propre, en jouant tour à tour sur divers points d'appui, en étant arrêtés par des obstacles, ... Pensons à Caroline, à Frédéric qui rentrent en Première avec des lacunes importantes et qui vont reconstruire des îlots de connaissances algébriques, qui pourront localement s'avérer efficaces (manipulation formelle opératoire pour des expressions pas trop complexes pour Caroline, utilisation de l'outil algébrique pour résoudre dans des situations peu complexes pour Frédéric).

Notons quand-même que ces élèves, Caroline et Frédéric, vont aboutir à un fonctionnement qui pourra vivre comme un fonctionnement standard dans le cadre institutionnel et leur permettre d'obtenir le baccalauréat : leur rapport à l'algèbre a donc suffisamment bougé pour leur permettre une adaptation positive dans le nouveau système.

Pour comprendre certains parcours d'élèves, en particulier ceux d'Alice, de Mérième et de Frédéric, il nous a fallu prendre en compte des éléments externes à l'algèbre et même aux mathématiques mais qui conditionnent fortement leurs rapports à l'algèbre. On pense immédiatement aux raisons qui ont joué un rôle déterminant dans la prolongation des études de Mérième et d'Alice : ne pas travailler dans les caves ou en stage. On met aussi en relation le refus d'Alice de rentrer dans l'apprentissage de la technique et sa conception de l'apprentissage opposant "comprendre" et "apprendre".

Ces parcours donnent quand même une note optimiste : dans un environnement scolaire "pensé", des élèves en difficultés peuvent reconstruire des mathématiques, y prendre plaisir et même réussir. Mais ne soyons pas naïve et regardons les limites des évolutions obtenues et les difficultés à reconstruire des compétences adéquates dans le cadre des contraintes institutionnelles.

CHAPITRE 8

AUTOMATISATION DU DIAGNOSTIC. PERSPECTIVES

Très tôt dans la recherche s'est posée pour nous la question de l'automatisation du diagnostic et de la définition des profils d'élèves, en particulier pour les raisons suivantes :

- Jusqu'à présent, nous avions défini "à la main" des profils d'élèves connus, avec qui nous avions travaillés pendant un an : les appréciations subjectives pouvaient avoir pris une part importante dans la définition de leurs profils. Nous voulions dégager le codage du niveau subjectif auquel il pouvait rester encore attaché.

- Dans une perspective sur le moyen terme, nous pensions que le type de diagnostic préconisé et les modalités de fonctionnement définies au chapitre 6 constituaient des moyens nouveaux pour différencier, à des moments donnés dans la classe, l'enseignement des mathématiques, en tenant compte des profils d'élèves (cf chapitre 7). En particulier, ces moyens pouvaient permettre de répartir les élèves en groupes de besoin en fonction de leurs modes et de leurs cohérences de fonctionnement. Pour rendre possible une telle pratique, nous voulions créer un logiciel qui automatise le diagnostic puis la répartition des élèves en groupes de besoin. Nous étions d'autant plus convaincue de la nécessité d'une telle démarche que, dans le cadre de l'évaluation à l'entrée en seconde générale[1], nous étions parfois confrontée, nous semble-t-il, à l'inadaptation partielle du diagnostic mis en œuvre dans les classes faibles.

Nous avons donc décidé d'automatiser la définition des profils d'élèves. Quatre étudiants de maîtrise MIME de l'Université du Maine[2] (Le Mans) ont réalisé le logiciel de détermination des profils avec notre collaboration : P. Boursier et P. Riolet ont conçu et réalisé l'interface début 1995 et M. Chevalier et H. Malait terminent le module d'analyse

[1]Les élèves passent un test portant sur des exercices relatifs à l'ensemble du programme de mathématiques de troisième. Les exercices sont structurés autour des capacités et des compétences associées : recevoir un message, traiter le message, émettre un message, appliquer les savoir et savoir-faire de base et des différents domaines mathématiques du programme de Seconde. Ensuite le professeur évalue puis code leurs solutions en termes d'échec/erreur par rapport aux solutions attendues (non traité, 1 solution attendue, 2 solution correcte non attendue, 9 solution incorrecte), les erreurs les plus classiques étant répertoriées par le code 6. Le professeur rentre les codes recueillis sur ordinateur et le logiciel d'exploitation EVAREM permet alors de les analyser et de regrouper les élèves suivant des caractéristiques pertinentes choisies par le professeur. Cette structure d'analyse rend difficile des recoupements en termes de cohérence de fonctionnement relativement à un domaine de connaissances données.

[2]Les étudiants ont travaillé sous la responsabilité d'E. Delozanne maître de conférences au LIUM, Laboratoire d'Informatique de l'Université du Maine dirigé par M. Vivet. Ce laboratoire mène des recherches pour la conception d'EIAO utilisables par des élèves en situation scolaire.

de définition des profils. Cette première version est développée en langage objet, ici SMALLTALK.

Dans ce chapitre, nous présentons le projet global et les spécifications du logiciel qui est en voie d'achèvement. Nous montrons en quoi ce travail en collaboration avec l'EIAO a permis un retour sur l'analyse didactique. Pour terminer, nous indiquons quelques perspectives de recherche.

I. AUTOMATISATION DU DIAGNOSTIC : LA DÉFINITION DES PROFILS D'ÉLÈVES

I.1 PRÉSENTATION

L'automatisation complète du diagnostic passe par les étapes suivantes :

- première étape : la conception et la mise en œuvre automatique de tâches diagnostic sur ordinateur,

- deuxième étape : le dépouillement automatique des solutions des élèves après le passage du test organisé sur une structure d'analyse donnée (cf chapitre 2),

- troisième étape : le calcul des profils d'élèves.

La troisième étape apparaît, d'un point de vue informatique, plus facilement réalisable que les deux autres et c'est celle que nous avons engagée en premier. Elle est en partie réalisée et n'a pas posé de gros problèmes informatiques. Dans ce cas, le dépouillement des productions des élèves ainsi que l'attribution des valeurs des critères doivent être préalablement réalisés par le professeur qui doit entrer les résultats en machine, la machine étant alors chargée de calculer les profils.

En revanche, les deux premières étapes posent des problèmes délicats, notamment au niveau de la mise en œuvre informatique et du dépouillement des tâches de mathématisation et de toutes les tâches demandant une justification en langage naturel. Elle n'est pas encore engagée. Nous y reviendrons au paragraphe II et présenterons les perspectives de recherche associées.

Nous ne présenterons donc dans les paragraphes suivants que le logiciel de détermination des profils correspondant à la troisième étape de l'automatisation.

I.2 SPÉCIFICATIONS DU LOGICIEL DE DÉTERMINATION DES PROFILS

Le logiciel a d'emblée été conçu pour ne pas rester prisonnier, ni de l'ensemble des dix-neuf tâches diagnostic construites dans le cadre de cette recherche, ni de l'ensemble des valeurs locales attribuées aux critères. En effet, dans l'objectif à long terme d'une automatisation complète du diagnostic (réalisation des deux premières étapes), certaines tâches peuvent s'avérer inadaptées et le logiciel doit nécessairement être évolutif pour permettre la représentation en machine d'autres tâches mais aussi pour pouvoir intégrer des types de productions d'élèves non encore rencontrées.

Spécifications du logiciel :

Le logiciel offre plusieurs fonctionnalités et a été divisé en trois modules nécessaires à la définition des profils d'élèves.

- Le module d'initialisation permet au concepteur du diagnostic de configurer le logiciel. Il s'agit ici de définir la structure d'analyse multidimensionnelle (composantes, critères et valeurs globales associés). Le nombre de composantes et de critères est fixé[3], ce qui n'est pas le cas pour les valeurs globales. On peut ajouter, modifier ou supprimer des valeurs qui entrent dans la description les grilles descriptives et les grilles d'analyse des tâches diagnostic (cf fig n°1).

Il s'agit aussi de définir les tâches diagnostic. De même, on peut ajouter, modifier ou supprimer une tâche diagnostic : pour ceci, on lui associe son type, les composantes et les critères qui sont mis en jeu par ses grilles descriptive et d'analyse. On sélectionne parmi les composantes et critères affichés ceux mis en jeu par la tâche ; il en est de même pour les valeurs globales. Pour chaque valeur globale en jeu, on rentre les valeurs locales associées (cf fig n°2).

- Le module de saisie permet au professeur, d'une part de rentrer la liste des élèves, et d'autre part, de sélectionner les valeurs locales associées à leurs productions. Une fois le type de tâche choisi dans la liste (mathématisation, technique, reconnaissance), on en sélectionne une. Pour chaque tâche diagnostic, pour chaque composante d'analyse et pour chaque critère mis en jeu, la liste des valeurs locales envisageables est affichée à l'écran : le professeur doit cliquer sur les valeurs correspondantes à la solution de chaque élève (cf fig n°3).

- Le module d'analyse permet au professeur d'obtenir les profils d'élèves et des informations sur leurs comportements, composante par composante. Il est possible d'afficher les deux types d'analyse en termes d'échec/réussite par rapport à un niveau attendu en classe ou en termes de cohérence (cf fig n°4). Nous présentons les calculs mis en jeu au paragraphe suivant.

[3]L'interface réalisée correspond à la première version de la structure d'analyse qui a été simplifiée par la suite.

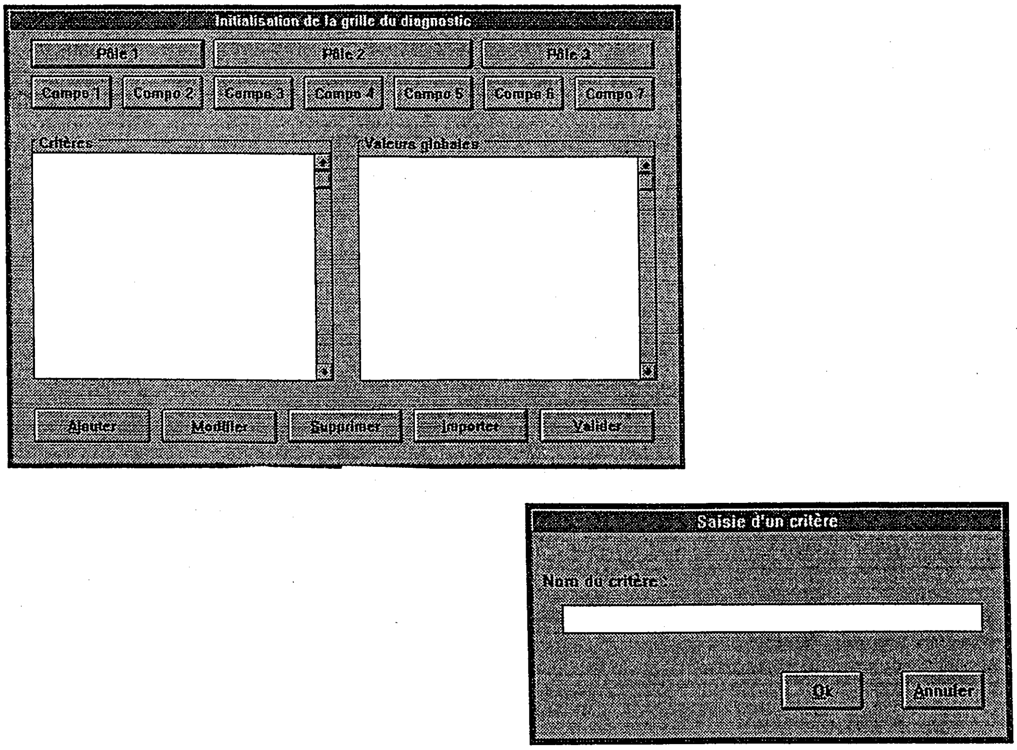


Fig n° 1 : Initialisation de la grille du diagnostic

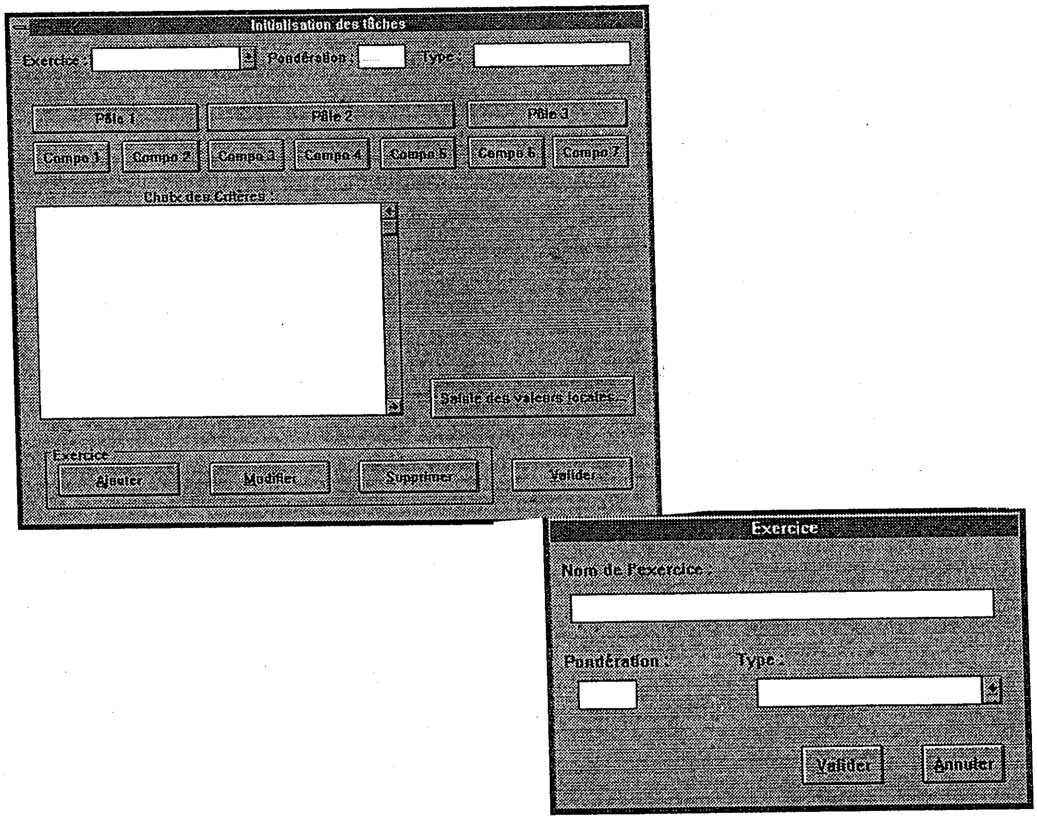


Fig n° 2 : Initialisation des tâches diagnostic

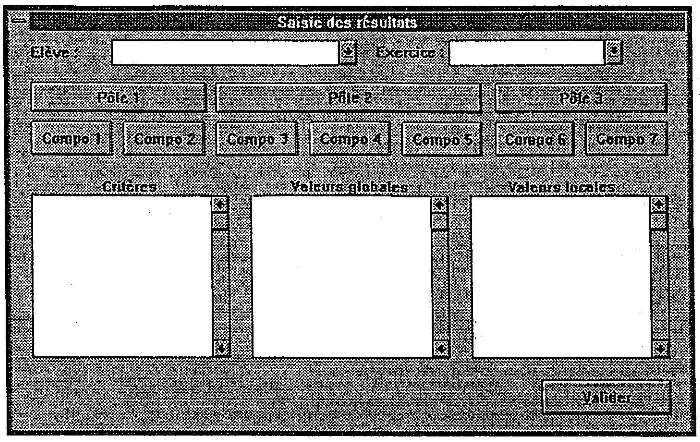


Fig n° 3 : Saisie des résultats

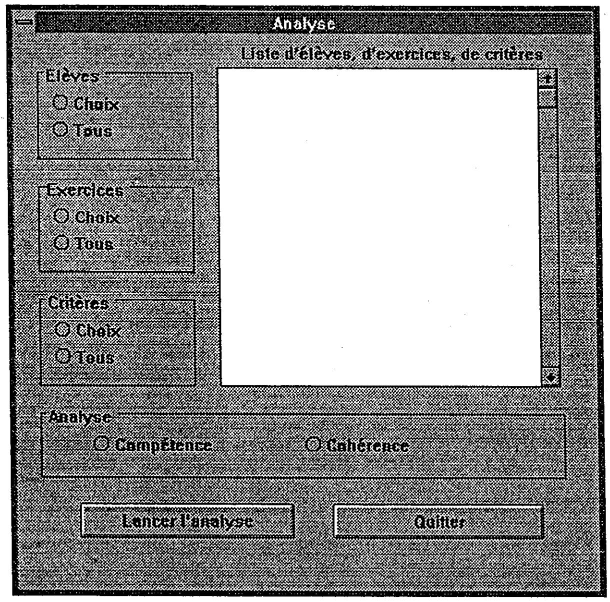


Fig n° 4 : Analyse et définition des profils

La conception et la réalisation des modules d'analyse et d'initialisation ont conduit à un retour sur l'analyse didactique. C'est ce point que nous souhaitons aborder dans le paragraphe suivant.

I.3 RETOUR SUR L'ANALYSE DIDACTIQUE.

L'automatisation du diagnostic a mis au premier plan deux problèmes méthodologiques importants, déjà mentionnés dans les chapitres 3 et 4, liés respectivement aux questions de complétude de l'ensemble des valeurs locales et de calculabilité des modalités à partir des valeurs locales prises. Le passage d'une analyse didactique à la réalisation d'un produit informatique, en nécessitant un niveau d'explicitation plus important, en obligeant à anticiper le déroulement d'expérimentations futures menées hors de notre contrôle, nous a de nouveau confrontée à ces questions.

• *Complétude de l'ensemble des valeurs locales*

La première expérimentation avait montré la nécessité d'ajouter des valeurs locales aux valeurs globales définies a priori, à la fois pour décrire les spécificités des tâches et les comportements des élèves. En nous basant sur les analyses théoriques ainsi que sur les résultats de la première expérimentation, nous avions émis l'hypothèse que la transposition à des tâches voisines, la réalisation d'expérimentations nouvelles dans des contextes culturels voisins, ne conduirait pas à une explosion des valeurs locales des critères. La deuxième expérimentation a confirmé cette hypothèse comme nous l'avons montré dans le chapitre 4.

Cette validation empirique d'une hypothèse issue d'analyses théoriques et expérimentales nous semblait suffisante dans notre perspective didactique initiale. Le passage sur machine nous a confronté à l'exigence d'un degré de certitude plus fort. Pouvions-nous réellement garantir couvrir par les valeurs globales et locales introduites, tous les types de réponse que l'utilisateur du logiciel pourrait avoir à coder ? Raisonnablement non. C'est pourquoi, nous avons rajouté systématiquement une valeur locale "autre". Ceci n'est qu'un palliatif et il est clair qu'une utilisation trop fréquente de cette valeur imposerait un retour sur l'analyse didactique de la tâche. Le logiciel est conçu pour pouvoir s'y adapter puisque le module d'initialisation permet de modifier la liste des valeurs locales des critères associés à un exercice.

• *Calculabilité des modalités*

Le recoupement "à la main" des valeurs locales de critères, pour chaque composante, laissait penser que le calcul automatique des modalités à partir de ces valeurs serait assez facile à mettre en œuvre sur machine. Là encore, la mise en œuvre informatique nous a amenée à questionner leur pertinence. Ils apparaissaient raisonnables et efficaces dans le cadre des expérimentations réalisées mais nous n'avions pas les moyens de préciser leur champ de validité. Cette interrogation était d'autant plus cruciale que s'il est relativement aisé de créer et de modifier des valeurs, il est beaucoup plus coûteux de programmer et a fortiori de modifier une fonction d'évaluation.

Nous précisons ci-après les choix réalisés pour la description du fonctionnement des élèves aussi bien en termes d'échec/réussite, qu'en termes de cohérence.

- <u>En termes d'échec/réussite</u> :

La mise en œuvre informatique de ce type d'analyse ne pose aucune difficulté : il suffit de calculer la fréquence de réussite aux différents types de tâches et de relever les types de traitement algébrique maîtrisés, c'est-à-dire ceux mis en œuvre correctement, à un seuil choisi. Ici, nous avons retenu un seuil de plus de 50%, mais ce seuil peut varier d'un contexte à un autre (et le logiciel permet cette variation).

- <u>En terme de cohérence de fonctionnement</u> :

Nous avons défini a priori dans le chapitre 6, par recoupement des valeurs locales d'un même critère mis en jeu dans différentes tâches, des modalités de fonctionnement relatives aux différentes composantes qui permettent de définir les profils d'élèves.

La réalisation du module d'*analyse* nécessite l'explicitation des choix réalisés dans l'attribution des modalités effectuée à la main. Ils l'ont été de la façon suivante :

Chaque modalité est associée à un ensemble de valeurs locales (cf Chapitre 6). Pour calculer les modalités de fonctionnement d'un élève relatives à une composante, nous déterminons d'abord la liste des valeurs locales qui vont être prises en compte dans l'attribution d'une modalité donnée ainsi que le nombre d'occurrences de chaque valeur[4]. Rappelons que nous avons déjà admis que le fonctionnement d'un élève peut relever de plusieurs modalités, sans relever pour autant d'un fonctionnement isolé ou erratique.

Cette étape ne pose pas de difficulté informatique mais met au premier plan la nécessité de définir des seuils pour l'attribution des modalités. Pour une modalité, nous définissons trois seuils pour indiquer si cette modalité apparaît assez systématiquement, apparaît occasionnellement ou de façon exceptionnelle. Le choix des pondérations, des seuils d'attribution dépend de nombreux paramètres : la représentativité des valeurs locales pour une modalité donnée, le critère ou la composante d'analyse, la classe ... Il semble important que le logiciel permette à ce niveau un certain paramétrage, même si ce n'est pas le cas actuellement.

[4]Le nombre d'occurrences de chaque valeur locale associée à une modalité de fonctionnement pour une composante d'analyse donnée, par recoupement sur les tâches concernées, est déterminé par un algorithme de recherche d'une valeur donnée dans une suite de listes de valeurs.

Illustrons le fonctionnement actuel par un exemple : attribution d'une modalité ou de plusieurs modalités correspondant aux types d'écriture privilégiés par un élève.

L'attribution d'une modalité relative aux types d'écriture met en jeu les critères *type de formation* et *type de conversion* des composantes *gestion dans le registre algébrique* et *articulation entre le registre des écritures algébriques et les autres registres* pour des tâches de reconnaissance (T3, T4, T6, T15, T10 et T11) et pour des tâches techniques ou de mathématisation (T2, T5, T7, T12, T13, T16, T17, T19). Dans le chapitre 6, nous avons défini quatre modalités ou types d'écriture : écriture algébrique correcte, écriture algébrique dans un système "sans parenthèses", écriture algébrique associée au premier degré ou écriture algébrique en assemblage.

Types d'écriture	Ensemble des valeurs locales associées
Ecriture algébrique correcte	E1 = {Correct}
Ecriture algébrique dans un système "sans parenthèses"	E2 = {Lecture de gauche à droite, sans () priorité au carré, sans () priorité au -, sans (), calcul de gauche à droite, écriture linéaire globale non parenthésée}
Ecriture algébrique associée au premier degré	E3 = {Désassemblage, carré duplication, puissance glissement, confusion + et x}
Ecriture algébrique en assemblage	E4 = {Assemblage final, regroupement assemblage}

Tableau n°5 : modalités et valeurs locales associées

• *La première consiste à attribuer à chaque modalité, une fréquene d'apparition* :

Désignons par v_{ij} la $j^{ième}$ valeur locale du $i^{ième}$ ensemble de valeurs locales et par e_{ij} son nombre d'occurrences, avec $0 \leq e_{ij} \leq n_k$, n_k désignant le nombre de tâches où intervient le critère concerné (ici $n_k = 14$). Supposons qu'il y a p modalités avec $1 \leq i \leq p$ (ici $p = 4$) et que le nombre j de valeurs de chaque ensemble vérifie $q1 \leq j \leq qp$ (ici $1 \leq j \leq 6$). Par le calcul, nous obtenons les listes pondérées de valeurs locales suivantes pour attribuer chaque modalité d'une composante :

E1 : $((e_{11}, v_{11}), (e_{12}, v_{12}), \ldots, (e_{1q1}, v_{1q1}))$

E2 : $((e_{21}, v_{21}), (e_{22}, v_{22}), \ldots, (e_{2q2}, v_{2q2}))$

...

: $((e_{p1}, v_{p1}), (e_{p2}, v_{p2}), \ldots, (e_{pqp}, v_{pqp}))$

A chaque modalité est attribuée la fréquence : $(e_{i1}+e_{i2}+ \ldots +e_{iqi})/n_k$.

Dans ce système donc, chaque valeur locale est affectée de la même pondération. Il s'agit là du choix le plus simple qui a semblé raisonnable et efficace dans les premières déterminations de profil, mais il serait sans doute souhaitable de pouvoir le modifier facilement dans le module d'initialisation, le choix d'équi-pondération étant le choix par défaut.

• *Cette fréquence étant connue, pour chaque modalité, les attributions de modalités se font suivant un système de seuils.* Ainsi, par rapport à E2 :

Fréquence(valeurs de E2) $\geq$ 50% : attribution de la modalité "écriture algébrique dans un système "sans parenthèses",

10% < Fréquence(valeurs de E2) < 50% : attribution de la modalité "écriture algébrique dans un système "sans parenthèses" avec la mention "occasionnelle",

0% < Fréquence(valeurs de E2) $\leq$ 10% : attribution de la modalité "écriture algébrique dans un système "sans parenthèses" avec la mention "exceptionnelle",

Fréquence(valeurs de E2) = 0% : pas d'attribution de cette modalité.

Comme précédemment, le choix des seuils s'est effectué par rapport aux données issues des expérimentations menées, et il serait souhaitable que les valeurs seuils soient paramétrables dans le module d'initialisation, ces valeurs par défaut étant fournies.

• *Algorithme de calcul des modalités* :

Ceci correspond à l'algorithme suivant :

```
Tant que le recoupement n'est pas terminé faire :
    Si fréquence (valeurs de E2) > 50%
      alors modalité <— "écriture algébrique dans système sans ()"
      sinon si 10% < fréquence(valeurs de E2) < 50%
        alors modalité "écriture dans système ss ()" avec mention "occasionnelle"
        sinon si 0% < fréquence(valeurs de E2)
          alors modalité<—"écriture dans système sans ()" avec mention
                                                           "exceptionnelle"
          sinon aucune modalité.
...
...
    Fin tant que.
```

II. PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans ces perspectives de recherche, nous distinguons deux dimensions, celle correspondant à la construction automatique des profils et celle correspondant à la construction d'EIAO pour l'action didactique s'appuyant sur les profils d'élèves.

II.1 CONSTRUCTION AUTOMATIQUE DES PROFILS

II.1.1 Modèle de l'élève

Notre travail peut permettre, nous semble-t-il, de mettre en relation la notion de profil d'élèves[5] définie au chapitre 6 et celle de modèle d'élève utilisé en EIAO[6] dans les tuteurs intelligents.

La communauté des chercheurs en EIAO issus de l'IA se réfère à une architecture de tuteurs intelligents qui comprend au moins les trois modules suivants :

- le module expert contient une représentation du domaine et des mécanismes de rasionnement enseignés,
- le module pédagogique gère le déroulement des sessions en se référant à un paradigme d'apprentissage,
- le modèle de l'élève contient une représentation que le système se fait des connaissances de l'élève.

De plus, une interface assure les échanges entre l'élève et le système informatique.

Wenger définit le modèle de l'élève comme suit : "ideally, the student model should include all the aspects of the students'behavior and knowledge that have repercussions for his performance and learning" [Wenger 1987].

On distingue principalement trois grands types de modèles de l'élève sont principalement mis en œuvre dans les tuteurs intelligents :

• les "Overlay models" : ce sont des modèles d'"expertise partielle" qui considèrent les connaissances de l'élève comme un sous-recouvrement des connaissances d'un expert, pour un domaine de connaissances donné,

• les "Buggy models (ou modèles perturbés)" : ce sont des modèles qui prennent en compte les conceptions erronées des élèves dans des domaines très locaux (BUGGY [Brown et Burton 78], REPAIR (Brown et VanLehn 1980], SIERRA [VanLehn 1983], ACT [Anderson 1984]).

---

[5]Pour nous, le terme de profil d'élève se rapproche plus du terme de modèle de l'élève défini dans les tuteurs intelligents. Le terme profil de l'élève est pour nous différent du terme profil utilisé en informatique pour qualifié le type d'utilisateur d'un logiciel : utilisateur expert, utilisateur occasionnels, ...

[6]Environnement Interactif d'Apprentissage Assisté avec Ordinateur.

• les "Modèles cognitifs" : ce sont des modèles prévisionnels du comportement de l'élève en situation d'apprentissage dans un domaine relevant de la résolution de problème. Ces modèles nécessitent de définir l'ensemble des connaissances que l'élève utilise pour résoudre un problème : savoir-faire, connaissances conceptuelles propres au domaine, stratégies de résolution propres ou générales.

Le projet ELECTRE [Paliès 1988], par exemple, se situe dans cette dernière problématique :

"ELECTRE réalise en effet, grâce à deux modules distincts, deux fonctions complémentaires :

- élaborer un modèle du fonctionnement cognitif du sujet en situation d'apprentissage[7] [qui] permette la simulation du comportement de l'élève en situation de résolution de problèmes élémentaires d'électricité. Le module [associé] s'intéresse à la représentation et à la structuration des connaissances et des méta-connaissances de l'élève. (...)

- opérer un diagnostic cognitif automatique du sujet. ELECTRE analyse les réponses d'un élève à un ensemble d'exercices et construit une représentation de la base de connaissances de cet élève" [Paliès 1987].

L'analyse didactique présentée dans les chapitres précédents décrit, dans un champ problèmes regroupant l'algèbre élémentaire, les modes de fonctionnement des élèves en prenant en compte, de façon assez fine, des régularités et des cohérences de fonctionnement correct ou incorrect. Ce travail peut, nous semble-t-il, constituer une structure d'analyse pertinente pour aborder la modélisation de l'élève en EIAO dans ce domaine, dans la troisième perspective citée : celle des modèles cognitifs.

Au delà de ces convergences avec des problématiques issues de l'IA, il nous semble que notre travail répond aussi au moins partiellement aux préoccupations de didacticiens travaillant en EIAO, par exemple N. Balacheff, par la distinction qu'il introduit entre différents niveaux d'analyse. Pour N. Balacheff

"La prise en compte de l'élève a pour base des observables, produits d'un découpage et d'une organisation du "réel" sous un contrôle théorique et méthodologique dont la pertinence est déterminée par la problématique de l'observateur. Ainsi, le travail du didacticien comprend la constitution d'un corpus d'observables, parmi lesquels ceux appelés "comportements" de l'élève, à partir duquel est construit un modèle de connaissances appelé *conception*[8]. Ce modèle est une construction théorique du chercheur et non ce qui est effectivement "dans" la tête de l'apprenant" [Balacheff 1994]. Puis il distingue le niveau de constitution du corpus d'observables de celui de son

[7]L'élaboration du modèle cognitif du sujet a été menée par une équipe inter-disciplinaire regroupant des chercheurs en Psychologie Cognitive : E. Cauzinille et J. Mathieu et en Didactique de la Physique : M. Caillot.

[8]Le terme conception est utilisé dans l'acception de M. Artigue [Artigue 1990, pp. 265-279].

interprétation en référence aux savoirs, enjeu de l'apprentissage. Il définit alors deux niveaux :

- "d'une part un niveau *comportemental* auquel il s'agit de rendre compte des comportements des élèves en tant qu'organisation des observables,
- et d'autre part, un niveau *épistémique* auquel il s'agit d'attribuer une signification à ces comportements" [Balacheff 1994].

Il souligne la difficulté de remonter du niveau comportemental au niveau épistémique, c'est-à-dire d'une analyse micro-didactique à une analyse plus globale.

Il nous semble que les valeurs locales associées aux critères qui décrivent les solutions des élèves se situent au niveau comportemental selon N. Balacheff, tandis que les modalités se situent davantage au niveau épistémique. Il serait sans doute intéressant d'analyser plus avant ces similarités apparentes et d'étudier leur impact en termes de modélisation de l'élève.

II.1.2 Automatisation du diagnostic sur ordinateur

Les deux premières étapes de l'automatisation du diagnostic, création de situations de diagnostic sur ordinateur, dépouillement et codage automatique ne sont pas réalisées (cf paragraphe I). Jusqu'à présent, le module d'initialisation a été configuré avec les dix-neuf tâches diagnostic, les grilles descriptives et les grilles d'analyse associées.

Dans le cadre d'un travail pluridisciplinaire nous associant au LIUM, nous envisageons une recherche concernant la création et la mise au point de situations de diagnostic sur ordinateur.

Nous pouvons faire l'hypothèse que certaines des dix-neuf tâches diagnostic seront transposables sur ordinateur sans difficultés (il s'agit des tâches de reconnaissance conçues comme des QCM, des tâches "techniques"). Nous avons déjà utilisé le didacticiel EXOPOLY réalisé par le CREEM[9] comme outil pour analyser finement, à partir des traces informatiques enregistrées, les types d'écriture algébrique et les types de manipulation formelle utilisés par les élèves.

Mais nous pouvons faire aussi l'hypothèse que d'autres tâches ne le seront que difficilement : il s'agit surtout des tâches de mathématisation, c'est-à-dire, des tâches où les élèves font intervenir le langage naturel pour rédiger une preuve ou les étapes successives d'une résolution. Or ces tâches jouent un rôle essentiel dans notre structure d'analyse de la compétence algébrique. Il est donc nécessaire de créer des situations informatiques qui mettent en jeu les mêmes types de compétences. C'est ce que nous envisageons de faire dans le cadre de la collaboration avec le LIUM.

[9]Le CREEM est le Centre de Recherche et d'Expérimentation sur l'Enseignement des Mathématiques du CNAM à Paris dirigé par Serge Hocquenghem.

II.2 CONCEPTION D'EIAO POUR L'ACTION DIDACTIQUE S'APPUYANT SUR LES PROFILS

Un autre champ de recherche se situe autour de la modélisation de l'interaction homme-machine dans un EIAO et de la création d'outils informatiques pour produire des EIAO dans des contextes scolaires, dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Dans ce champ, il nous semble que notre travail peut à la fois aider à la conception de situations adaptées au profil actuel de l'élève et à la conception des aides proposées à l'élève dans l'interaction.

• *Conceptions des situations adaptées au profil actuel de l'élève* :

E. Delozanne place l'interaction apprenant/système au centre de la démarche de conception d'un EIAO. La notion de "situation d'interaction" se situe dans cette problématique.

"Nous appelons situation d'interaction, l'ensemble formé par :

- les objectifs d'enseignement (...) ;
- la tâche de résolution demandée à l'étudiant (...) ;
- les données (état du problème), les outils (liste des outils du domaine, aides), qui sont fournis à l'étudiant pour mener à bien cette tâche,
- les stratégies que l'étudiant est censé mobiliser pour effectuer cette tâche,
- les réponses possibles de l'étudiant,
- les réactions du système (évaluation du choix de l'étudiant, explication)" [Delozanne 1992].

La structure d'analyse peut apporter des éléments pertinents pour créer des situations d'interaction et pour spécifier l'interaction homme-machine dans le cadre de la conception d'un logiciel destiné à favoriser les apprentissages dans le domaine de l'algèbre élémentaire.

Une approche analogue à celle menée dans la réalisation du logiciel REPERES[10] [Dubourg 1995] peut d'ailleurs être retenue : analyse cognitive et didactique du domaine algébrique (connaissances en jeu, public cible, enseignement usuel, difficultés et des élèves, ...), contexte d'usage du logiciel, situation spécifique paramétrée par les objectifs spécifiques d'enseignement, la tâche et les outils pour effectuer cette tâche, l'ensemble des stratégies envisageables des élèves pour la tâche visée, l'ensemble des stratégies du logiciel prenant en compte le modèle de l'élève.

[10]REPERES est un projet pluridisciplinaire dont l'objectif est la conception et la réalisation d'un EIAO destiné à faciliter chez les élèves l'articulation entre des registres de représentation différents. X. Dubourg, E. Delozanne et nous-même y participons.

• *Conception de l'aide dans une situation d'interaction prenant en compte le modèle de l'élève* :

Un deuxième champ de recherche se situe dans la définition et la gestion de l'aide dans une situation d'interaction dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Comme dans REPERES [Dubourg 1995], il est possible de prévoir des rétro-actions du logiciel en fonction des actions de l'élève. Le logiciel peut proposer différents outils de contrôle pour permettre aux élèves d'évaluer leur travail ou de guider leur résolution

III. CONCLUSION

Nous avons, dans ce court chapitre, essayé de présenter une facette plus récente de notre travail : celle résultant de la collaboration avec des chercheurs en EIAO, en insistant sur les questions didactiques soulevées par l'interaction avec l'EIAO ainsi que sur les perspectives de recherche que cette collaboration ouvre. Il s'agit là, le lecteur s'en sera aisément rendu compte, d'une dimension du travail encore en gestation même si elle a déjà abouti à des réalisations tangibles. Mais dans le cheminement qui a été le nôtre : où le travail didactique n'était pas un objectif en soi mais le moyen incontournable de comprendre des dysfonctionnements du système d'enseignement pour essayer d'avoir prise même très partiellement sur eux, la forme "d'aboutissement" que représente la réalisation de moyens informatisés de diagnostic ou d'EIAO prenant en compte les caractéristiques essentielles du fonctionnement des élèves en algèbre, notamment les élèves faibles, revêt une valeur en quelque sorte "symbolique".

CONCLUSIONS, PERSPECTIVES

Nous nous sommes intéressée dans notre recherche à la question de savoir si les difficultés rencontrées par les élèves issus de BEP tertiaire en Première G d'adaptation ont uniquement pour source "leur niveau mathématique". C'est le point de vue le plus communément exprimé par les enseignants, cette conviction étant renforcée plus ou moins inconsciemment par le fait que les élèves qui vont en BEP y sont souvent orientés par l'échec au niveau collège. Mais, comme nous l'écrivions dans l'introduction, il s'agit peut-être là d'une rationalisation commode.

Les problèmes de niveau, même s'ils sont réels, ne sont-ils pas renforcés, voire exacerbés, par des décalages importants entre les rapports aux objets mathématiques et au savoir jugés adéquats[1] par les institutions organisant les enseignements en B.E.P. ou en cycle long ?

Ceci nous a conduite à faire l'hypothèse qu'il y avait là un point de dysfonctionnement du système didactique dont il était possible d'éclairer des nœuds, en particulier :

• en cherchant à identifier des caractéristiques d'enseignement en B.E.P. tertiaire qui pourraient participer aux difficultés d'adaptation des élèves,

• en cherchant à concevoir des moyens de diagnostic opératoires pour établir des profils d'élèves dans le domaine de l'algèbre élémentaire à leur entrée en Première G d'adaptation et à les rapporter aux profils institutionnels,

• en cherchant à cerner de façon exploratoire des conditions d'évolution de ces profils sur le moyen terme dans le cadre d'un enseignement donné.

Ultérieurement, nous avons également cherché à montrer que l'outil informatique pouvait être un moyen opératoire pour établir le diagnostic.

Dans cette conclusion, nous rappelons d'abord les choix réalisés pour construire la structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique, qui méthodologiquement, constitue l'outil central de la recherche. Nous présentons ensuite synthétiquement les principaux résultats obtenus au cours de la recherche avant de proposer, pour terminer, des perspectives et quelques nouvelles pistes.

[1]Nous pensons à la notion d'idonéité introduite par Y. Chevallard "Vous pourrez douter, en revanche, que le rapport officiellement imposé se révèle bien adapté ou, nous dirons, idoine, à certains emplois effectifs que vous avez en tête." [Chevallard, 1989]

I. LA STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE

Pour répondre à la question initiale, nous avons choisi de nous limiter à un domaine mathématique précis : l'algèbre élémentaire puis de construire une structure d'analyse qui permette une approche symétrique des rapports à ce domaine côté enseignement et côté élève. Ce choix s'est avéré capital pour mettre en relation, après leur analyse respective conjointe, le fonctionnement cognitif des élèves, leurs rapports personnels à l'algèbre élémentaire d'une part, et les rapports institutionnels à l'algèbre en B.E.P. tertiaire et en Première G d'autre part.

Nous avons basé notre analyse sur une définition a priori de la "compétence algébrique" adaptée à notre propos. Nous avons adopté pour ceci une vision multidimensionnelle de la compétence algébrique, structurée selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées : les dimensions outil et objet et prenant en compte la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre ainsi que la pluralité coordonnée des registres sémiotiques dans laquelle s'inscrit l'activité algébrique. Ceci nous a permis de construire une structure d'analyse qui rende compte de la diversité de l'activité algébrique même élémentaire, qui permette de repérer des cohérences plus ou moins locales au niveau des rapports personnels et institutionnels à l'algèbre et de mettre ces niveaux en relation, au moins partiellement.

La structure d'analyse est articulée autour de six composantes. La composante *traitement algébrique*, qui joue un rôle préalable aux cinq autres, a permis de comparer les rapports institutionnels à l'algèbre, de situer et d'évaluer les rapports personnels des élèves par rapport à un attendu institutionnel, dans les dimensions outil et objet.

Les cinq autres composantes ont permis d'identifier et de décrire des caractéristiques importantes, des cohérences locales aussi bien dans les rapports institutionnels à l'algèbre que dans le fonctionnement cognitif et les rapports personnels que les élèves développent vis à vis de l'algèbre. La prise en compte d'éléments qui ne sont pas complètement internes à l'algèbre s'est ici avérée essentielle pour comprendre certains phénomènes.

• La composante *rapport arithmétique/algèbre* a permis de positionner l'activité algébrique par rapport à celle en arithmétique.

• Les composantes *gestion dans le registre des écritures algébriques* et *articulation entre registre des écritures algébriques et les autres registres*, qui prennent en compte les aspects sémiotiques de l'algèbre, ont permis respectivement de caractériser la gestion des expressions dans le registre des écritures algébriques et la gestion des représentations symboliques dans l'articulation entre le registre des écritures algébriques et d'autres registres.

• La composante *fonction de l'algèbre* a permis de pointer différentes formes d'activité algébrique, différents rapports institutionnels ou personnels à l'algèbre.

• La composante *rationalité algébrique* a permis de cerner le niveau de rationalité mis en jeu dans l'activité algébrique aussi bien du côté élève que du côté enseignement.

Nous présentons maintenant en détail les résultats obtenus du côté institutionnel et du côté élève.

II. DU CÔTÉ INSTITUTIONNEL : DES DIFFÉRENCES DE RAPPORT INSTITUTIONNEL À L'ALGÈBRE

1) *A partir des programmes*

La structure d'analyse multidimensionnelle rend possible une lecture fine des programmes pour comparer ceux de BEP tertiaire et de Seconde indifférenciée. Ainsi, en dépit de convergences évidentes, nous avons mis en évidence en dehors des disparités dans les contenus mathématiques abordés, disparités a priori peu visibles en algèbre, des différences subtiles de formulation qui mettent en lumière des différences de rapport institutionnel à l'algèbre. Cette première analyse permet de faire apparaître des lignes de "partage" susceptibles de provoquer des ruptures importantes. Nous notons notamment dans ces différences et ruptures possibles :

- le rapport à la manipulation formelle des expressions algébriques, qui en Seconde indifférenciée fait intervenir le calcul algébrique dans de nouveaux emplois alors qu'en BEP, le calcul algébrique semble rester davantage enfermé dans un rôle d'usage et de transformation de formules ;
- le rapport à l'algèbre lié au poids important des applications tertiaires très stéréotypées en BEP alors que le spectre assez vaste des situations d'emploi de l'algèbre en Seconde indifférenciée contribue à montrer les différentes facettes de l'activité algébrique ;
- le rapport au 'fonctionnel' en Seconde qui engage l'algèbre dans une nouvelle dimension alors qu'en BEP l'algèbre reste dans un rapport privilégié aux formules et aux équations ;
- le rapport à l'algèbre en BEP à travers une éventuelle place laissée à l'arithmétique dans les situations tertiaires, étant donnés les différents degrés d'implication de l'algèbre a priori possibles, ce qui apparaît moins en Seconde.

2) *A partir des exercices* (sujets d'examen de BEP et exercices d'EVAPM seconde)

La structure d'analyse opérationnalisée du côté institutionnel permet d'associer à chaque exercice une grille descriptive qui rend compte des connaissances algébriques mises en jeu, dans les deux dimensions objet et outil, ainsi que du domaine d'emploi. Par une analyse transversale des exercices, nous mettons ainsi en évidence plus finement dans les rapports institutionnels à l'algèbre privilégiés en BEP et en Seconde, des emplois de l'algèbre et des techniques de résolution associées, qui peuvent provoquer des ruptures importante dans l'articulation entre les deux cycles.

• L'analyse des sujets d'examen de BEP tertiaire met d'abord en évidence la très grande variété des sujets et la répartition très inégale, selon les académies, des exercices liés au secteur tertiaire et des exercices internes au cadre algébrique ou liés à un contexte concret plus général.

• L'analyse comparative des sujets d'examen de BEP et des exercices de seconde indifférenciée provenant de EVAPM affine la comparaison des programmes :

Du côté objet, l'analyse des sujets montre un rapport institutionnel à l'algèbre qui prend peu en compte le traitement algébrique des expressions. Ce n'est pas le cas en Seconde indifférenciée : les exercices de manipulation formelle de niveau 1 et 2 constituent un ensemble de problèmes à partir duquel les élèves peuvent développer les techniques de traitement formel des expressions associées.

En BEP, la dimension outil de l'algèbre passe avant tout par un rapport d'utilisation de formules dans des situations contextualisées au secteur tertiaire mettant en jeu un traitement algorithmisé correspondant à celui d'exercices modèles déjà faits, ce qui n'est pas le cas en seconde : l'algèbre outil de formulation et de résolution est mis en jeu pour résoudre des problèmes, de façon guidée ou non. De plus, l'algèbre n'est que marginalement mobilisée comme outil d'étude des fonctions alors qu'elle commence à l'être en Seconde.

En BEP, les objets mathématiques mobilisés dans la résolution des divers problèmes sont essentiellement du premier degré (fonctions linéaires et affines, équations du premier degré, systèmes d'équations linéaires à deux inconnues) : il est ainsi possible de privilégier leur dimension procédurale ainsi que l'utilisation de sous-ensembles de règles de formation et de traitement relatives au premier degré. En Seconde, une ouverture sur des expressions plus diversifiées (fractions rationnelles, polynômes de degré supérieur à 1) entraîne une gestion plus diversifiée et adaptable. Nous retrouvons la même dichotomie en ce qui concerne l'articulation des registres de représentation.

3) *Analyse des cahiers d'élèves*

L'analyse des cahiers d'élèves apporte un éclairage nouveau à la fois sur les programmes et sur les sujets d'examen. Elle montre des similarités liées au programme de BEP tertiaire qui différencient très clairement les rapports institutionnels à l'algèbre en BEP et en Seconde (cf analyse des programmes et des exercices).

Mais des divergences peuvent apparaître aux frontières du programme sur de nombreux aspects. Ces divergences dépendent de l'épistémologie des professeurs qui semblent développer des points de vue différents sur l'apprentissage des mathématiques, sur les compétences algébriques à faire construire chez les élèves, ce qui ne sera pas sans conséquences sur leur enseignement et sur le rapport à l'algèbre développé. L'analyse montre bien ici que les professeurs conservent un espace de liberté certain dans le cadre du programme. Ces divergences concernent le travail de la technique dans la manipulation formelle des expressions développées et favorisées, les articulations entre registres, les conceptions procédurale ou structurale des objets, la place de l'arithmétique, l'ouverture à des situations diverses et peuvent induire des rapports à l'algèbre très différents.

Certains choix laissent prévoir des obstacles à l'adaptation des élèves en Première G, d'autres, au contraire, semblent pouvoir mettre en germe des points d'appui à l'adaptation.

Les obstacles peuvent être mis en rapport avec une trop grande hégémonie du premier degré, un trop faible développement de la technique de manipulation formelle et de la sémantique des expressions, une trop forte excroissance des situations stéréotypées du contexte tertiaire de degré de complexité 0 et 1 ou encore le manque de flexibilité à articuler le registre des écritures algébriques et d'autres registres.

Les cahiers montrent par ailleurs la diversité des voies d'ouverture possibles à l'adaptation. Explicitons les principales voies envisageables : un travail important mais "souple" de la technique, la diversité des situations et des types de tâches associées dans le contexte tertiaire mais aussi en dehors, l'entrée de l'algèbre dans une dimension fonctionnelle, le développement d'une bonne flexibilité à articuler le registre des écritures algébriques et les autres registres. Plusieurs voies sont rarement exploitées dans un même cahier.

III. DU CÔTÉ ÉLÈVE : LA DÉFINITION DES PROFILS D'ÉLÈVES

Nos choix d'analyse ont permis la construction d'un outil de diagnostic constitué :

• des dix-neuf tâches diagnostic et des grilles descriptives associées qui prennent en compte les dimensions outil et objet de l'algèbre et recouvrent des situations d'emploi diversifiées de l'algèbre mettant en jeu des registres de représentation divers, qui permettent d'étudier la rupture entre l'arithmétique et l'algèbre,

• des grilles d'analyse associées à chaque exercice : ces grilles ont été construites après une analyse a priori des tâches et une analyse a posteriori des productions écrites des élèves.

Les deux tests qui ont permis la mise au point et l'expérimentation de l'outil de diagnostic s'avèrent positif pour la structure d'analyse.

1) Les composantes et critères associés choisis a priori permettent de décrire les solutions des élèves dans les trois types d'exercices définis au chapitre 2 et permettent de mettre en évidence et de décrire la multidimensionnalité de l'activité algébrique. La structure permet d'éclairer certaines pratiques arithmétiques, de mettre en évidence l'importance de l'écriture et de la formulation dans tout traitement algébrique puis les divers degrés d'opérationnalité de la manipulation formelle, de faire apparaître différentes formes de justification qui peuvent cohabiter et diverses fonctions jouées par l'algèbre.

2) Les deux tests montrent la nécessité de rajouter des valeurs locales aux valeurs globales des critères définis a priori pour ainsi permettre à la fois de décrire certaines spécificités liées aux tâches mais aussi des comportements personnels des élèves.

Le deuxième test semble confirmer que : l'ensemble des valeurs locales relatives à un critère, pour des types de tâches voisines, semble rester relativement stable. L'ajout de valeurs ne va pas être permanent et ne va pas conduire à une explosion du nombre des valeurs locales.

3) La structure d'analyse joue le rôle que nous lui avions attribué : le recoupement des descriptions des productions de chaque élève aux différentes tâches permet de mettre en évidence des régularités et des cohérences dans ses pratiques, en particulier dans son rapport personnel à l'algèbre.

L'expérimentation menée à l'entrée en Première G d'adaptation a donc permis de dresser en quelques sorte un panorama cognitif de chaque élève. Le panorama, à ce stade du travail, est un objet bien trop complexe pour être didactiquement exploitable. Le détour par ce niveau très fin d'analyse nous avait semblé incontournable dans une première phase de notre travail pour rechercher et identifier des connaissances et compétences, même en germe, que l'institution était inapte à reconnaître. Mais nous faisions le pari que l'étude transversale des tâches, pouvait nous permettre d'élaborer sur ce niveau microscopique d'analyse des regroupements, à la fois opératoires et simples, sans pour autant dénaturer la complexité des processus en jeu.

C'est ce que nous avons fait, via la notion de profil, basée sur deux niveaux de description : le premier niveau en termes de réussite/échec par rapport à un niveau attendu dans les deux dimensions outil et objet, le deuxième niveau en termes de cohérences, la définition des modalités correspondant à nos yeux à un niveau de caractérisation des cohérences que nous visions.

Les profils des sept élèves issus de BEP tertiaire, présentés au chapitre 6, illustrent bien ce processus. Ils permettent de mettre en évidence bien sûr des lacunes importantes qui pourraient paraître a priori rédhibitoires chez la plupart des élèves concernés. Mais en dehors d'un niveau d'analyse relativement standard en termes de niveau de réussite par rapport à un certain nombre de tâches et d'attendus institutionnels, ils nous permettent surtout, d'une part, d'identifier d'une façon fine les obstacles rencontrés par les élèves, d'autre part, de mettre en lumière des compétences même très locales qui pourront jouer comme autant de germes d'entrée dans la pensée algébrique, mais aussi, de mettre en évidence les connexions existantes entre ces profils d'élèves et leur vécu algébrique en BEP.

Cette analyse prouve aussi son efficacité dans l'étude de l'évolution des élèves décrite synthétiquement au chapitre 7. Excepté dans le cas de Mérième, on ne note pas d'évolution spectaculaire. Mais, si l'on se réfère aux profils initiaux, les instruments d'analyse de la compétence algébrique déjà construits, nous aide à prendre la mesure de la complexité des constructions et des connexions à élaborer par ces élèves et ils nous obligent à voir le chemin parcouru. Certes, on est loin, dans des cas comme celui de Caroline, d'arriver à un fonctionnement que l'institution reconnaîtra comme standard, mais son rapport à l'algèbre a suffisamment bougé pour permettre une insertion positive dans le nouveau système.

Les limites des évolutions obtenues, même dans le cadre d'un enseignement "pensé", nous obligent aussi, au-delà de toute naïveté, à voir la difficulté à reconstruire un vécu inadéquat, dans le cadre des contraintes institutionnelles.

Soulignons pour terminer que l'étude de ces évolutions nous a aussi confronté au problème théorique de la pertinence des découpages adoptés dans une recherche didactique. Comme nous l'avons rappelé au début de cette conclusion, nous avons découpé pour étudier ce problème de transition institutionnelle, dans la réalité d'un système, un objet limité, accessible à l'étude, en choisissant de nous centrer sur les rapports à l'algèbre. Ce choix s'est révélé pertinent et efficace jusqu'à l'étude de l'évolution des profils. A ce niveau, il nous a fallu en effet faire entrer explicitement dans l'analyse, même si nous l'avons fait de façon très imparfaite, des éléments a priori externes à l'algèbre et même aux mathématiques, mais conditionnant fortement les rapports que les élèves pouvaient nouer aux mathématiques et à l'algèbre dans un scénario didactiquement déterminé.

On ne peut manquer d'être frappé, nous semble-t-il, par les déclarations de Mérième et d'Alice sur les stages, et le réflexe quasiment de survie qui les pousse dans cette classe d'adaptation. Dans ce cas, on a vu qu'une structure familiale solide peut être un point d'appui essentiel, même si un temps, elle s'interrompt (cf le cas de Mérième dans chapitre 7). Certains, au contraire, sont confrontés à un coût d'adaptation trop important, qui remet parfois en cause leur conception de l'apprentissage et peut les pousser vers l'abandon, les difficultés voire l'échec étant plus acceptables que l'effort nécessaire pour les surmonter (cf le cas de Frédéric).

V PERSPECTIVES

Notre thèse s'achève ici. En dépit de ces limites, nous nous sentons grâce à elle, bien mieux armée pour identifier les difficultés résistantes de nos élèves, pour les repérer rapidement et penser des scénarios d'intervention.

Nous nous sentons mieux armée, non seulement en Première G, mais tout autant dans nos nouvelles classes de seconde, où nous repérons maintenant des rapports à l'algèbre très voisins.

Cela nous ouvre des perspectives de recherche : basées sur l'hypothèse que les problèmes de transition entre institutions se posent aussi entre collège et lycée, aggravés actuellement par l'évolution des publics et des formations, nous pensons que la structure d'analyse construite peut être tout à fait opératoire à cet autre niveau.

Au niveau de la formation des enseignants, essentielle à toute évolution du système, il nous semble aussi, que notre travail peut les aider à prendre conscience de la complexité et de la multidimensionnalité de la compétence algébrique, à repérer ces compétences en germe après que nous avons appris nous-même à repérer, des "obstacles et leur manifestation". Il nous semble intéressant de prévoir une transposition de cette production de recherche en un produit de formation.

Au cours de la recherche, nous avons automatisé les moyens de diagnostic : les exigences de computabilité qu'imposent les liens permis avec l'IA, nous a obligé à définir avec soin les valeurs locales envisageables, à montrer que l'ensemble des valeurs restait stable et que le passage par un niveau d'analyse microscopique pouvait être productif. Le travail en collaboration avec le pôle informatique a été ici source de progression didactique. Nous envisageons un prolongement de ce travail : la conception de tâches diagnostic qui permettent l'automatisation de la saisie des réponses des élèves et de la définition des profils. On ne peut s'empêcher ensuite de faire le lien entre profil d'élève et modèle de l'élève et d'envisager un travail sur l'implémentation puis l'exploitation d'un modèle de l'élève.

Pour terminer, nous voudrions insister sur le fait que, dans cette recherche, nous avons voulu associer deux approches, qui dans les travaux en didactique jusqu'à présent, ont plutôt tendance à s'opposer : une approche institutionnelle et une approche cognitive. Pour nous enseignante avant d'être chercheuse, confrontée chaque jour à la complexité des phénomènes didactiques dans la classe et à l'insuffisance de toute approche acceptable, cette idée était sans doute a priori plus aisée.

Elle nous a obligée à des reconstructions, à des structurations dans lesquelles ne se reconnaîtront pas forcément les spécialistes des deux approches. Mais nous voudrions dire combien, pour nous, elle fut enrichissante et productrice.

BIBLIOGRAPHIE

APMEP (1991) : Evaluation des programmes de mathématiques de Seconde 1991. Publication APMEP n° 88.

APMEP (1994) : Mathématiques dans les métiers du secteur tertiaire. Sélection d'épreuves d'examens (C.A.P., B.E.P., Bac professionnel). Publication APMEP n° 88.

B.O. n°20 du 17 mai 1990 : Le programme de seconde indifférenciée des lycées.

B.O n° 31 du 30 Juillet 1992 : Le programme des classes préparatoires au BEP.

Arcavi A. et al (1989) : L'algèbre avant la lettre, Petit x n°24 pp. 61-71.

Arsac G. (1990) : Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 9.3, pp. 247-280, Editions La Pensée Sauvage.

Artigue M. (1990) : Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 9.3, pp. 281-308, Editions La Pensée Sauvage.

Artigue M. (1991) : Epistémologie et didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10/2.3, pp. 241-286, Editions La Pensée Sauvage.

Arzarello F. (1993) : Analysing algebraic thinking. ESRC Seminar Group Working Conference in Algebraic processes and the role of symbolism. Institute of Education. University of London, September 1993.

Balacheff N. (1982) : Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 3.3, pp. 261-304, Editions La Pensée Sauvage.

Balacheff N. (1988) : Le contrat et la coutume, deux registres des interactions didactiques. Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique. Editions La Pensée Sauvage.

Balacheff N. (1988) : Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Thèse d'état. Université de Grenoble I.

Balacheff N. (1994) : Didactique et intelligence artificielle. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 14/1.2 pp. 9-42, Editions La Pensée Sauvage.

Beautier E. et Robert A. (1987) : Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique, Cahier de didactique des mathématiques n°41, IREM Paris-Sud, Avril 1987.

Booth L. (1985) : Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. Petit x n° 5, pp 5-17.

Brousseau G (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 4.2, pp. 165-198, Editions La Pensée Sauvage.

Brousseau G (1986) : Fondements et méthodes de la didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7.2, pp. 33-116, Editions La Pensée Sauvage.

Charlot B, Bautier E et Rochex J. Y (1992) Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs, Collection Formation des enseignants, Enseigner, Ed Armand Colin.

Charlot B et Bautier E (1993) Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques Repères. IREM n°10 pp. 5-24.

Chevallard Y. et Conne F. (1984) : Jalons à propos d'algèbre. Interactions Didactiques, 3, pp. 1-54 , Universités de Genève et de Neuchâtel.

Chevallard Y. (1985) : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique Petit x, n°5, pp.51-94.

Chevallard Y. (1985a) : La transposition didactique, Editions La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1987) : La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l'algèbre dans l'enseignement du second degré, in Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, pp. 305-324,.Editions La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989a) : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x n°19, pp. 43-75.

Chevallard Y. (1989b) : Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Document interne, IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1990) : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques Petit x, n°23, pp. 5-38.

Chevallard Y. (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 12.1, pp. 73-111, Editions La Pensée Sauvage.

Cortès A (1992) : Invariants opératoires dans le traitement des équations. Proceedings of European Colloquium in Cognitive Sciences ECCOS'92, pp. 37-46, Orsay.

Cortès A (1993) : Analyse of errors and cognitive model in the solving of equations. Proceedings of PME 17, Vol. 1, pp. 146-152, University of Tsukuba.

Dagher A. (1993) : Environnement informatique et apprentissage de l'articulation entre registres graphique et algébrique de représentation des fonctions : réalisation, expérimentation, analyse de protocoles d'élèves. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Delozanne E. (1994) : Un projet pluridisciplinaire : ELISE un logiciel pour donner des leçons de méthode, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 12.1, pp. 211-249, Editions La Pensée Sauvage.

Douady R. (1984) : Dialectique outil/objet et jeux de cadres, Thèse d'état, Université Paris 7.

Douady R. (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil/objet, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7.2, pp. 5-32, Editions La Pensée Sauvage.

Douady R. (1994) : Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, Repères IREM n° 15, pp. 37-61.

Drouhard J.P. (1992) : Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Dubourg X & al. (1995) : Situations d'interaction en EIAO : le système REPERES, in Environnements Interactifs d'Apprentissage avec l'Ordinateur, Tome 2, Eyrolles, pp. 233-244.

Dubourg X. (1995) : Modélisation de l'interaction en EIAO. Une approche évènementielle pour la réalisation du système REPERES. Thèse de doctorat. Université du Maine.

Dumont B. (1989) : Questionnements et interprétation des erreurs en mathématiques, Thèse d'état, Université Paris 7.

Duval R. (1988a) : Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 1, pp. 7-26, IREM de Strasbourg.

Duval R. (1988b) : Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 1, pp. 235-254, IREM de Strasbourg.

Duval R. (1993) : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.

Duval R. (1993) : Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, Petit x, n°31, pp. 37 à 61.

Gascon J. (1994) : Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", Petit x n°37, pp. 43-63.

Gélis J.M. (1993) : Un cadre général pour une modélisation cognitive et computationnelle de l'algèbre. Rapport de recherche Université Paris XI.

G.R.E.M, 1988 : Sur l'Introduction du Calcul Littéral.

Harper (1987) : Ghosts of Diophantus. Educational Studies in Mathematics, n°18, pp. 75-90.

Guzman-Retamal I. (1989) : Registres mis en jeu par la notion de fonction. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 2, pp. 229-259, IREM de Strasbourg.

Hébert E. (1993) : "Les oeufs". Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde, Cahier de DIDIREM n°20, IREM Paris 7.

Hershkowitz R. (1989) : L'algèbre avant la lettre, Petit x n°24 pp. 61-71.

Kieran C. with the collaboration of Booker G. , Filloy E. , Vergnaud G. and Wheeler D. (1991) : Cognitive processus involved in learning school algebra, Learning algebra. in Mathematics and Cognition, J.Killpatrick (ed), Cambridge University Press.

Kieran C. (1992) : The learning and teaching of school algebra. in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Douglas A. Grouws (ed), pp. 390-419, New York Macmillan.

Kieran C. (1994) : A functional approch to the introduction of algebra - Some Pros and Cons. Proceedings of PME 18, Vol I, pp. 157-175, Université de Lisbonne.

Lacombe D. (1988) : Le pseudo-formalisme ou l'inintelligence artificielle. Actes de la deuxième école d'été : Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques, pp. 27-44. IREM de Toulouse.

Lauton M. (1994) : Enjeux et réalités de l'enseignement des mathématiques dans les départements gestion des IUT. le cas des mathématiques financières. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Lee et Wheeler (1987) : Algebraic thinking in high shool students : their conceptions of generalisation and justification. Department of Mathematics, Concordia University, Montreal.

Legrand M. (1990) : Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 9.3, pp. 365-406, Editions La Pensée Sauvage.

Legrand M. (1992) : "Circuit" ou les règles du débat mathématique, in Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A, Commission INTER-IREM Université, IREM de Lyon.

Lemoyne G., Conne F., Brun J. (1993) : Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 13/3, pp. 333-383, Editions La Pensée Sauvage.

Léonard F., Sackur C. (1990) : Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10/2.3, pp. 205-240, Editions La Pensée Sauvage.

Meirieu P. (1987) : Apprendre ... oui, mais comment ?, ESF.

Mercier A. (1995) : La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 15/1, pp. 97-142, Editions La Pensée Sauvage.

Monnet F. et Paquelier Y. (1992) : Imagiciels, approche expérimentale en mathématiques, Revue ASTER, n° 14, Raisonner en Science, pp. 181-213, INRP Paris.

Nicaud J.F. : (1993) : Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX. Rapport de recherche n°859. LRI, Université de Paris Sud.

Nicaud J.F. : (1994) : Modélisation en EIAO, les modèles d'APLUSIX. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 14/1.2, pp. 67-112, Editions La Pensée Sauvage.

Paliès O. (1988) : Méta-connaissances pour la modélisation de l'élève : contribution au diagnostic cognitif par système expert. Thèse de doctorat, Université Paris VI.

Perrin M.J (1992) : Aire de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté au niveau CM, 6ème. Thèse d'état, Université Paris 7.

Piaget (1975) : L'équilibration des structures cognitives., P.U.F.

Rausher J.C. (1994) : Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les enseignants. Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique. Editions La Pensée Sauvage.

Robert A. et Robinet J. (1989) : Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. Cahier de DIDIREM n°1, IREM Paris 7.

Robert A et Robinet J. (1989) : Enoncés d'exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels. Cahier de DIDIREM n°4, IREM Paris 7.

Schoenfeld A. , Smith J. et Arcavi A. (1990) : Learning : The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain, in R. Glaser (ed.), Advances in instructional psychology, Vol. 4, pp. 55-177, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates

Sfard A (1991a) : On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, Vol. 22, pp. 1-36.

Sfard A. et Linchevski L. (1991b) : Equations and inequalities -- processes without objects. Rapport de recherche, Université de Jérusalem.

Sfard A. et Linchevski L. (1994) : The gains and the pitfalls of reification -- The case of algebra, Educational Studies in Mathematics, Vol. 26, pp. 191-228.

Vergnaud G. (1986) : Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre in Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud G., Cortès A., Favre-Artigue P. (1987) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, pp. 259-288, Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud G., Cortès A. et al (1987) : Apprentissage de l'algèbre par des élèves faibles : 4ème et 3ème de LEP. Colloque de la Société Française de Psychologie. Les apprentissages-Perspectives actuelles, Saint-Denis - 30/31 Janvier 1987.

Vergnaud G. (1990) : Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. Petit x , n°22, pp. 51-69.

Vergnaud G. (1990 a) : La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 10/1.2, pp. 133-170, Editions La Pensée Sauvage.

Vygotsky L. (1985) : Pensée et langage, Editions Sociales, Paris.

Wenger E. (1988) : Artificial Intelligence and Tutoring Systems, Morgan Kaufman Publishers Inc, Los Altos, CA.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 : PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE

CHAPITRE 2 : UNE STRUCTURE D'ANALYSE MULTIDIMENSIONNELLE POUR L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

CHAPITRE 3 : PREMIER TEST DE LA STRUCTURE D'ANALYSE

CHAPITRE 4 : L'ANALYSE DU CÔTÉ DE L'ÉLÈVE : TÂCHES DIAGNOSTIC

CHAPITRE 5 : APPLICATION A L'ÉTUDE DES RAPPORTS À L'ALGÈBRE DANS LES DEUX INSTITUTIONS

CHAPITRE 6 : PROFILS D'ÉLÈVES

CHAPITRE 7 : EVOLUTION DES PROFILS D'ÉLÈVES

CHAPITRE 8 : AUTOMATISATION DU DIAGNOSTIC. PERSPECTIVES

CONCLUSIONS, PERSPECTIVES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

TABLE DES MATIÈRES

ANNEXES

ANNEXES

Annexe I : Les productions des élèves pour l'exercice : le coût du voyage

II. A $\xrightarrow{154F}$ B Etudiant - 20% B

Abon. 1400 F /1An => 154 / 7

(1)

voyage	1	5	10	20	25	30
prix étud.	123,20	616	1232	2464	3080	369

154 x 20% = 30,8
154 - 30,80 = 123,20

~~(154 + 154 + 154 + 154 + 154 = 770)~~

123,20 x 5 = 616 F
123,20 x 10 = 1232

Les étudiants ont une réduction de 20% sur le billet donc elle est multiplié cette réduction par le nb de voyage, en ayant bien sûr calculé la réduction pour un voyage.

154 / 2 = 77

Voy.	1	5	10	20	25	30	40
prix	77	385	770	1540	1925	2310	4480

77 + 1400 = 1477
77 x 5 = 385
77 x 10 = 770
385 + 1400 = 1785
770 + 1400 = 2170.
77 x 20 = 1540
1540 + 1400 = 2940
25 x 77 = 1925
1925 + 1400 = 3325
2310 + 1400 = 3710.

(2) A partir de 30 voyages l'abonnement est rentable. Pour un ~~...~~ tout petit peu plus 31-32 voyages.

Coût 1 : Sandrine F.

II, 1) première formule.

1 – 154 x 20% = 30,80.

154 – 30,80 = <u>123,20</u> F pour 1 voyage aller-retour

l'étudiant devra payer 123,20 F aller-retour.

<u>deuxième formule</u>

1400 F par an

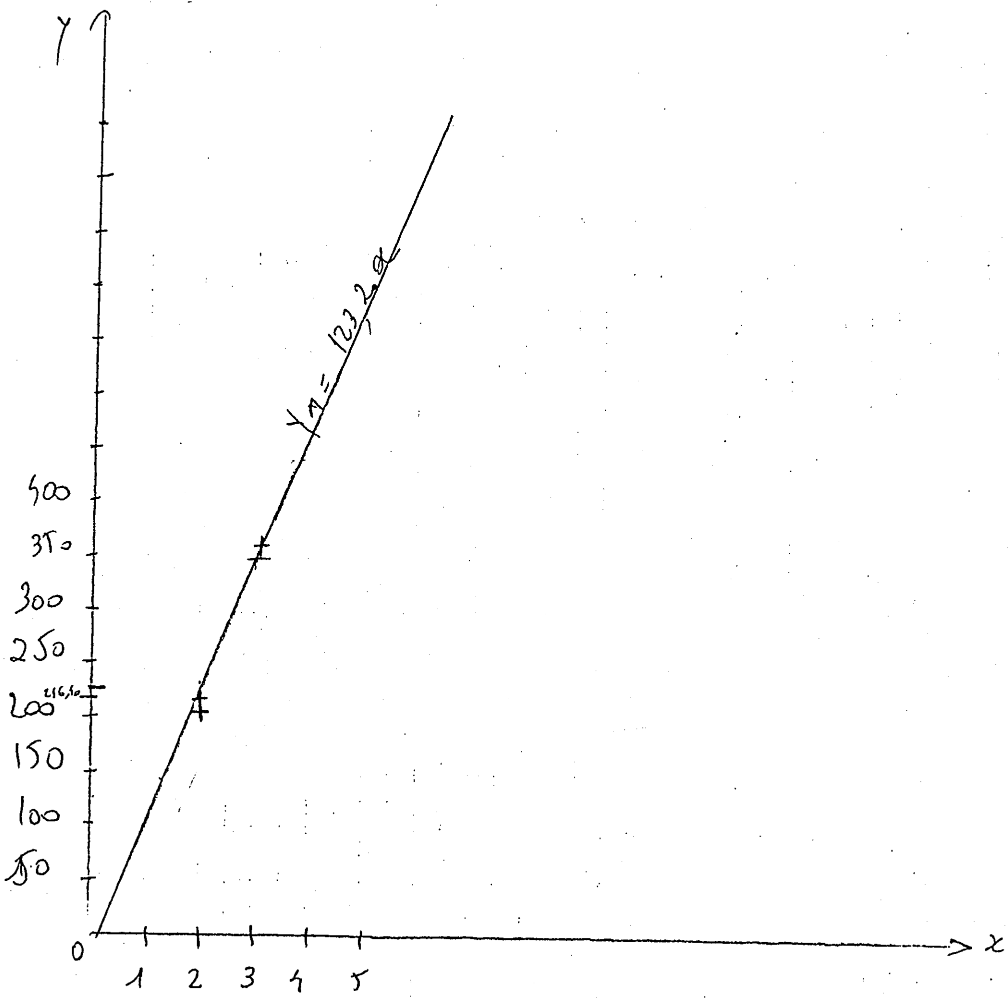
Prix du ~~po~~ billet pour 1 seul voyage :

1400 ÷ 12 mois : <u>116,67</u> F

Si x représente le nombre de voyage alors:
Y_1 représente le prix à payer pour 1 voyage ⇒ 1re formule
Y_2 représente le prix à payer pour 1 voyage ⇒ 2e formule

x	~~1~~	2	3		
	Y_1 = 123,20	246,40	369,60		0,5
	Y_2 ~~116,67~~	~~233,34~~	350,01		

123,20 x 2 = 246,40
116,67 x 2 =

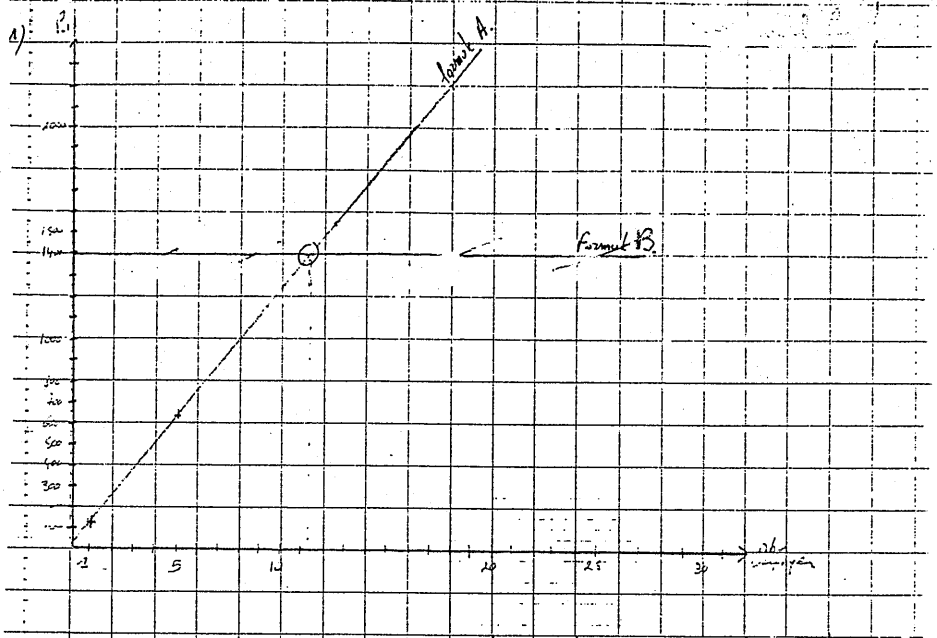


Coût 2 : Isabelle

II * Formule A = $154 \times \frac{20}{100} = 30,80$ $154 - 30,80 = 123,20$ Fs

* Formule B = 1400 Fs par an et 50% du prix du billet

1)



Par graphique formule A :

Nombre de voyage	1	5	10	20
Prix	123,20	616	1232	2464

2) Si 1 étudiant effectue moins de 11 voyages, l'abonnement ne lui sera pas rentable * $11 \times 123,2 = 1355,20$ Fs

Par s'il fait 12, voir plus en tant que voyage l'abonnement formule B sera mieux approprié, plus rentable pour lui

* $12 \times 123,20 = 1478,40$

Coût 3 : Pascal

II. 1. soit x (un voyage aller retour)

1ère formule : $154x - \frac{20}{100}$

2ème formule : $1400 + 77x$

1ère formule

Pour 1 voyage A.R

$154x - \frac{20}{100}$

$154 \times (1) - \frac{20}{100} = 123,2$ F

2ème formule

Pour 2 voyages A.R /an

$= 1400 + 77(2)$

$= 1554$ F

Pour 3 voyages A.R

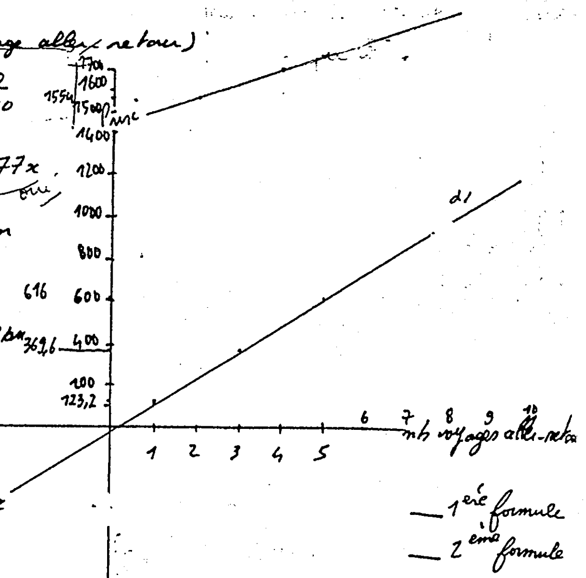
$154(3) - \frac{20}{100} = 369,6$ F

Pour 4 voyages A.R /an

$= 1400 + 77(4)$

$= 1608$ F

On peut tracer la droite



2) $154x - \frac{20}{100} = 1400 + 77x$

$154x - 77x = 1400 + \frac{20}{100}$

$77x = 1400,2$

$x = \frac{1400,2}{77} = 18,18$

l'abonnement sera plus rentable si l'on fait plus de 18 voyages aller-retour /an.

Coût 4 : Fabien

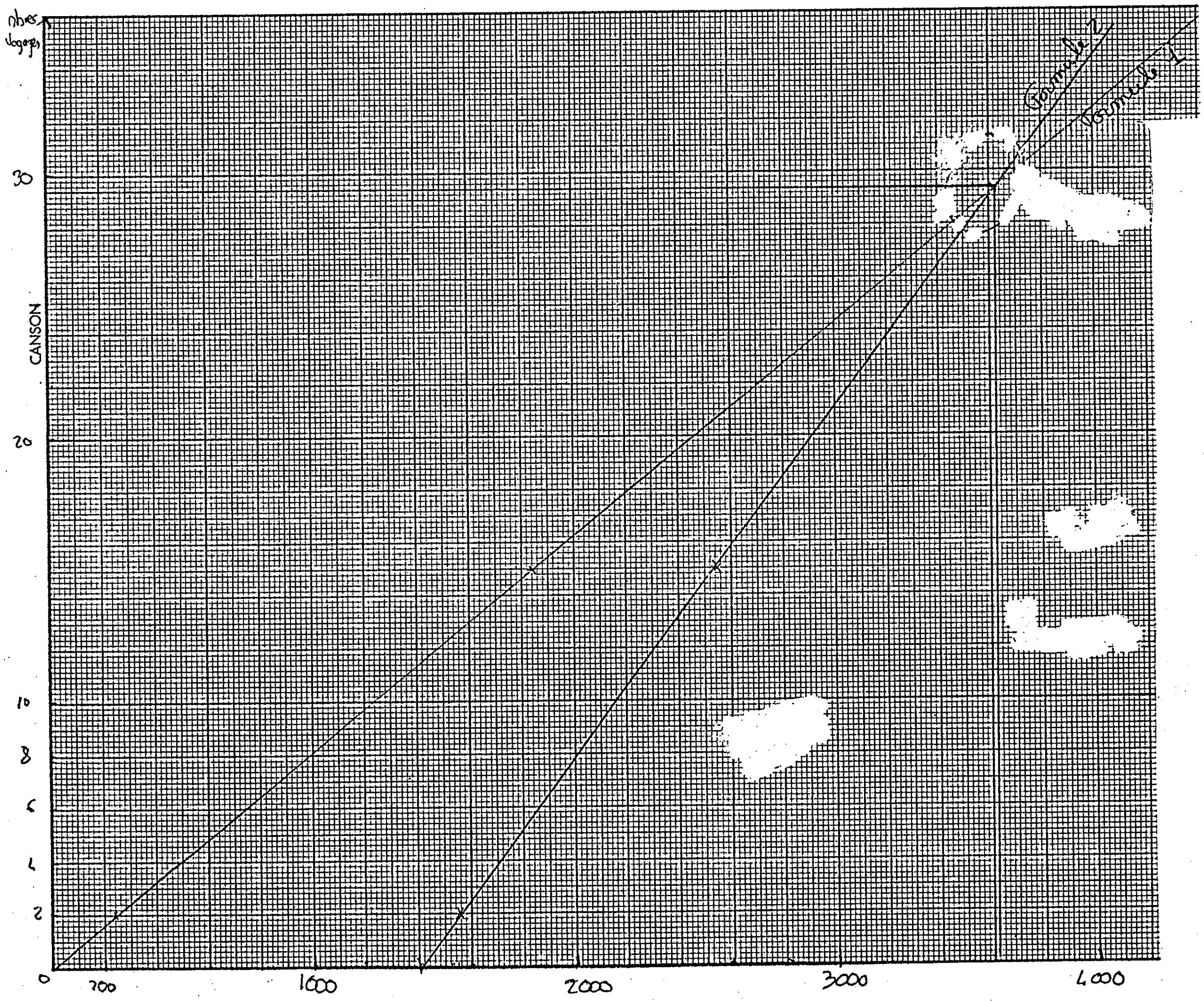
II Le coût du voyage

1ère formule : $(154 F - 20\%) x$ =

2ème formule : $1400 F + x \frac{154}{2}$

x	$(154 - 20\%) x$	$1400 \times x \frac{154}{2}$
$x=8$	$123,2 \times 2 = 246,4$	1554
$x=15$	1848	2555

2) La formule d'abonnement devient intéressante à partir du ~~31~~ 30ème voyage



Coût 5 : Candie

II. La compagnie d'autocars propose 1 billet aller-retour pour 154 F et propose une réduction de 20 % sur ce billet pour les étudiants. y étant le prix moins la réduction ; x le nombre de

$y = 154 \times \frac{80}{100} x$ donc $y = 154 \times 0,8\, x$

La formule d'abonnement propose un prix de 1400 F par an, le prix du billet n'est pas modifié. y = ~~1400~~

2) Nous pouvons déjà essayer de calculer l'égalité entre ces deux équations

$1400 = 123,2\, x$ $x = \frac{1400}{123,2}$ $x = 11,36$.

L'abonnement annuel sera rentable à ~~plus~~ au 11ème voyage puis l'avoir effectué dans le douzième voyage aura rentabilisé l'abonnement par rapport à la réduction et le prix du billet proposé par la compagnie d'autocars.

Coût 6 : Nicolas

II. Le coût du voyage pour aller de la ville A et B pour un prix de 154 F aller / Retour avec une réduction de 20 % du prix du billet

soit $154 - \left(\frac{154 \times 20}{100}\right)$

$154 - 30,8$

$123,20$ F ~~par~~

Alors l'étudiant payera 123,20 F pour un seul voyage effectué Aller / Retour maintenant nous allons voir le prix total à payer en fonction de x le nombre de voyages effectués.

Coût 7 (1) : Nouara

donc le prix du voyage dépend de x
le nbre de voyages effectués

alors $154x - (154x \times \frac{20}{100})$

1ère formule $\boxed{154x - 30,8x}$

y = prix du voyage en fonction de x
x = le nombre de voyages effectués

x	2	4	6	8
y	246,4	492,8	739,2	983,6
~~z~~	~~154~~	~~308~~	~~462~~	~~616~~

$154 \times 2 - ((154 \times 2) \times \frac{20}{100})$
$308 - 61,6$
$246,4$

$154 \times 4 - 30,8 \times 4$
$616 - 123,2$
$492,8$

2ème formule

$1400 + \frac{154}{2}$

$1400 + 77$

en fonction de x $\boxed{1400 + 77x}$

sachant qu'il ne payera 1400^F qu'une fois par an alors le prix du voyage varie en fonction du nombre de x.

donc $77x$ pour 2 voyages
154

308 pour 4

462 pour 6

616 pour 8

Coût 7 (2) : Novara

II Le coût du voyage
Soit x le nombre de voyages
~~pour la formule normale on a~~
$\cancel{y_1 \Rightarrow x\left(154 - \frac{154 \times 20}{100}\right)}$ pour 20 voya
~~ges l'étudiant paierait~~
$\cancel{20 \times \left(154 - \frac{154 \times 20}{100}\right)}$ soit $(154 - 30{,}8) \times 20$
$123{,}2 \times 20 = 24$

Pour la formule abonnement on a
$y_2 \Rightarrow 1400$ minimum puis $\cancel{x}\,\frac{\cancel{154}\,4}{2}$

donc si $x = 0$ on paie 1400
pour $x = 20$ on a
$1400 + 20\left(\frac{154}{2}\right) = 1400 + 1540 = 2940$
pour $x = 40$ on a =
à partir de 24 voyages la carte devient plus interessante que le paiement norma d'ailleur.

Coût 8 : Didier

III

1°) On appelle a le prix du billet d'après la première formule et b le prix selon la 2ème formule.

$a = 154 - \frac{20(154)}{100} = 154 - 30{,}8 = 123{,}20$.

$b = 1400 + 154 - \frac{154 \times 50}{100} = 1400 + 77$

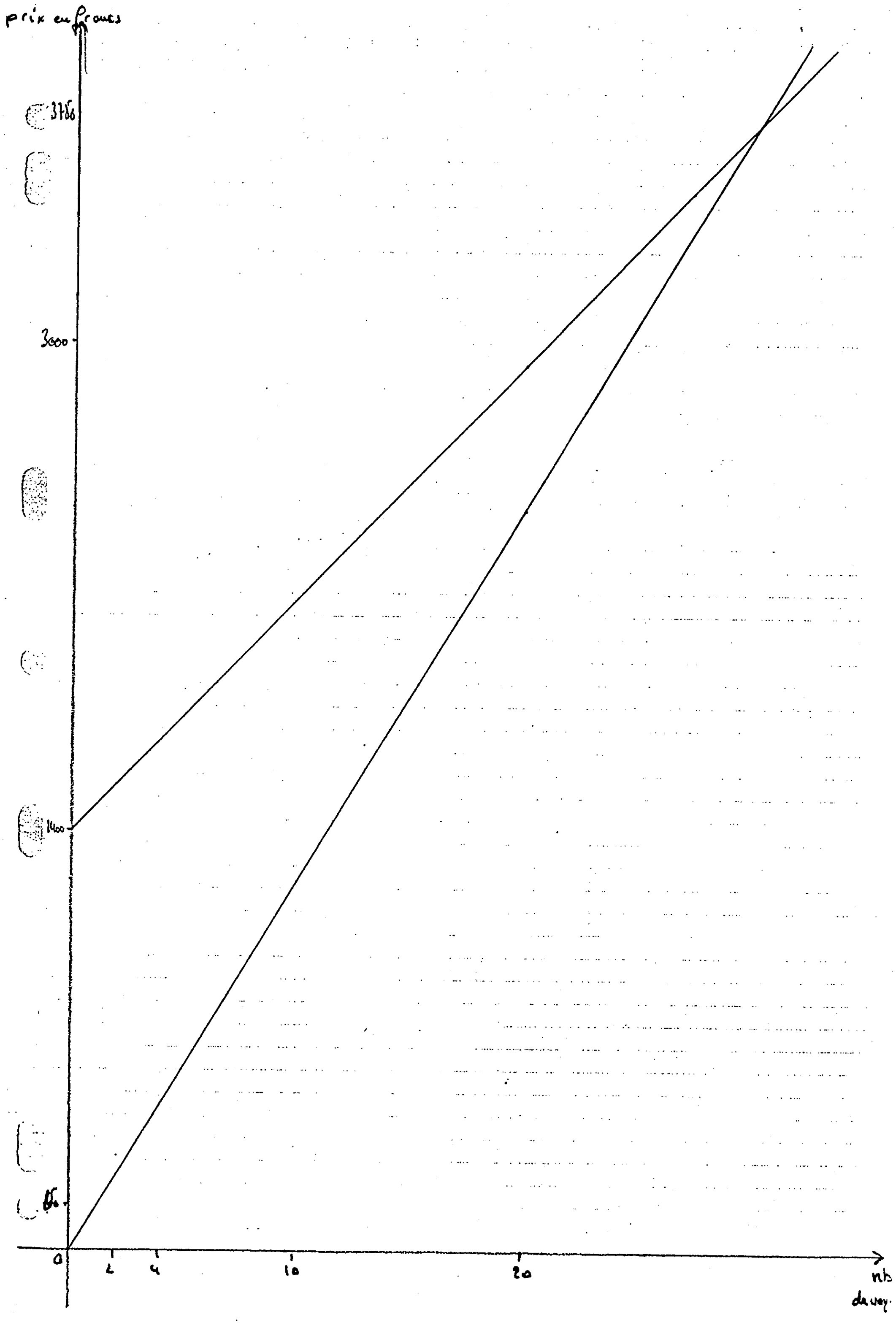
On appelle x le nombre de voyages et y_a et y_b le prix des billet tels que :

$y_a(x) = 123{,}20\,x$
$y_b(x) = 1400 + 77x$

x	0	20
y_a	0	2464

x	0	20
y_b	1400	2940.

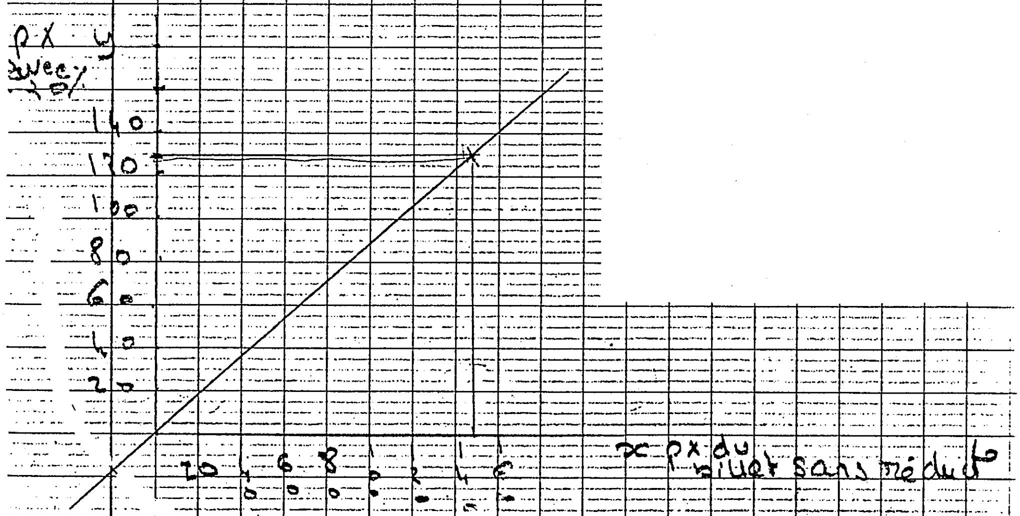
Coût 9 (1) : Sébastien



Coût 9 (2) : Sébastien

II 1° - coût du voyage représenté graphiquement pour la 1ère formule

x		154
y20%	30,80	133,20



2e formule
On prend un ou deux nbres de voyage qui pourrait être effectués par l'étudiant

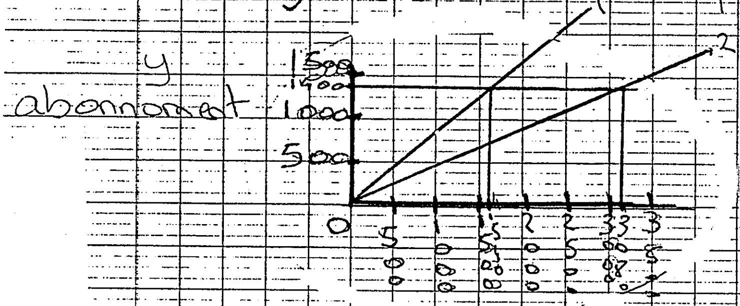
Coût 10 (1) : Karine

par ex. 10 et 20

1. 10 x 154 = 1540

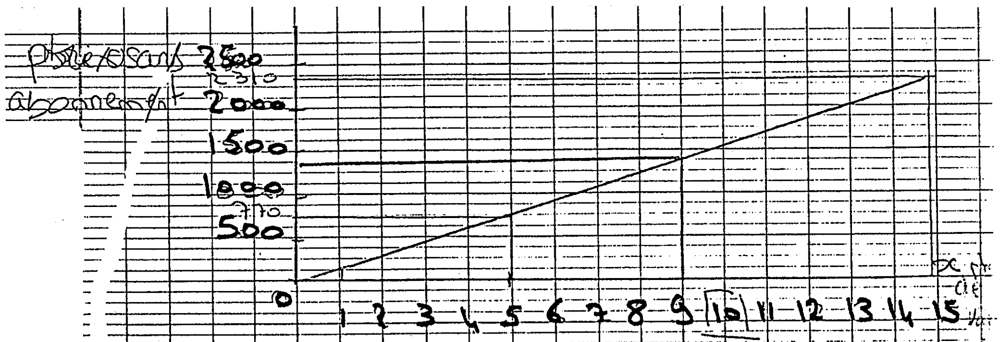
x 2. 20 x 154 = 3080

y	x 1540	2 3080
y	1400	1400



2. A partir de quel nbre annuel est-il rentable de prendre un abonnement si l'on se réfère à un graphique

x	154	5		x	154	15
y	-	770		y		2310



On peut donc voir que c'est à partir du 10e voyage que l'abonnement sera intéressant

Coût 10 (2) : Karine

Annexe II : Les programmes

Les programmes de BEP tertiaire (version 1983)

B.E.P. du secteur tertiaire - Hôtellerie - Alimentation

CLASSES DE SECONDE B.E.P. (première année)

Calcul numérique et calcul algébrique

Le professeur introduira la pratique du calcul au fur et à mesure des besoins ; autant que possible ces notions seront motivées.

Révision du calcul algébrique N, Z, Q, R.

Systèmes de numération (base 10 et base 2).

Valeurs approchées. Encadrement du résultat d'une opération.

Tables numériques, carré, cube, racine carrée... Interpolation.

I. Langage des ensembles : révision et compléments

1. Notions de logique : négation, conjonction, disjonction, implication, équivalence ; réciproque de certaines assertions ; quantificateurs « quel que soit » et « il existe » ; négation d'une assertion comportant éventuellement des quantificateurs.
2. Ensembles : appartenance, inclusion, sous-ensemble, ensemble vide ; intersection, réunion, sous-ensembles complémentaires ; liens avec la logique ; produit cartésien de deux ensembles.
3. Application d'un ensemble (de départ) vers un ensemble (d'arrivée) ; graphe ; composition de deux applications ; application bijective ; application réciproque d'une application bijective.
4. Relation d'équivalence ; classes d'équivalence ; ensemble quotient. Relation d'ordre.
5. Loi de composition interne.
6. Notions d'algèbre de Boole.

II. Vecteurs

Bipoint, c'est-à-dire couple (A, B) de points du plan ; équipollence.

Vecteur ; notation $\vec{AB}$ pour le vecteur dont le bipoint (A, B) est un représentant ; addition des vecteurs.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.

Projection d'un vecteur sur un axe, projection de la somme de plusieurs vecteurs.

Repérage d'un point sur un axe ; relation de Chasles ; repérage d'un point dans le plan.

III. Fonctions numériques. Equations numériques

Fonction numérique d'une variable réelle conçue comme une application d'une partie de R vers R [distinction entre les notations f et $f(x)$].

Sens de variation.

Fonction linéaire $x \longmapsto ax$ (critères de linéarité) : grandeurs directement proportionnelles (1).

Fonction affine $x \longmapsto ax + b$.

Fonction $x \longmapsto \frac{a}{x}$: grandeurs inversement proportionnelles.

Equation du premier degré à une inconnue dans R : cas général.

Système de deux équations du premier degré à deux inconnues dans R.

Inéquation du premier degré à une inconnue dans R (cas général).

IV. Premières notions de statistiques

1. Enquête statistique. Observation des faits ; dépouillement des observations ; groupement qualitatif et quantitatif ; série à variable discontinue et à variable continue (classes).

2. Etude des séries statistiques : effectifs, fréquences, séries cumulées.

3. Représentation graphique des séries statistiques ; série à variable discontinue : diagramme en bâtons ; série à variable continue : histogramme ; polygone de fréquence.

Autres formes de représentation graphique : diagramme à secteurs, diagrammes polaires, graphiques de Gantt.

---

(1) Ces notions seront utilisées par le professeur de mathématiques pour la compréhension et la résolution des problèmes relatifs à la structure des coûts et des prix, marges, taxes, salaires...

CLASSES DE PREMIÈRE B.E.P. (deuxième année)

A) MATHÉMATIQUES

I. Fonctions d'une variable réelle

1. Notion de limite (tous les théorèmes relatifs aux limites sont admis).

Nombre dérivé d'une fonction numérique d'une variable réelle. Fonction dérivée d'une fonction (1).

Etude de la fonction numérique : $x \longmapsto ax^2$.

2. Equation du second degré à une inconnue (2) [la résolution d'équations avec paramètre n'est pas au programme].

II. Statistique descriptive

1. Utilisation du papier logarithmique pour graphiques.

2. Eléments caractéristiques d'une série statistique :

a) Paramètres de position : mode, médiane, moyenne arithmétique et moyenne arithmétique pondérée ;

b) Paramètres de dispersion : quartiles, écarts interquartiles.

3. Séries chronologiques. Représentation graphique par diagrammes cartésiens.

4. Notions sur les nombres indices.

B) CALCULS COMMERCIAUX

I. Révision du cours de première année

II. Calculs commerciaux portant sur les prix et sur les taxes

III. Intérêts simples, escompte, intérêts composés

1° Intérêts simples. Formule générale ; problèmes.

2° Escompte et crédit :

a) Escompte commercial ; pratique de l'escompte commercial ; taux réel ou taux effectif d'escompte ; équivalence d'un capital à un autre capital ; équivalence d'un capital à un ensemble de capitaux ; équivalence d'un ensemble de capitaux à un autre ensemble de capitaux.

Bordereau d'escompte (en liaison avec l'informatique, ordinogramme).

b) Autres modes courants de crédit ; coût des crédits et taux annuels.

(1) Les dérivées ne seront étudiées que si le niveau de la classe le permet.

(2) Comme en classe de Seconde, on entraînera les élèves au calcul mental.

3° Comptes courants et d'intérêts :

Principe de calcul par la méthode hambourgeoise et vérification des comptes (comptes courants à taux réciproques et constants ; à taux non réciproques et variables).

4° Notions élémentaires sur les intérêts composés.

IV. Monnaies et changes

Principales monnaies étrangères.

Conversion des monnaies.

Parités : parités brutes, parités nettes.

Comptes de revient.

V. Calculs numériques simples et calcul rapide

PROGRAMME de BEP Tertiaire

523

2. L'enseignement des mathématiques doit fournir *des outils* permettant aux élèves de suivre avec profit les enseignements des disciplines scientifiques et technologiques. Il doit aussi contribuer au *développement de la formation scientifique* à travers *la pratique d'une démarche mathématique* : mathématisation d'un problème simple, travail d'expérimentation et de recherche, mise en œuvre d'outils et de raisonnements pour résoudre ce problème, contrôle des résultats obtenus et analyse de leur portée. Plus largement, l'enseignement des mathématiques doit *contribuer au développement des capacités d'argumentation, d'organisation et de communication.*

3. La démarche consiste à bâtir des mathématiques le plus souvent possible à partir de problèmes apportés notamment par les disciplines scientifiques et technologiques, et, en retour, à utiliser les savoirs mathématiques comme outils pour la résolution de problèmes issus des autres disciplines ou de la vie courante. Les situations étudiées doivent fréquemment être issues de la dominante technologique de la classe (sciences et techniques industrielles, sciences biologiques et sociales, sciences et techniques économiques).

Classe de Seconde PROGRAMME DE MATHEMATIQUES

PARTIE 1 : EXPOSE DES MOTIFS

1. Pourquoi un nouveau programme ?

Le programme qui suit conserve, pour l'essentiel, les objectifs et la substance du programme précédent, défini par l'arrêté du 14 Mars 1986 et publié au Bulletin Officiel de l'Education Nationale Spécial n°1 du 5 Février 1987. La perspective reste celle d'une *Seconde pour tous les élèves* et *d'une classe d'orientation*, et non d'une classe préparant de manière privilégiée aux filières scientifiques. Cependant il était nécessaire d'infléchir le programme pour assurer une bonne continuité avec les *nouveaux programmes de collège*(mis en vigueur en 1989-1990 au niveau de la classe de Troisième), qui font d'avantage appel à l'activité des élèves et sont plus tournés vers la résolution de problèmes et les applications.

2. Les intentions majeures :

a) On a voulu entraîner les élèves à la *pratique d'une démarche scientifique*, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique.

b) On a voulu insister sur l'importance du *travail personnel* des élèves, tant en classe qu'à la maison, et sur le rôle moteur des activités de *résolution de problèmes*. Dans cette perspective, une rubrique de *travaux pratiques* a été introduite dans chaque chapitre.

c) On a voulu développer les *capacités d'organisation et de communication* et renforcer les objectifs *d'acquisition de méthodes*.

d) On a voulu mieux prendre en compte l'exigence de contenus présentant un intérêt pour la formation de *tous* les élèves. C'est pourquoi on a écarté résolument les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles et techniques pour la majorité des élèves ou préparant de façon trop spécifique à certaines sections de Première, au bénéfice d'une *meilleure solidité sur les points essentiels*.

e) On a voulu s'en tenir à *un cadre et un vocabulaire théoriques modestes*, mais suffisamment efficaces pour l'étude des situations usuelles et assez riches pour servir de support à une formation mathématique solide.

f) On a voulu *dégager clairement les objectifs et les contenus du programme* en précisant les capacités requises ou non requises des élèves, dans le double but de mieux éclairer les professeurs et les élèves et de combattre l'inflation. En particulier, on a limité de façon stricte le niveau d'approfondissement à donner aux concepts, ainsi que le degré de technicité exigible des élèves pour certains problèmes.

4. Dans le cycle de détermination B.E.P., il convient de *développer les capacités de chaque élève* et de *l'aider à préciser son projet de formation et à le réaliser.*

Tout au long des deux années, la *communication des objectifs à atteindre* et la mise en œuvre de *formes diversifiées d'évaluation* peuvent aider efficacement les élèves à progresser, à se situer et à effectuer un choix d'orientation. D'autre part, il est souhaitable que des *mesures d'aide* aux élèves dont le niveau n'est pas en accord avec leur projet d'orientation puissent être mises en place pour leur permettre de réaliser ce projet dans de bonnes conditions. De même, on peut, en fonction de ces projets, *diversifier* le choix et le niveau d'approfondissement des activités proposées ; *mais cette diversification ne saurait conduire à supprimer des rubriques du programme ou à détruire son équilibre général.*

II. ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

1. Le cadre général

Le texte du programme concerne l'ensemble des spécialités de B.E.P. ; les indications délimitant le programme spécifique de chaque B.E.P. sont intégrées dans le texte.

Pour donner prise à un travail efficace à partir des acquis des classes antérieures et bien remplir son rôle d'initiation aux enseignements ultérieurs éventuels, le programme requiert d'être appliqué avec réalisme et souplesse ; il est essentiel d'assurer *un bon équilibre entre les différentes parties.*

Le texte du programme définit les objectifs, précise les connaissances et savoir-faire que les élèves doivent acquérir et délimite le champ des problèmes à étudier, mais les professeurs gardent toute liberté pour l'organisation de leur enseignement en veillant à réaliser un bon équilibre entre les deux années de formation. Toutes les indications mentionnées dans le programme *valent pour l'ensemble des devoirs de contrôle, y compris l'épreuve du B.E.P.* ; en cas de doute, l'interprétation minimale doit prévaloir.

3. Quelques lignes directrices pour les contenus :

a) *Dans tous les domaines, la résolution de problèmes constitue, comme au collège, l'objectif essentiel.*

b) *Dans le domaine numérique*, l'accent est mis sur la résolution des équations, l'approximation des nombres et les études de fonctions.

c) *En géométrie* , on poursuit conjointement l'étude des configurations usuelles du plan et de l'espace, déjà engagée au collège. Le calcul vectoriel dans le plan est le principal outil nouveau. La notion générale de barycentre et le produit scalaire ont été supprimés et seront étudiés dans les sections de Première où leur utilité apparaît.

d) *En statistique*, le nouveau programme de collège couvrant sensiblement l'ancien programme de Seconde, on aboutit maintenant en Seconde à une vue synthétique des séries statistiques à une variable, ce qui constitue un élément de formation important pour l'ensemble des élèves.

PARTIE 2 : ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

1. Le cadre général .

L'horaire de la classe est de quatre heures : 2 h 30 + (1 h 30). Le programme requiert, pour donner prise à un travail efficace à partir des acquis du collège et bien remplir son rôle d'initiation aux enseignements ultérieurs, d'être appliqué avec réalisme et souplesse ; il est essentiel d'assurer un *bon équilibrte entre les différentes parties* et , en particulier, de ne pas bloquer en fin d'année la géométrie. Le texte du programme définit les objectifs, précise les connaissances et savoir-faire que les élèves doivent acquérir et délimite le champ des problèmes à étudier, mais chaque professeur garde toute liberté pour l'organisation de son enseignement. Toutes les indications mentionnées dans le programme *valent pour l'ensemble des épreuves d'évaluation* ; en cas de doute, l'interprétation minimale doit prévaloir.

2. Présentation du texte du programme

a) Ce texte comporte d'abord un chapitre définissant les *objectifs et les capacités valables pour l'ensemble du programme.* Ensuite, chaque chapitre comporte :

Un *bandeau* définissant les objectifs essentiels de ce chapitre et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à ce chapitre ;

Un texte en deux colonnes : deux sortes de spécificités leur sont attribuées.

D'une part, *à gauche,* sont fixées les connaissances et savoir-faire de base figurant au programme avec, *à droite*, un commentaire précisant le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repérant le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres figurant au programme.

D'autre part, *à gauche*, figure le champ des techniques et des problèmes que les élèves ont à étudier avec, *à droite*, un commentaire fournissant des repères pour le niveau d'approfondissement de cette étude.

A chaque section de B.E.P. correspond un *formulaire officiel* que les élèves apprendront à utiliser pendant les deux années du cycle de détermination B.E.P. et qui est à leur disposition pour l'épreuve écrite de mathématiques du B.E.P. Ce formulaire fera l'objet d'une *note de service* publiée au *Bulletin officiel* de l'Education nationale.

b) En ce qui concerne les connaissances et savoir-faire, on a délimité, d'une part, ceux que les élèves *doivent acquérir* et d'autre part, ceux qui relèvent *d'activités possibles et souhaitables.* En outre, pour éviter toute ambiguïté sur les limites du programme et lutter contre l'inflation, il est indiqué que certains sujets sont « *hors programme* » (ce qui signifie qu'ils n'ont pas à être abordés au niveau considéré, ou que « *toute virtuosité technique est exclue* » ou encore qu'il faut se limiter à des « *exemples simples* »).

Pour les *démonstrations*, le professeur est laissé juge de l'opportunité de les faire, d'en donner une esquisse, ou d'admettre le résultat, tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités. La mention « *admis* » signifie que la démonstration est hors programme.

c) Les champs de problèmes mentionnés dans le programme sont de *deux sortes* : pour les uns des *techniques classiques et bien délimitées sont mises en œuvre et leur maîtrise est exigible des élèves.* Pour les autres, qui portent la mention « *exemples de* » (ce sont les plus nombreux), l'objectif est de développer un savoir-faire ou d'illustrer une idée : les élèves devront, au terme du cycle de formation, avoir acquis une certaine familiarité avec le type de problème considéré, mais *aucune connaissance spécifique ne peut être exigée à leur propos et toutes les indications utiles doivent être fournies aux élèves,* notamment au cours des épreuves d'évaluation.

3. Articulation avec les classes antérieures

Une bonne articulation entre les classes antérieures et la Seconde professionnelle constitue un enjeu capital

Les objectifs et les grandes lignes des contenus des programmes de collège sont définis par l'arrêté du 14 novembre 1985, publié en livre de poche au C.N.D.P. ; l'explication de ces objectifs, de ces contenus et des capacités exigibles des élèves a fait l'objet de compléments publiés au *Bulletin officiel* dans les suppléments spéciaux du 30 juillet 1987 pour la Sixième et la Cinquième, 30 juin 1988 pour la Quatrième et du 23 mars 1989 pour la Troisième. L'ensemble des textes précédents relatifs aux mathématiques a fait l'objet d'une brochure de synthèse, publiée par le C.N.D.P. en 1989 et intitulée « Mathématiques dans les classes de collège ».

Les programmes des classes de Quatrième et Troisième technologiques sont définis par l'arrêté du 9 mars 1990 publié au *Bulletin officiel* dans le numéro spécial n° 1 du 12 avril 1990.

2. Présentation du texte du programme.

a) Ce texte comporte d'abord un chapitre définissant *les objectifs et les capacités valables pour l'ensemble du programme* .Ensuite, chaque chapitre comporte :

- Un bandeau définissant les objectifs essentiels de ce chapitre et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à ce chapitre.
- Un texte en deux colonnes : *à gauche*, sont fixées les connaissances et savoir-faire de base figurant au programme ; *à droite* , un commentaire précise le sens ou les limites à donner à certaines questions et repère, le cas échéant, l'interaction du sujet étudié avec d'autres figurant au programme.
- Une rubrique de *travaux pratiques* en deux colonnes : *à gauche*, figure le champ des problèmes et des techniques que les élèves ont à étudier ; *à droite*, un commentaire fournit des repères pour le niveau d'approfondissement de cette étude.

b) En ce qui concerne les connaissances et savoir-faire, on a délimité, d'une part, ceux que les élèves *doivent acquérir* et, d'autre part, ceux qui relèvent *d'activités possibles ou souhaitables.* En outre, pour éviter toute ambiguïté sur les limites du programme et lutter contre l'inflation, il est indiqué que certains sujets sont "*hors programme*" (ce qui signifie qu'ils n'ont pas à être abordés au niveau considéré) ou que "*toute virutosité technique est exclue*", ou encore qu'il faut se limiter à des "*exemples simples*".

Pour les *démonstrations*, le professeur est laissé juge de l'opportunité de les faire, d'en donner une esquisse ou d'admettre le résultat, tout en maintenant un bon équilibre entre ces différentes possibilités. La mention "*admis* " signifie que la démonstration est hors programme.

c) Les *travaux pratiques* sont de deux sortes : les uns mettent en œuvre des *techniques classiques et bien délimitées, dont la maîtrise est exigible des élèves.* Les autres, qui portent la mention "*Exemples de* " (ce sont les plus nombreux) visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée : les élèves devront, au terme de l'année, avoir acquis une certaine familiarité avec le type de problème considéré, mais *aucune connaissance spécifique ne peut être exigée à leur propos et toutes les indications utiles doivent être fournies aux élèves,* notamment lors des épreuves d'évaluation.

3. Articulation avec le collège.

Une bonne articulation entre le collège et la Seconde constitue un enjeu capital. Les objectifs et les grandes lignes des contenus des programmes de Collège sont définis par l'arrêté du 14 Novembre 1985, publié en livre de poche au C.N.D.P. ; l'explicitation de ces objectifs, de ces contenus et des capacités exigibles des élèves a fait l'objet de compléments publiés au Bulletin Officiel dans les suppléments spéciaux du 30 Juillet 1987 pour la Sixième et la Cinquième, 30 Juin 1988 pour la Quatrième et 23 Mars 1989 pour la Troisième. L'ensemble des textes précédents relatifs aux mathématiques a fait l'objet d'une brochure de synthèse, publiée par le CNDP en 1989 et intitulée "*Mathématiques dans les classes de Collège*". L'attention des professeurs de Seconde est attirée sur le fait qu'ils ne peuvent tabler que sur les *capacités mentionnées comme exigibles dans les compléments,* et non sur l'ensemble des activités proposées par les programmes.

En Seconde professionnelle et en Terminale B.E.P., les activités de résolution d'exercices et de problèmes fourniront un *champ de fonctionnement* pour les capacités acquises dans les classes antérieures et permettront, en cas de besoin, de consolider les acquis ; *on évitera, en revanche, les révisions systématiques.*

Pour faciliter cette articulation, les différentes rubriques du programme comportent quelques indications sur la continuité des objectifs poursuivis et précisent les liaisons avec certains points du programme des classes antérieures.

4. Objectifs et fonctions des différents types d'activité

Deux objectifs restent essentiels :

Poursuivre l'initiation des élèves à *l'activité scientifique* et promouvoir *l'acquisition de méthodes* : la classe de mathématiques est d'abord un lieu d'*analyse* débouchant sur une bonne perception d'un problème, de *découverte*, d'*exploitation de situations*, de *réflexion* et de *débat* sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de *synthèse* dégageant clairement *quelques* idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée ;

Développer les *capacités de communication* : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes, réalisation d'une figure adaptée à une situation, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...).

Dans cette perspective, la *résolution de problèmes* et l'*étude de situations* occupent une *part importante* du temps de travail. En particulier, il convient d'articuler la mise en place de contenus nouveaux avec l'étude de situations assez riches, certaines étant liées aux autres disciplines, et qui peuvent, selon les questions étudiées, servir de motivation, fournir des secteurs d'intervention ou constituer le support même pour cette mise en place. La *synthèse, qui constitue le cours proprement dit, doit être brève* ; elle porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu.

Bien entendu, le choix d'une stratégie pour la mise en place de notions, de résultats et d'outils nouveaux ne saurait être uniforme : l'analyse des concepts à étudier et de leur articulation avec le champ des problèmes à résoudre, les acquis antérieurs des élèves, la simplicité, l'efficacité... sont autant de facteurs à prendre en compte.

Les travaux de résolution d'exercices et de problèmes, en classe ou en dehors du temps d'enseignement (à la maison ou au lycée), ont des fonctions diversifiées :

La résolution d'*exercices d'entraînement*, combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs *connaissances de base* et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples ;

En Seconde, les activités de résolution d'exercices et de problèmes fourniront un *champ de fonctionnement* pour les capacités acquises au Collège et permettront, en cas de besoin, de consolider ces acquis ; *on évitera en revanche les révisions systématiques.*

Pour faciliter cette articulation, les différentes rubriques du programme comportent quelques indications sur la continuité des objectifs poursuivis et sur certains points du programme des Collèges.

4. Objectifs et fonctions des différents types d'activité.

a) Organisation du travail de la classe.

Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :

- Entraîner les élèves à *l'activité scientifique* et promouvoir *l'acquisition de méthodes* : la classe de mathématiques est d'abord un lieu de *découverte*, d'*exploitation de situations*, de *réflexion* et de *débat* sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de *synthèse* dégageant clairement *quelques* idées et méthodes essentielles et mettant en valeur leur portée.
- Développer les *capacités de communication* : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement ...).

Dans cette perspective, la *résolution de problèmes* et *l'étude de situations* occupent une *part importante* du temps de travail, allant bien au-delà de l'horaire de travaux dirigés en effectifs réduits. En particulier, il convient d'articuler la mise en place de contenus nouveaux avec l'étude de situations assez riches qui peuvent, selon les questions étudiées, servir de motivation, fournir des secteurs d'intervention, ou constituer le support même pour cette mise en place. La *synthèse,* qui constitue le cours proprement dit, doit être *brève* ; elle porte non seulement sur les quelques notions, résultats et outils de base que les élèves doivent connaître et savoir utiliser, mais aussi sur les méthodes de résolution de problèmes qui les mettent en jeu.

Bien entendu, le choix d'une stratégie pour la mise en place de notions, de résultats et d'outils nouveaux ne saurait être uniforme : l'analyse des concepts à étudier et de leur articulation avec le champ des problèmes à résoudre, les acquis antérieurs des élèves, la simplicité, l'efficacité, ... sont autant de facteurs à prendre en compte.

b) Organisation du travail personnel des élèves.

La résolution d'exercices et de problèmes doit aussi jouer un rôle central dans les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au Lycée. Ces travaux ont des fonctions diversifiées :

- La résolution *d'exercices d'entraînement* , combinée avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs *connaissances de base* et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples.

L'étude de *situations* plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le *travail de recherche,* individuel ou en équipe, et permet aux élèves d'évaluer leur capacité à *mobiliser leurs connaissances* dans des secteurs variés ;

Les travaux individuels de *rédaction* (solution de problèmes, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte, éventuellement rapport de stage...) visent essentiellement à développer les *capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite* ; vu l'importance de ces objectifs, ces travaux de rédaction doivent être *fréquents* mais leur *longueur* doit rester *raisonnable* ;

Les *devoirs de contrôle, peu nombreux,* combinent des exercices d'application directe du cours et des problèmes plus synthétiques, comportant des questions enchaînées de difficulté progressive et permettant aux élèves de vérifier leurs résultats. Ils doivent être suffisamment *courts* pour permettre à la grande majorité des élèves d'étudier l'ensemble des questions posées et de *rédiger posément* la solution qu'ils proposent ;

Plus largement, pour le choix des exercices et des problèmes, il est utile de se poser quelques questions. Font-ils appel aux seules capacités requises des élèves ? Sinon, les élèves disposent-ils des indications utiles pour les résoudre ? Leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de Seconde professionnelle ou de Terminale B.E.P. ? Leur résolution a-t-elle valeur de méthode ?

L'exploitation des documents, individuels ou en équipe, peut contribuer notamment au développement des capacités d'organisation et d'expression écrite (rédaction d'un rapport) ou orale (mise au point d'un exposé).

- L'étude de *situations* plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le *travail de recherche* , individuel ou en équipe, et permet aux élèves d'évaluer leur capacité à *mobiliser leurs connaissances* dans des secteurs variés.

- Les travaux individuels de *rédaction* (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte ...) visent essentiellement à développer les *capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite* ; vu l'importance de ces objectifs, ces travaux de rédaction doivent être *fréquents* , mais leur *longueur* doit rester *raisonnable.*

- Les *devoirs de contrôle, peu nombreux* , combinent des exercices d'application directe du cours et des problèmes plus synthétiques, comportant des questions enchaînées de difficulté progressive et permettant aux élèves de vérifier leurs résultats. Ils doivent être suffisamment *courts* pour permettre à la grande majorité des élèves d'étudier l'ensemble des questions posées et de *rédiger posément* la solution qu'ils proposent.

- Plus largement, pour le choix des exercices et des problèmes, il est utile de se poser quelques questions. Font-ils appel aux seules capacités requises des élèves ? Sinon, les élèves disposent-ils des indications utiles pour les résoudre ? Leur contexte mathématique est-il compréhensible par un élève de Seconde ? Leur résolution a-t-elle valeur de méthode ?

5. Evaluation, orientation .

En Seconde de détermination, il convient de *développer les capacités de chaque élève* et de *l'aider à préciser son projet de formation et à le réaliser.* Tout au long de l'année, la *communication des objectifs* à atteindre et la mise en œuvre de *formes diversifiées d'évaluation* peuvent aider efficacement les élèves à progresser, à se situer et à effectuer un choix d'orientation. D'autre part, il est souhaitable que des *mesures d'aide* aux élèves dont le niveau n'est pas en accord avec leur projet d'orientation puissent être mises en place pour leur permettre de réaliser ce projet dans de bonnes conditions. De même, on peut, en fonction de ces projets, *moduler* le choix et le niveau d'approfondissement des activités proposées ; *mais cette diversification ne saurait conduire à supprimer des rubriques du programme ou à détruire son équilibre général.*

III. PROGRAMME

A) *Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme*

1. Représentations graphiques

Les représentations graphiques tiennent une place importante : en effet, outre leur intérêt propre, elles permettent de *donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques* étudiés dans les différentes parties du programme ; leur mise en œuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une compétence manuelle et une réflexion théorique. Plus largement, notamment dans les sections du secteur industriel, on développera une *vision géométrique des problèmes,* notamment en analyse, la géométrie mettant au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation.

2. Problèmes numériques et algorithmiques

Les *problèmes et méthodes numériques* sont largement exploités, car ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques ; ils permettent aussi d'entraîner des élèves à *combiner l'expérimentation et le raisonnement* en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur.

Dans l'ensemble du programme, les *aspects algorithmiques* des problèmes étudiés seront progressivement dégagés, en particulier à propos de la *gestion de calculs* (description de l'enchaînement des opérations à effectuer pour un calcul numérique ou pour le calcul des valeurs numériques d'une fonction d'une variable réelle). Aucune connaissance spécifique sur les algorithmes n'est exigible des élèves.

3. Emploi des calculatrices. Impact de l'informatique

Dans les classes du cycle de détermination B.E.P., l'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de *contrôler des résultats et d'alimenter le travail de recherche.* De plus, en analyse, cet usage permet *d'accéder* rapidement *à des fonctions variées* et éventuellement à leur représentation graphique.

~~De plus,~~ les élèves doivent être capables de calculer une moyenne ou un écart type d'une population à l'aide des touches statistiques d'une calculatrice.

Pour répondre aux spécifications et aux objectifs précédents et pour couvrir l'ensemble de ce cycle, une calculatrice scientifique non programmable suffit (en particulier, les écrans graphiques ne sont pas demandés).

En cas d'achat, *le choix d'une calculatrice* en début de Seconde professionnelle ou au cours de ce cycle *dépend du projet d'orientation de l'élève* ; en particulier dans les Premières d'adaptation de la plupart des séries technologiques une calculatrice programmable est nécessaire ; les sujets de mathématiques des baccalauréats technologiques correspondants sont conçus pour des candidats disposant d'une calculatrice programmable, les calculatrices graphiques n'étant pas exigées.

PARTIE 3 : PROGRAMME

I - OBJECTIFS ET CAPACITES VALABLES POUR L'ENSEMBLE DU PROGRAMME.

1. REPRESENTATIONS GRAPHIQUES .

Les représentations graphiques tiennent une place importante : en effet, outre leur intérêt propre, elles permettent de *donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques* étudiés dans les différentes parties du programme ; leur mise en œuvre développe aussi les qualités de soin et de précision et met l'accent sur des réalisations combinant une capacité manuelle et une réflexion théorique. Plus largement, on développera une *vision géométrique* des problèmes, notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation.

2. PROBLEMES NUMERIQUES ET ALGORITHMIQUES.

Les *problèmes et méthodes numériques* sont largement exploités, car ils jouent un rôle essentiel dans la compréhension de nombreuses notions mathématiques et dans les différents secteurs d'intervention des mathématiques ; ils permettent aussi d'entraîner les élèves à *combiner l'expérimentation et le raisonnement* en mathématiques et concourent au développement des qualités de soin et de rigueur.

Dans l'ensemble du programme, il convient de mettre en valeur les *aspects algorithmiques* des problèmes étudiés, en particulier à propos de la *gestion de calculs* (description de l'enchaînement des opérations à effectuer pour un calcul numérique ou pour le calcul des valeurs numériques d'une fonction d'une variable réelle). Aucune connaissance spécifique sur les algorithmes n'est exigible des élèves.

3. EMPLOI DES CALCULATRICES ; IMPACT DE L'INFORMATIQUE .

Dans les classes de lycée, l'emploi des calculatrices en mathématiques a pour objectif, non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi *de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique.* De plus, en analyse, cet usage permet d'*accéder* rapidement *à des fonctions variées* et à leur représentation graphique.

En Seconde, *les élèves doivent être entraînés à utiliser une calculatrice programmable comportant les fonctions statistiques* pour effectuer des calculs numériques, pour calculer une moyenne ou un écart-type, et pour programmer, sur quelques exemples simples, le calcul de valeurs numériques d'une fonction d'une variable.

D'autre part, l'emploi en mathématiques des *matériels informatiques* existant dans les établissements est à encourager : par exemple, utilisation de micro-ordinateurs par les élèves en travaux dirigés, utilisation dans la classe d'un micro-ordinateur équipé d'une tablette de rétroprojection ou d'un grand écran. Dans les classes du cycle de détermination B.E.P., l'utilisation de logiciels (tableur, grapheur...) peut faciliter grandement la compréhension de nombreuses notions mathématiques et la résolution de problèmes : en produisant très rapidement des figures propres et variées, en permettant le mouvement de certains éléments choisis sur une figure... ces logiciels fournissent toute une série d'exemples et de contre-exemples numériques ou graphiques susceptibles d'apporter une motivation, d'alimenter le débat au sein de la classe et de donner du sens aux concepts mathématiques figurant dans les différentes parties du programme (fonctions, statistique, géométrie...).

4. Unité de la formation

Il est important que de nombreux travaux fassent *intervenir simultanément des parties diverses du programme* pour en faire ressortir l'unité (par exemple, activités géométriques et algébriques relatives aux fonctions, articulation entre géométrie du plan et de l'espace...). Dans cette perspective, et notamment dans le cadre de la bivalence pour les sections du secteur industriel, *l'enseignement des mathématiques est aussi à relier à celui des autres disciplines* sous deux aspects principaux : étude de situations issues de ces disciplines ; organisation concertée des activités d'enseignement.

5. Formation scientifique

Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, **loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé, ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants.** Cependant, la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective de *progression ; on se gardera donc de toute exigence prématurée de formulation,* aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le *vocabulaire* et les *notations* ne sont pas imposés *a priori* ; ils s'introduisent progressivement et prudemment en cours d'étude selon un critère d'utilité en privilégiant avant tout la compréhension des situations étudiées.

6. Vocabulaire et notations

Certaines questions (traitement des équations, emploi des propriétés caractéristiques en géométrie...) amènent à utiliser des *équivalences logiques* ; on observera qu'au collège seule la formulation en deux énoncés séparés est au programme.

L'emploi des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ n'est pas un objectif du programme. *Tout exposé de logique mathématique est exclu.*

Enfin, on aura le souci de se limiter à *un petit nombre de notations simples.* Certaines ont été introduites au collège : appartenance, égalité et inégalité, égalité approchée $\approx$, racine carrée, cosinus, sinus, tangente, droite (MN), segment [MN], distance MN, parallélisme et orthogonalité. S'ajoutent en Seconde professionnelle et en Terminale B.E.P., outre les notations indiquées dans les différents chapitres, les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et *aucun développement n'est au programme.* Pour les fonctions, on utilise les écritures $y = f(x)$ et $x \rightarrow f(x)$ mais les symboles $f + g$, fg, $g0f$, $f \leqslant g$... sont hors programme.

En cas d'achat de machine en début de Seconde, ou au cours du second cycle, il est conseillé de choisir un modèle dont les caractéristiques répondent aux spécifications et aux objectifs précédents et suffisent pour couvrir l'ensemble de ce cycle. Un modèle bas de gamme suffit (en particulier, les écrans graphiques ne sont pas demandés). Il est souhaitable que, dans chaque établissement, un petit stock de telles calculatrices soit progressivement constitué, en vue de leur emploi en travaux dirigés de mathématiques.

D'autre part, l'emploi des *matériels informatiques* existant dans les établissements est à encourager, notamment à travers l'exploitation de la *lecture graphique sur écran.*

4. UNITE DE LA FORMATION .

Il est important que de nombreux travaux fassent *intervenir simultanément des parties diverses du programme* pour en faire ressortir l'unité (activités géométriques et algébriques relatives aux fonctions, articulation entre géométrie du plan et de l'espace ...). Dans cette perspective, *l'enseignement des mathématiques est aussi à relier à celui des autres disciplines* sous deux aspects principaux : étude de situations issues de ces disciplines ; organisation concertée des activités d'enseignement. Plus largement, il convient de mettre en valeur *le contenu culturel* des mathématiques ; l'introduction d'une perspective historique peut y contribuer.

5. FORMATION SCIENTIFIQUE .

Les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique , loin d'être incompatibles, doivent être développées de pair : formuler un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une démonstration, mettre en œuvre des outils théoriques, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus, évaluer leur pertinence en fonction du problème posé ne sont que des moments différents d'une même activité mathématique. Dans ce contexte, la clarté et la précision des raisonnements, la qualité de l'expression écrite et orale constituent des objectifs importants. Cependant, la maîtrise du raisonnement et du langage mathématique doit être placée dans une perspective de *progression* ; *on se gardera donc de toute exigence prématurée de formulation* , aussi bien pour les énoncés que pour les démonstrations. En particulier, le *vocabulaire* et les *notations* ne son pas imposés a priori ; ils s'introduisent en cours d'étude, selon un critère d'utilité.

6.VOCABULAIRE ET NOTATIONS .

Certaines questions (traitement des équations, emploi de propriétés caractéristiques en géométrie ...) amènent à utiliser des *équivalences logiques*; on observera qu'au collège seule la formulation en deux énoncés séparés est au programme. L'emploi des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ n'est pas un objectif du programme. *Tout exposé de logique mathématique est exclu.*

Enfin, on aura souci de se limiter à un petit nombre de notations simples. Certaines auront été introduites au collège : appartenance, égalité et

B) *Problèmes numériques et algébriques*

Ce chapitre, à l'exception des paragraphes 1.d) et 1.e) est commun à l'ensemble des spécialités.

La résolution de problèmes issus des autres disciplines et de la vie courante constitue l'objectif majeur de cette partie du programme.

On dégagera, sur des exemples, les différentes phases du traitement d'un problème : choix des inconnues, mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats.

Le traitement des problèmes combine les calculs de valeurs exactes et de valeurs approchées ; il fait appel aux différentes formes de calcul : mental, à la main et à la machine. Les interprétations graphiques, l'usage des calculatrices jouent un rôle capital, à la fois comme outils et comme sources de problèmes.

Dans cette perspective, le programme vise notamment à consolider et à compléter les acquis des classes antérieures.

Les travaux s'articulent sur deux axes :

Consolider la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique

Poursuivre l'étude des équations et des inéquations à une inconnue et des systèmes d'équations linéaires.

inégalité, égalité approchée ≈ , racine carrée, cosinus, sinus , tangente, droite (MN), segment [MN], distance MN, parallélisme et orthogonalité. S'ajoutent en Seconde, outre les notations indiquées dans les différents chapitres, l'intersection et la réunion de deux parties, l'inclusion A B et les notations **N , Z , Q , R** ; sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et *aucun développement n'est au programme* . Pour les fonctions, on utilise les écritures $y = f(x)$ et $x \mapsto f(x)$ mais les symboles f + g, fg, gof, f≤g, ... sont hors programme. Pour l'image M' de M par une transformation f du plan, on utilise l'écriture M' = f(M) ou, de façon plus suggestive et efficace, $M \mapsto M'$. On évitera des écritures telles que $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ ou (f(M)f(N)) qui sont à la limite de la lisibilité.

II- PROBLEMES NUMERIQUES ET ALGEBRIQUES

La résolution de problèmes , issus de la géométrie, de l'étude des fonctions, de la gestion de données, des autres disciplines et de la vie courante *constitue l'objectif fondamental* de cette partie du programme. On dégagera sur les exemples étudiés les différentes phases du traitement d'un problème : mise en équation, résolution, contrôle et exploitation des résultats. Dans cette perspective, le programme vise à compléter et à mobiliser les capacités acquises au collège ; les travaux s'articulent suivant deux axes :

- Consolider *la pratique conjointe du calcul littéral et du calcul numérique* , en relation étroite avec l'étude des fonctions.

- Poursuivre l'étude des *équations et inéquations à une inconnue* et des *systèmes d'équations linéaires.*

Dans le cadre de ces travaux, un objectif important est d'amener les élèves à une *meilleure maîtrise de l'emploi des variables* à travers l'étude d'exemples où elles expriment des quantités dont la signification est clairement perçue ; les travaux se développeront dans les directions suivantes : substitution de nombres à des variables (utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques, tableaux de valeurs de fonctions , ...), mise en équation de problèmes et description de phénomènes continus à l'aide de fonctions.

Le traitement des problèmes combine les *calculs de valeurs exactes et de valeurs approchées* : il fait appel aux différentes formes de calcul : mental, à la main et à la machine. Les *interprétations graphiques, l'usage des calculatrices* jouent un rôle capital, à la fois comme outils et comme sources de problèmes.

1. Calcul littéral, numérique et algébrique

Dans ce domaine, c'est la maîtrise des mécanismes *élémentaires* indiqués par le programme qui est importante ; *toute virtuosité technique est exclue,* notamment en ce qui concerne les factorisations et les calculs portant sur des fractions ou des radicaux. On tiendra compte du fait que, sur ces différents points, les exigences à l'issue de la classe de Troisième ou de Troisième technologique sont modestes. Il convient en outre de ne pas multiplier gratuitement les exercices de pur calcul littéral.

a) *Calcul sur les puissances et les racines carrées :*	
– Puissances d'un nombre.	
Formules : $(ab)^m = a^m b^m$; $a^{m+n} = a^m a^n$; $(a^m)^n = a^{mn}$ où m et n sont des entiers relatifs.	Il s'agit ici de compléter les acquis du premier cycle et de s'assurer que les élèves maîtrisent bien les puissances de 10 et savent les employer pour lire ou écrire un nombre en notation scientifique et pour évaluer un ordre de grandeur.
Racines carrées.	
Formules : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	Ces formules constituent une nouveauté pour les élèves issus de Troisième technologique.

531

1. CALCUL LITTERAL ET CALCUL NUMERIQUE .

- Dans ce domaine, c'est la maîtrise des mécanismes *élémentaires* indiqués par le programme qui est importante ; *toute virtuosité technique est exclue*, notamment en ce qui concerne les factorisations et les calculs portant sur des fractions ou des radicaux. On tiendra compte du fait que, sur ces différents points, les exigences à l'issue de la classe de Troisième sont modestes. Il convient en outre de ne pas multiplier gratuitement les exercices de pur calcul littéral.

- La résolution de problèmes menant à des *équations à une inconnue* constitue un objectif important. Toute étude introduisant a priori des paramètres est exclue. La technique de résolution de l'équation du second degré est hors programme.

- De nombreuses situations conduisent à des *inégalités* ou des *inéquations*. On se limitera à des exemples très simples et on s'appuiera sur des interprétations graphiques et sur la variation des fonctions, afin d'éviter un formalisme purement algébrique.

- Les résultats d'un calcul numérique peuvent s'exprimer sous différentes formes (valeur exacte, encadrements, approximations décimales ...). On mettra en évidence, sur les exemples étudiés, que le choix d'une telle forme est fonction du problème posé.

a) Calcul sur les puissances.

Formules : $(ab)^m = a^m b^m$ $a^{m+n} = a^m a^n$ et $(a^m)^n = a^{mn}$, où m et n sont des entiers relatifs.	Il s'agit ici de compléter les acquis du collège ; on s'assurera que les élèves maîtrisent bien les puissances de 10 et savent les employer pour lire ou écrire un nombre en notation scientifique et pour évaluer des ordres de grandeur.

b) Opérations sur les inégalités.

-Signe de ax + b. Signe d'un produit, d'un quotient. -Passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée dans une inégalité entre deux nombres positifs. -Position relative de a et a^2 selon que $a \geq 1$ ou $0 \leq a \leq 1$.	Le programme se limite à l'étude d'expressions à coefficients numériques. Ces questions sont à relier à l'étude des fonctions et à leur représentation graphique. On pourra ainsi interpréter le signe de ax + b, la comparaison de a et de a^2, pour $a \geq 0$, ou encore les opérations simples sur les imégalités ; par exemple, le fait que, si $0 < a \leq b$, alors $0 < 1/b \leq 1/a$, est à rapprocher de la décroissance de la fonction $x \to 1/x$ sur $]\ 0\ ,\ +\infty\ [$ et de l'allure de sa représentation graphique.

b) *Valeur absolue, intervalle, approximation :*

Valeur absolue, distance.

Intervalles. Notation des divers types d'intervalles.

Les valeurs absolues et les intervalles ne figurent pas au programme de Troisième. L'essentiel est de savoir interpréter $|b - a|$ comme étant la distance des points a et b et, dans cette perspective, des relations telles que $|x - 2| \leqslant 1$ ou $|x - 2| \leqslant 1/100$ à l'aide des intervalles de centre 2.

Dans le secteur industriel on fera le lien avec la notion de tolérance autour d'une valeur théorique.

Dans le secteur tertiaire on reliera la valeur absolue à l'écart moyen.

La notion de valeur absolue ne doit pas donner lieu à des exercices répétitifs.

Pratique, sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre a :

Lorsque $b \leqslant a \leqslant c$, on dit que b et c encadrent a ;

Lorsque $|a - a'| \leqslant 10^{-4}$, on dit que a' est une approximatio... (ou valeur approchée) de a à la précision 10^{-4}.

Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. Sur quelques exemples numériques, la précision obtenue pour une somme pourra être évaluée ; mais toute étude générale du calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves.

La pratique des troncatures, déjà engagée dans les classes antérieures, sera poursuivie sans formalisation de ces notions.

c) *Consolidation du calcul algébrique :*

Usage et transformation de formules

Sur des exemples simples, développements et factorisations seront effectués sans exagération. On fera appel aux formules courantes utilisées dans la vie pratique (impôts, intérêts...), en mathématiques (aires et volumes...), dans les sciences physiques et technologiques.

c) Valeur absolue, intervalles, approximations.

-Valeur absolue, distance.

-Inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a|+|b|$

Valeur absolue d'un produit, d'un quotient.

-Intervalles, notations des divers types d'intervalles.

La valeur absolue ne figure pas au programme de Troisième. En Seconde, l'essentiel est de savoir interpréter $|b-a|$ comme étant la distance des points a et b et, dans cette perspective, des relations telles que $|x-2| \leq 1$ ou $|x-2| \leq 1/100$ à l'aide des intervalles de centre 2.

-Pratique, sur des exemples numériques, du vocabulaire concernant les approximations d'un nombre a :

Lorsque $b < a < c$, on dit que b et c encadrent a.

Lorsque $|a' - a| \leq k10^{-p}$ où $k<10$, on dit que a' est une approximation (ou valeur approchée) de a à la précision $k10^{-p}$ .Approximation décimale par défaut, par excès, à 10^{-p} près.

Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. On pourra évaluer, sur quelques exemples numériques, la précision obtenue pour une somme ou un produit ; mais toute étude générale de calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves. La pratique de troncatures et d'arrondis, déjà engagée au Collège, sera poursuivie, sans formalisation de ces notions.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de situations conduisant à une équation ou inéquation à une inconnue à coefficients numériques.

Exemples simples d'emploi de factorisations pour leur résolution.

La résolution d'équations telles que $(x - 1)^2 = 2$, $(2x + 1)^2 = (x - 2)^2$, $x(x - 2) = 4 - x^2$ est un objectif raisonnable. Si, lors de l'étude d'une situation, on rencontre une équation telle que $x^2 + x - 6 = 0$ ou $x + 1/x = 3$, des indications doivent être données sur la méthode à suivre ; mais il n'y a pas lieu de multiplier de type d'exemples ni, a fortiori, d'en systématiser l'étude. De même, pour les inéqua-tions, l'étude d'exemples tels que : $x^2 \leq 2x$, $2 \leq x^2 \leq 4$ constitue un objectif raisonnable.

L'étude des équations ou inéquations comportant des radicaux est en dehors des objectifs du programme ; il en est de même pour celles qui comportent des valeurs absolues, mis à part les exemples numériques du type $|x - a| = b$ ou $|x - a| \leq b$. Pour les factorisations, on se limitera au cas de produits de deux ou trois facteurs du premier degré, et toutes les indications utiles doivent être fournies.

d) *Suites arithmétiques et géométriques :*

Formules reliant deux termes consécutifs.

Formules donnant le terme de rang n.

Ce paragraphe n'est pas au programme des B.E.P. hôtellerie restauration, alimentation.

Il s'agit d'une première approche de ces notions. L'objectif est de permettre l'obtention de certains résultats numériques dans des situations simples.

Pour les suites géométriques, on se limite au cas où la raison est positive.

Les activités seront choisies dans la vie économique et professionnelle (intérêts simples, composés...). Les formules donnant la somme de n termes d'une suite ne sont pas exigibles.

e) *Exemples d'applications dans le secteur tertiaire :*

Calculs commerciaux (prix, coûts, marges, résultat, T.V.A...) relatifs à l'établissement de divers documents (factures, bulletins de salaire...).

Conversion des monnaies.

Calculs d'intérêts :

Intérêts simples (calcul de capital, taux de placement, taux moyen) ;

Intérêts composés (calcul de capital, de valeur acquise, des intérêts).

Ce paragraphe n'est pas au programme des sections du secteur industriel.

Seuls les deux premiers items de ce paragraphe sont au programme de mathématiques des B.E.P. hôtellerie restauration, alimentation.

Ces situations nécessitent l'usage de méthodes mathématiques dans un contexte professionnel. La nécessité d'utiliser un vocabulaire technologique en coordination avec l'enseignement professionnel s'impose, mais en se limitant à l'essentiel. On s'attachera à dégager des situations de proportionnalité. On mettra en œuvre les outils mathématiques dont on dispose : équations et inéquations à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues, fonctions, suites arithmétiques et géométriques...

Problèmes d'amortissement du matériel.

Escompte bancaire, taux réel de l'escompte.

Equivalence d'un capital et d'un ensemble de capitaux, paiement à crédit.

Ces trois derniers points ne sont pas au programme du B.E.P. communication administrative et secrétariat.

Pratique des opérations portant sur des nombres (puissances, fractions, radicaux ...).

L'étude d'exemples tels que $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ou $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}$ est envisageable à condition que l'on ait précisé la forme réduite visée. En revanche, la réduction d'expressions telles que $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ou a fortiori $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$, n'est pas un objectif du programme.

L'encadrement de l'opposé d'un nombre, de la somme de deux nombres, du produit de deux nombres positifs.

Exemples d'approximation d'un nombre au moyen d'encadrements.

Les activités peuvent amener à encadrer une différence, un inverse, une racine carrée ; les élèves n'ont pas à mémoriser les règles correspondantes.

2. ÉQUATIONS, INÉQUATIONS, SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

L'objectif est non seulement de mettre en œuvre une technique de résolution, mais surtout d'étudier des problèmes issus d'autres disciplines et de la vie économique et professionnelle, en mettant en valeur les phases de mise en équation, de traitement mathématique, de contrôle et d'interprétation des résultats. Les exemples étudiés conduiront à des équations ou inéquations à une inconnue ou à des systèmes d'équations linéaires à coefficients numériques.

Les exemples trop techniques ou coupés de tout contexte seront évités.

a) *Equations et inéquations du premier degré à une inconnue à coefficients numériques :*

Résolution numérique ;

L'objectif est de conjuguer l'étude numérique et l'étude graphique, et non d'apprendre des formules de résolution ; en particulier la notion de déterminant et les formules de Cramer ne sont pas au programme.

Exemples d'étude de situations conduisant à une ou plusieurs équations ou inéquations du premier degré à une inconnue.

b) *Système de deux équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques :*

Résolution numérique et graphique ;
Exemples d'étude de situations conduisant à de tels systèmes.

2. SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Il s'agit de systèmes d'équations linéaires à *coefficients numériques*. L'objectif est non seulement de mettre en œuvre une technique de résolution, mais aussi *d'étudier des problèmes issus d'autres disciplines et de la vie économique et sociale* , en mettant en valeur les phases de mise en équation, de traitement mathématique, de contrôle et d'interprétation des résultats. On évitera les exemples trop techniques, coupés de tout contexte. L'étude d'exemples comportant des paramètres est exclue.

Résolution numérique et étude graphique de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues à coefficients numériques. Critère d'existence et d'unicité de la solution

L'objectif est d'organiser et de conjuguer l'étude numérique et l'étude graphique, et non d'apprendre des formules de résolution ; en particulier, la notion de déterminant et les formules de Cramer ne sont pas au programme.

Sur des exemples numériques, les élèves doivent savoir reconnaître et traiter les différents cas qui peuvent se présenter.

Travaux pratiques

Exemples d'étude par interprétation graphique de systèmes d'équations et d'inéquations linéaires à deux inconnues.

Exemples de mise en œuvre de méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à coefficients numériques (substitution, combinaisons linéaires).

La description générale de ces méthodes est hors programme.
On se limitera à des situations ne comportant pas plus de quatre inconnues. L'étude d'exemples où il n'y a pas existence et unicité de la solution est en dehors des objectifs du programme.

C) *Fonctions*

Ce chapitre, à l'exception du paragraphe 2.d), est commun à l'ensemble des spécialités.

Le programme est orgânisé autour de deux objectifs principaux :

Familiariser les élèves avec la description de phénomènes continus à l'aide de fonctions ;

Acquérir une bonne maîtrise des fonctions usuelles indiquées dans le programme et un certain savoir-faire, toutes les indications utiles étant fournies, pour l'étude de fonctions qui s'en déduisent simplement.

On exploitera largement des situations issues de la géométrie, des sciences physiques, des disciplines technologiques et de la vie économique et sociale, en marquant les différentes phases : mise en équation, traitement mathématique, contrôle et exploitation des résultats.

Le programme combine les études qualitatives (croissance, allure des représentations graphiques...) avec les études quantitatives (recherches d'extrémums...). Il ne porte que sur l'étude d'exemples et se place dans le cadre des fonctions définies sur un intervalle ; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction...).

L'intervalle de définition sera indiqué lors de la donnée de la fonction considérée. Cet intervalle peut aussi résulter de contraintes naturelles portant sur l'inconnue (exprimées, dans un contexte concret, par des inégalités portant sur cette inconnue).

1. Génération et description des fonctions

On exploitera des situations variées : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, des disciplines technologiques, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale.

a) *Exemples de modes de génération de fonctions. Exemples de description d'une situation à l'aide d'une fonction. Représentation graphique d'une fonction dans un repère orthonormal ou orthogonal.*	On ne se limitera pas à des fonctions définies par des formules algébriques simples. Pour que les élèves se forment une idée assez large de la notion de fonction, on donnera quelques exemples de situations menant à des fonctions définies différemment, par exemple par des représentations graphiques.
b) *Exemples simples de calculs de valeurs d'une fonction à l'aide d'une calculatrice.*	Les calculatrices programmables ne sont pas exigées.
c) ***Parité, périodicité.*** **Maximum, minimum d'une fonction. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes.**	**Ces notions sont mises en place uniquement sur des exemples, notamment pour les fonctions figurant au paragraphe 2.a) ; on mettra en valeur leur signification graphique.** **Les notions de taux de variation, de maximum local et de minimum local ne sont pas au programme.**
d) ***Exemples de lecture de propriétés de fonctions à partir de leur représentation graphique.***	

III- FONCTIONS

Le programme est organisé autour de deux objectifs principaux :

- Familiariser les élèves avec la *description de phénomènes continus à l'aide de fonctions.*
- Acquérir une *bonne maîtrise des fonctions usuelles* indiquées dans le programme et un certain savoir-faire, toutes les indications utiles étant fournies, pour l'étude de fonctions qui s'en déduisent simplement.

On exploitera largement des situations issues de l'algèbre, de la géométrie, des sciences et techniques et de la vie économique et sociale, en marquant les différentes phases : mise en équation, traitement mathématique, contrôle et exploitation des résultats.

Le programme combine les *études qualitatives* (croissance, allure des représentations graphiques, etc) avec les *études quantitatives* (majorations, recherche de maximums,...).

Il ne porte que sur *l'étude d'exemples* et se place dans le cadre de *fonctions définies sur un intervalle* ; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction, ...). Le plus souvent, l'intervalle d'étude sera indiqué lors de la définition de la fonction considérée. Dans certains exemples, l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles : on se ramène alors à une étude portant sur chacun de ces intervalles ; on ne multipliera pas de tels exemples.

1. GENERATION ET DESCRIPTION DES FONCTIONS

On exploitera des situations variées : tracés graphiques, touches de la calculatrice, algorithmes de calcul, relations de dépendance issues de la géométrie, de la mécanique, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale.

Exemples de modes de génération de fonctions. Exemples de description d'une situation à l'aide d'une fonction. Représentation graphique d'une fonction dans un repère (orthonormal ou orthogonal).	Dans la plupart des situations étudiées en Seconde, les fonctions sont définies par des formules algébriques simples. Pour que les élèves se forment une idée assez large de la notion de fonction, on donnera *quelques* exemples de situations menant à des fonctions définies différemment.
Parité, périodicité. Maximum, minimum d'une fonction. Fonctions croissantes, fonctions décroissantes.	Ces notions sont mises en place uniquement sur des exemples : on mettra en valeur leur signification graphique. Les notions de taux de variation, de maximum local et de minimum local ne sont pas au programme.

2. Fonctions usuelles

A travers l'étude des fonctions figurant au programme et de situations menant à des fonctions qui s'en déduisent de façon simple, on mettra en valeur la diversité du comportement des fonctions. Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de proportionnalité et en particulier de pourcentages, dont l'étude a été abordée dans les classes antérieures, en relation avec l'étude des fonctions linéaires et des fonctions affines.

L'étude générale des fonctions polynômes de degré deux et des fonctions homographiques est hors programme. Pour les sections industrielles concernées, l'introduction des fonctions circulaires constitue une simple prise de contact de caractère expérimental : on s'appuiera sur l'étude du cercle trigonométrique (cf. programme de géométrie) et sur l'exploitation des touches de la calculatrice. Tout développement théorique est exclu.

Le choix de situations issues des sciences physiques et des disciplines technologiques contribue à éclairer la signification des changements d'origine ou d'échelles. Tout exposé général sur ces points est exclu ; on se limitera à quelques exemples simples et toutes les indications utiles seront fournies aux élèves.

a) *Variations et représentation graphique des fonctions :*
$x \mapsto ax + b$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto 1/x$.

Le sens de variation de ces fonctions de référence sur des intervalles à préciser est admis. Pour ces fonctions on pourra traduire la croissance ou la décroissance sur les intervalles envisagés par des inégalités.

On sera amené à effectuer une exploration numérique du comportement de ces fonctions pour les grandes valeurs de x et, dans le cas de $x \mapsto 1/x$, pour les petites valeurs de x ; mais toute mise en forme de la notion de limite est hors programme.

b) *Exemples simples d'étude de comportements de fonctions* tels que : signe, variations, recherche de maximums et de minimums, représentations graphiques dans un repère (orthonormal ou orthogonal).

On entraînera les élèves à utiliser le sens de variation des fonctions du paragraphe 2.a) pour l'étude du comportement de fonctions telles que :

$$x \mapsto 2x^2,\ x \mapsto -\frac{1}{4}x^2,\ x \mapsto 2x^2 + 1.$$

Toutes les indications utiles étant fournies. L'étude des fonctions faisant intervenir des valeurs absolues est hors programme.

On étudiera des situations décrites au moyen de fonctions issues de la géométrie, des disciplines technologiques, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale. On s'attachera à mettre en évidence, à travers les exemples étudiés, la signification des propriétés des fonctions concernées (parité, croissance, maximums, minimums...). L'utilisation de logiciels de type imagiciel ou utilisés dans les disciplines citées ci-dessus peut contribuer efficacement à la réalisation de ces objectifs.

2. FONCTIONS USUELLES

- A travers l'étude de fonctions figurant au programme et de situations menant à des fonctions qui s'en déduisent de façon simple, on mettra en valeur *la diversité de comportement des fonctions* . Dans ce cadre, il est important que les élèves soient entraînés à mieux maîtriser les situations de *proportionnalité* , dont l'étude a été abordée au Collège, en relation avec l'étude des fonctions linéaires et des fonctions affines.

- L'étude générale des fonctions polynômes de degré deux et des fonctions homographiques est hors programme. L'introduction des *fonctions circulaires* constitue une *simple prise de contact de caractère expérimental :* on s'appuiera sur l'étude du cercle trigonométrique (Cf programme de géométrie) et sur l'exploitation des touches de la calculatrice. Tout développement théorique est exclu.

- Le choix de situations issues des sciences physiques contribue à éclairer la signification des changements d'origine ou d'échelle. Tout exposé général sur ces points est exclu ; on se limitera à quelques exemples simples et toutes les indications utiles seront fournies aux élèves.

a) Variation et représentation graphique des fonctions :
$x \mapsto ax + b$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

On sera amené à effectuer une exploration numérique du conportement de ces fonctions pour les grandes valeurs de x et, dans le cas de $x \mapsto \frac{1}{x}$, pour les petites valeurs de x ; mais toute mise en forme de la notion de limite est hors programme.

b) Etude des fonctions cosinus et sinus : périodicité, symétrie, sens de variation. Courbes représentatives.

On entraînera les élèves à retrouver sur le cercle trigonométrique des propriétés des fonctions cosinus et sinus, notamment des relations telles que :
$\cos(\pi + x) = -\cos x$,
$\sin(\pi - x) = \sin x$,
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$,....
Les élèves n'ont pas à mémoriser ces formules. L'étude de la fonction tangente et les formules d'addition sont hors programme, ainsi que la résolution des équations trigonométriques, mis à part le cas de la lecture inverse de la mesure principale d'un angle aigu.

Annexe III

Les productions des élèves : le test de l'année 1992-1993

Evaluation à l'entrée en Première G

NOM : 　　　　　　　　**Prénom :** CAROLINE

__Exercice 1__ :

Classer du plus petit au plus grand

-5,67; 13.10^2; 4,009; $56,71.10^{-1}$; 4,09; $0,67.10^3$; 4,1; 7/2+7/3

Indiquer vos calculs intermédiaires. 　　　　≃ 3,5 + 2,33 ≃ 5,83

__Exercice 2__ :

Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires :

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ 　　　avec a = -3 　　b = 4

$C = \sqrt{3\times 2} + \sqrt{4\times 4}$ 　　$C = \sqrt{[illegible]} + \sqrt{16}$ 　　$C = \sqrt{25}$

$P = u + \frac{n}{2}u$ 　　　avec u = 150 　　n = 6

$P = 150 + \frac{6}{2} \times 150$ 　　$P = 150 + 3 \times 150$ 　　$P = 153 \times 150$ 　　$P = 22950$

$V = (-t^2 + 7x)^3$ 　　　avec t = 3 　　x = 2

$V = (-3 \times -3) + (7 \times 2) \times 3$ 　　$V = (9 + 14) \times 3$ 　　$V = 23 \times 3$ 　　$V = 69$

__Exercice 3__ :

Est-il exact que :

	O/N	Commenter votre réponse
$-9^2 = -81$	O	$(-9) + (-9) = -81$ c'est une addition.
$(-9)^2 = -81$	N	Car c'est une multiplication donc le resultat doit etre positif
$-9^2 = 81$	N	Car -9^2 à un resultat negatif
$(-9)^2 = 81$	O	$(-9) \times (-9) = 81$ car $- \times - = +$

Exercice 4 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout réel a ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$a^2 = a.a$	Faux	
$a^2 = 2a$	Vrai	
$a^2 = a2$	Faux	Car le chiffre doit être toujours avant la lettre
$a^2 = a+a$	Vrai	
$a^2 = axa$	Vrai	

Exercice 5 :

Développer et réduire

$(a - b)(b - 2) - (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$

$(ab - 2a - b^2 + 2b) - (2b - ba - 4 + 2a) + (a^2 + ab - ba - b^2)$

$(ab - 4ab - b^2) - (4ba - ba + a) + (a^2 + ab - ba . b^2)$

Exercice 6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$x^2x^3 = x^5$	Vrai	
$x^2x^3 = x^6$	faux	car $(x+x)$ $(x+x+x) = 2x+3x$
$x^2+x^3 = x^5$	Vrai	
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	faux	car $(4x+4x)+(3x+3x+3x) = 8x+9x$
$2x^2 = (2x)^2$	Vrai	
$(x^2)^3 = x^6$	Vrai	
$(x^2)^3 = x^5$	faux	car un chiffre entre parenthèse est multiplié

Exercice 7 :

Parmi les réponses proposées, entourer dans chaque cas celle qui est correcte. Expliciter votre réponse

1° Le développement de $(9-x)^2$ est

$81-x^2$ $\quad$ $81-18x+x^2$ $\quad$ $\cancel{81-18x-x^2}$ $\quad$ $81-9x+x^2$

$(9-x)^2=(9-x)(9-x)$
$=(81-9x-9x+x^2)$
$=81-18x+x^2$

2° L'expression $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ a pour forme factorisée

x^2-2x-8 $\quad$ $(x+2)+(x-4)$ $\quad$ $(x+2)(x-4)$ $\quad$ $(x+2)(-5x-5)$

3° L'équation $4x = 3(10 - x)$ a pour solution

23 $\quad$ 6 $\quad$ $\frac{30}{7}$ $\quad$ $-\frac{30}{7}$

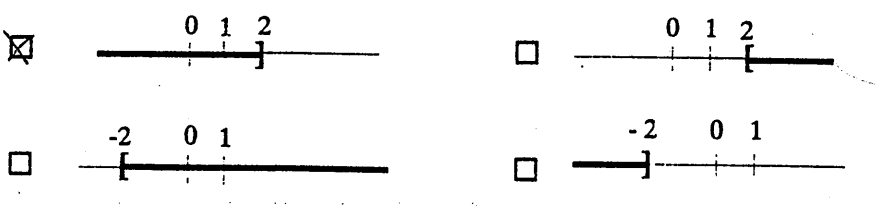
4° L'équation $(3-2x)(x-2)=0$ a pour solution(s)

$\frac{2}{3}$ et 2 $\quad$ 2 $\quad$ $\frac{3}{2}$ et 2 $\quad$ $\frac{5}{3}$

5° L'équation $(x+1)(x-3) = -3$ a pour solutions

-1 et 3 $\quad$ -4 et 0 $\quad$ 0 et 2 $\quad$ 0 et 1

6° Les solutions de l'inéquation $3 - x \leq 1$ sont représentées en traits gras par



Exercice 8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

Employés	2	3	4
Partage	A	12000	C

$$\frac{A}{2} = \frac{12000}{3} = \frac{C}{4} = 4000$$

A = 2 × 4000 = 8000 F

B = 12 000 F

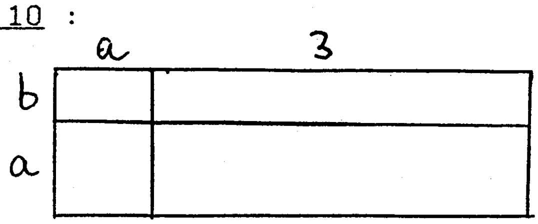
C = 4000 × 4 = 16 000 F

Exercice 9 :

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celle de droite (si c'est possible).

l'inverse de la somme des inverses de x et de et de y	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
la somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
la somme des carrés de x et de y	$2x - 3y$
le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	$x^2 + y^2$
la différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
l'inverse de la somme de x et de y	$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
le carré de la somme de x et de y	$(x + y)^2$

Exercice 10 :



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle. Justifier** votre réponse.

$S = a + b(a + 3)$ $\quad S = a^2b + 3ab$ $\quad S = a + 3(a + b)$

$S = 3a^2b$ $\quad S = (a + b)(3 + a)$ $\quad S = 6ab + a^3b$

$S = a^2 + ba + 3b$ $\quad S = ab + 3b + a^2 + 3a$ $\quad S = 3ab + 3a^2$

$S = (a + 3)(b + a)$ $\quad S = a^2 + ab$ $\quad S = 3ab^2 + 3a^3$

$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$

Exercice 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante :

$$(3 + 5n) \times 2 - 6$$

exercice 12 : CAROLINE

Soient trois nombres consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez le.

Exercice 13:

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :

" Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 "

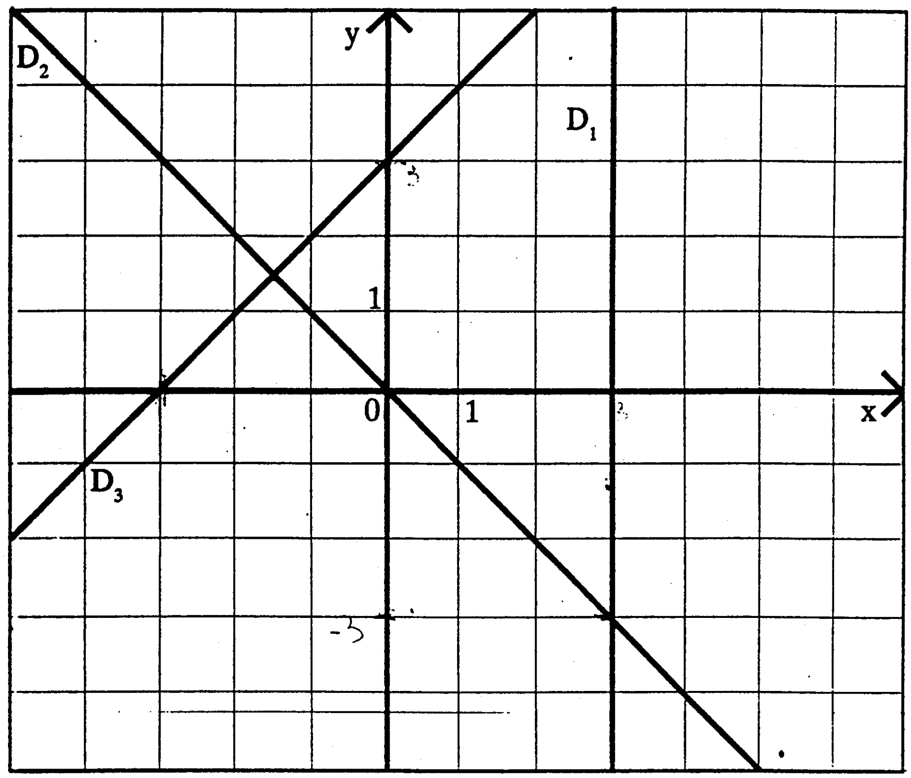
L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

Je prends le nombre 4

4 + 8 = 12 ; 12 x 3 = 36 ; 36 - 4 = 32 ; 32 + 4 = 36 ; 36 : 4 = 9 ;
9 + 2 = 11 et 11 - 4 = 7

Donc cette affirmation est juste.

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

$y = 3$	$x = 3$
$y = x$	$y = -x$
$y = 3x$	$y = -3x$
$y = x - 3$	$y = x + 3$
$y = -x + 3$	$y = -x - 3$

Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 :

droite	équation de la droite
D_1	$y = 3x$
D_2	$y = -x - 3$
D_3	$y = -x + 3$

Exercice 15 :

Indiquer si les égalités sont vraies ou fausses.

	Vrai/faux	Si faux, dire pourquoi
$3 + m = 3m$	faux	Sinon $3 \times m = 3m$
$ab = a + b$	faux	Sinon $ab = a \times b$
$b - 2 \times c = (b-2)c$	Vrai	
$3 + 2m = 5m$	faux	Car 2m ne s'additionne pas avec 3

Exercice 16 :

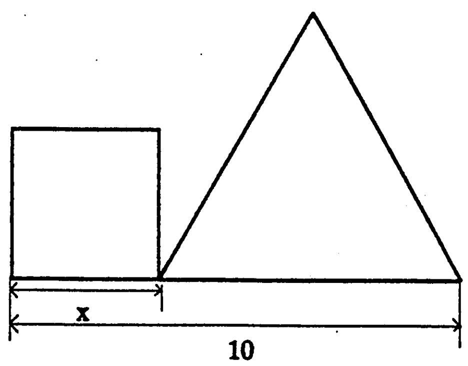
Ecrire une équation utilisant les variables E et P pour représenter la phrase suivante :

" Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée "

Utiliser E pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs.

6E - P

Exercice 17 :

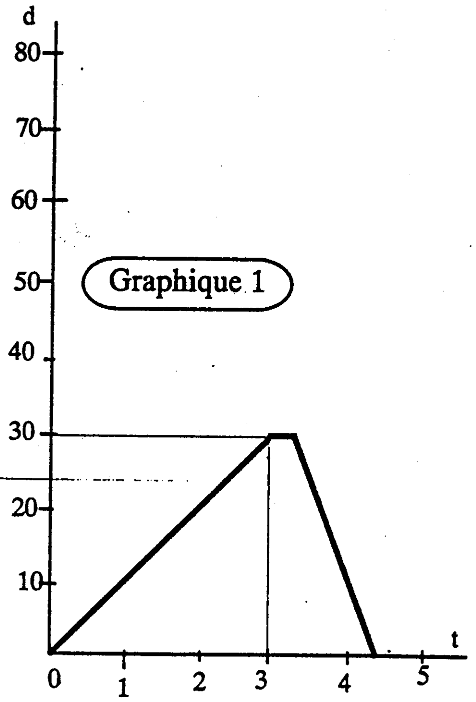


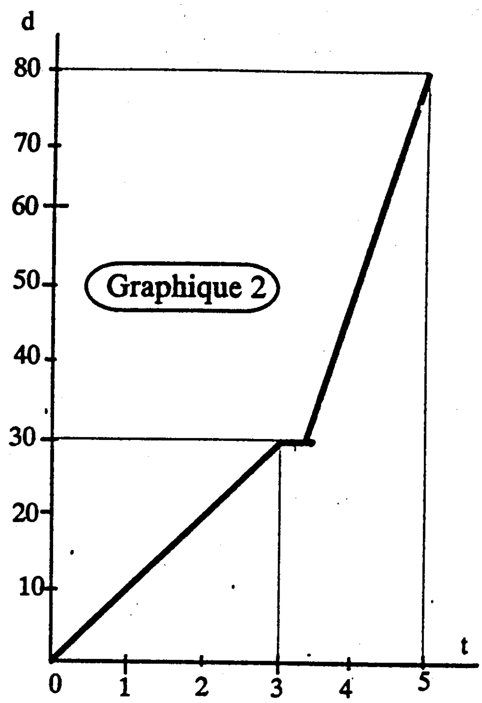
Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

Exercice 18

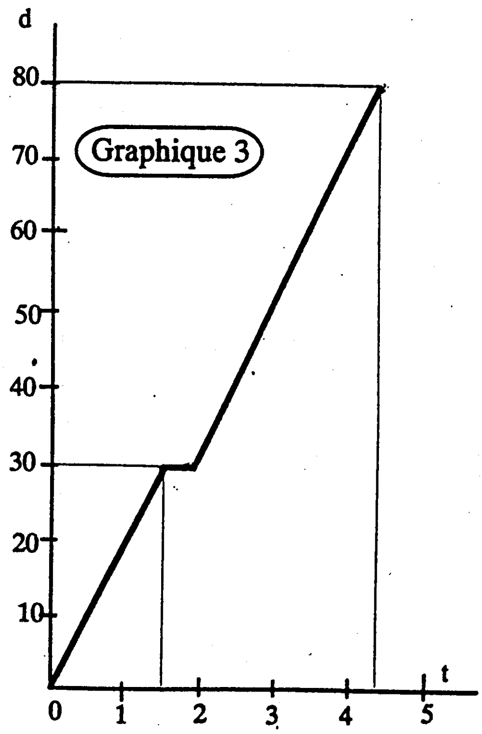
Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.





Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.



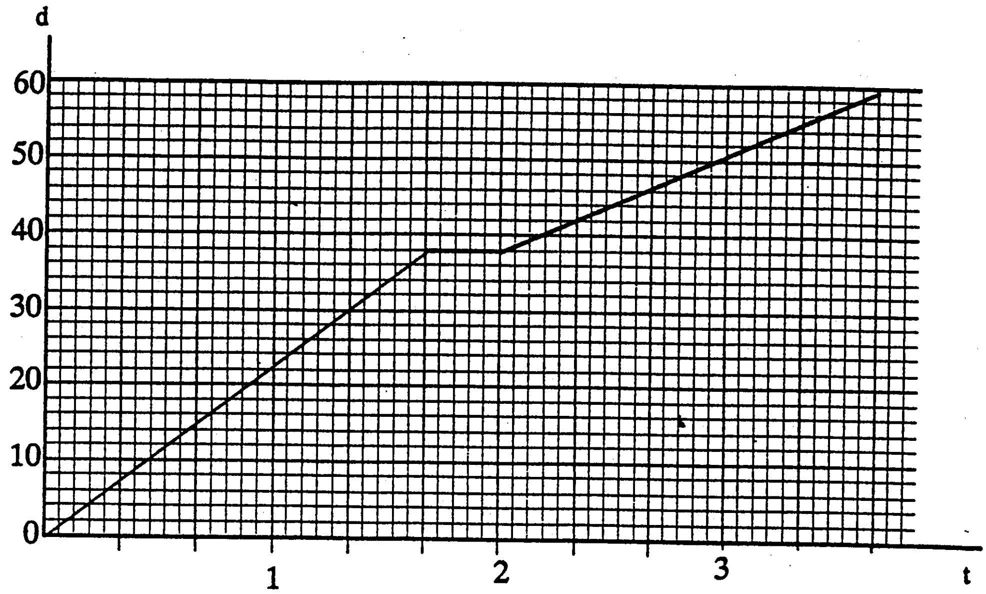
Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

Réponse :

Graphique n° 3

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie.



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy.

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

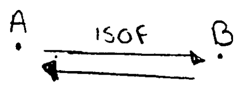
Exercice 19 :

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150F le voyage aller et retour.

Elle consent aux étudiants une réduction de20% du prix du billet.

D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400F par an, on paie le billet à moitié prix.

A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?



150f - 20% = 120f

Donc le tarif du billet est 120f

Annuelle = 120 × 12 = 1440 F

Evaluation à l'entrée en Première G

NOM : Prénom : ALICE

Exercice 1 :

Classer du plus petit au plus grand

$-5,67$; $13,10^2$; $4,009$; $56,71.10^{-1}$; $4,09$; $0,67.10^3$; $4,1$; $7/2+7/3$

Indiquer vos calculs intermédiaires.

$13,10^2 = 171,61$ $7 \div 2 + 7 \div 3 \simeq 5,833$

$-5,67 < 4,009 < 4,09 < 4,1 < 5,671 < 5,833 < 670 < 1300$

Exercice 2 :

Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires :

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $a = -3$ $b = 4$

$C = \sqrt{-3^2 + 4^2}$

$C = \sqrt{25}$

$C = 5$

$P = u + \frac{n}{2}u$ avec $u = 150$ $n = 6$

$P = 150 + \frac{6}{2} \times 150$

$P = 150 + (3 \times 150)$

$P = 600$

$V = (-t^2 + 7x)^3$ avec $t = 3$ $x = 2$

$V = (-3^2 + 7 \times 2)^3$

$V = (9 + 14)^3$

$V = 23^3$

$V = 12167$

Exercice 3 :

Est-il exact que :

	O/N	Commenter votre réponse
$-9^2 = -81$	N	car -9^2 correspond a 9 donc c'est 81
$(-9)^2 = -81$	O	car les parrentheses garde le − de (−9)
$-9^2 = 81$	O	car
$(-9)^2 = 81$	N	car

Exercice 4 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout réel a ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$a^2 = a.a$	VRAI	
$a^2 = 2a$	FAUX	car methe au cané consiste a multi plier 1 chiffre par lui
$a^2 = a2$	FAUX	même alors que quand on le multiplie par 2 le resultat est ≠
$a^2 = a+a$	FAUX	// //
$a^2 = axa$	VRAI	// //

Exercice 5 :

Développer et réduire

$(a - b)(b - 2) - (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$

$(a^2 + ab - ab - b^2)$

$(ab - 2a - b^2 + 2b) - (2b - ab - 4 + 2a) + (a^2 - b^2)$

$ab - 2a - b^2 + 2b - 2b + ab + 4 - 2a + a^2 - b^2$

$a^2 + 4a + 2ab + 2b^2 + 4$

Exercice 6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$x^2x^3 = x^5$	VRAI	
$x^2x^3 = x^6$	FAUX	parce qu'on doit additionner les exposants
$x^2+x^3 = x^5$	FAUX	car on ne doit pas additionner les exposants
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	FAUX	// car c'est 1 addition //
$2x^2 = (2x)^2$	FAUX	car dans le 1er cas 2 est l'exposant de x alors que dans le 2e 2 est l'expo. de 2x
$(x^2)^3 = x^6$	VRAIS	
$(x^2)^3 = x^5$	FAUX	car on doit multiplier les exposants

Exercice 7 :

Parmi les réponses proposées, entourer dans chaque cas celle qui est correcte. Expliquer votre réponse

1° Le développement de $(9-x)^2$ est

$81-x^2$ $\qquad$ $81-18x+x^2$ $\qquad$ $81-18x-x^2$ $\qquad$ $81-9x+x^2$

$(9-x)(9-x)$

$81-9x-9x+x^2$

$81-18x+x^2$

2° L'expression $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ a pour forme factorisée

x^2-2x-8 $\qquad$ $(x+2)+(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(-5x-5)$

$(x+2)[(x+1)-5]$

$(x+2)(x+1-5)$

$(x+2)(x-4)$

3° L'équation $4x = 3(10 - x)$ a pour solution

23 $\qquad$ 6 $\qquad$ $\frac{30}{7}$ $\qquad$ $-\frac{30}{7}$

$4x = 30 - 3x$

$4x + 3x = 30$

$\frac{7x}{7} = \frac{30}{7}$ $\qquad$ $x = \frac{30}{7}$

4° L'équation $(3-2x)(x-2)=0$ a pour solution(s)

$\frac{2}{3}$ et 2 $\qquad$ 2 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ et 2 $\qquad$ $\frac{5}{3}$

$3-2x=0$ $\qquad$ ou $\qquad$ $x-2=0$

$3=2x$ $\qquad\qquad$ $x=2$

$x=\frac{3}{2}$

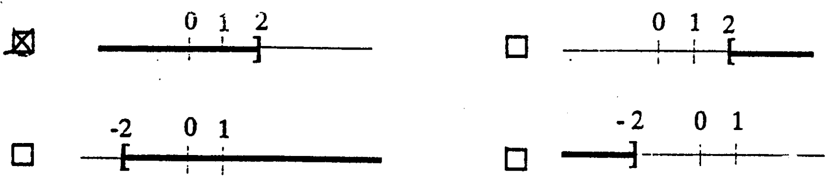
5° L'équation $(x+1)(x-3) = -3$ a pour solutions

-1 et 3 $\qquad$ -4 et 0 $\qquad$ 0 et 2 $\qquad$ 0 et 1

$x+1=0$ $\qquad$ ou $\qquad$ $x-3=0$

$x=-1$ $\qquad\qquad$ $x=3$

6° Les solutions de l'inéquation $3 - x \leq 1$ sont représentées en traits gras par



$3-x \leq 1$

$-x \leq -2$

$x \leq 2$

542. 2

Exercice 8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

soit x represente le 1^er^ employé qui a 2 enfants

$$\frac{2 \times 12\,000}{3} = x$$

$$\frac{24\,000}{3} = x$$

$$8000 = x$$

le premier employé qui a 2 enfant recevera 8000 francs.

soit x represente le 3^e^ employé qui a 4 enfants

$$\frac{4 \times 12000}{3} = x$$

$$\frac{48\,000}{3} = x$$

$$16\,000 = x$$

le 3^e^ employé recevra 16 000 Francs

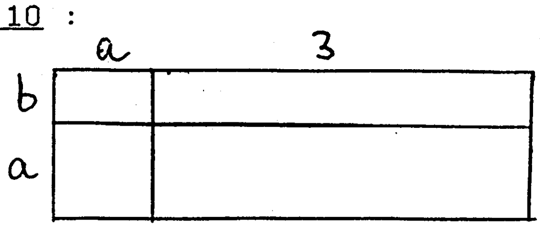
$3 \rightarrow 12000$
$2 \rightarrow ?$
$4 \rightarrow ?$

Exercice 9 :

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celle de droite (si c'est possible).

l'inverse de la somme des inverses de x et de et de y	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
la somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
la somme des carrés de x et de y	$2x - 3y$
le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	$x^2 + y^2$
la différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
l'inverse de la somme de x et de y	$\dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$
le carré de la somme de x et de y	$(x + y)^2$

Exercice 10 :



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle.** **Justifier** votre réponse.

$S = a + b(a + 3)$ $S = a^2b + 3ab$ $S = a + 3(a + b)$

$S = 3a^2b$ $S = (a + b)(3 + a)$ $S = 6ab + a^3b$

$S = a^2 + ba + 3b$ $S = ab + 3b + a^2 + 3a$ $S = 3ab + 3a^2$

$S = (a + 3)(b + a)$ $S = a^2 + ab$ $S = 3ab^2 + 3a^3$

$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$

Exercice 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante :

$$(3 + 5n) \times 2 - 6$$

exercice 12 : ALICE

Soient trois nombres consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez le.

ex = 2-3-4 5-6-7 26-27-28

3² - 8 6² - 35 27² - 728

9 - 8 = 1 36 - 35 = 1 729 - 728 = 1

jé constate que le resultat est "apparament" toujours 1 c'est logique mais jé ne sais pas l'expliquer.

Exercice 13:

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :

" Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 "

L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

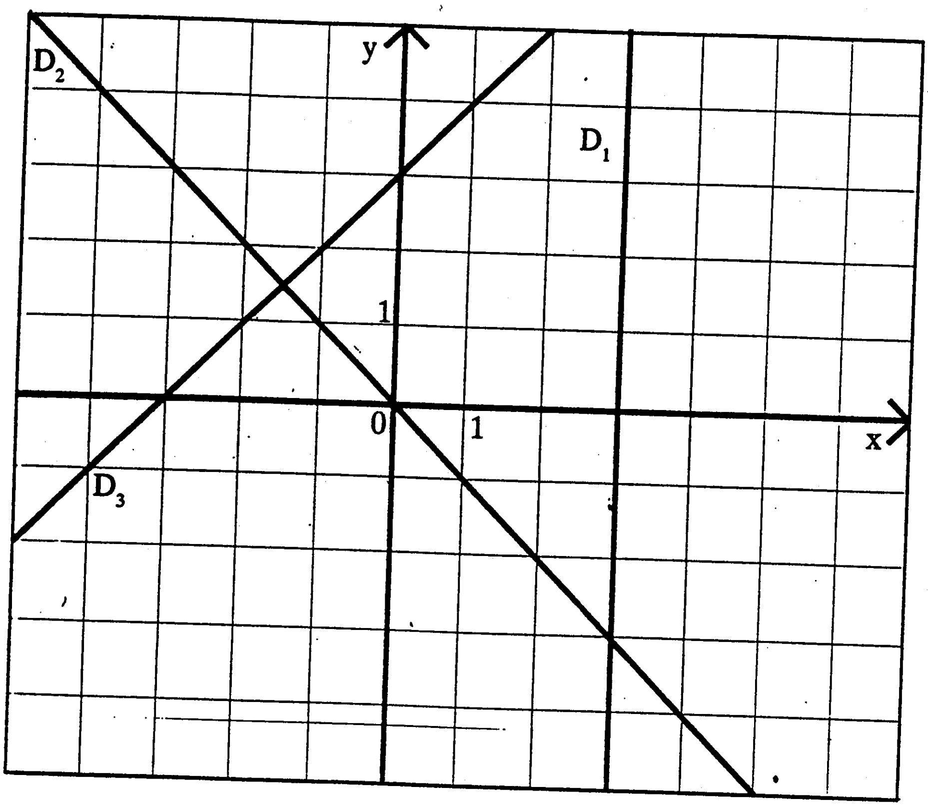
oui l'affirmation suivante est vraie.

soit 2 et 9 represente le chiffre auquel ji pense.

2 + 8 = 10	9 + 8 = 17
10 × 3 = 30	17 × 3 = 51
30 - 4 = 26	51 - 4 = 47
26 + 2 = 28	47 + 9 = 56
28 ÷ 4 = 7	56 ÷ 4 = 14
7 + 2 = 9	14 + 2 = 16
9 - 2 = 7	16 - 9 = 7

parce que

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

$y = 3$
$y = x$
$y = 3x$
$y = x - 3$
$y = -x + 3$

$x = 3$
$y = -x$
$y = -3x$
$y = x + 3$
$y = -x - 3$

Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 :

droite	équation de la droite
D_1	$x = 3$
D_2	$y = x$
D_3	$y = -3x$

549.6

Exercice 15 :

Indiquer si les égalités sont vraies ou fausses.

	Vrai/faux	Si faux, dire pourquoi
3 + m = 3m	FAUX	Parce que $3m = 3 \times m$
ab = a + b	FAUX	parceque $ab = a \times b$
b - 2 x c = (b-2)c	VRAIS	mais pas à la machine car on fait dabord la multi plication. ?
3 + 2m = 5m	FAUX	car $3m + 2m = 5m$ on ne peut pas melanger les m avec les nombre sans m.

Exercice 16 :

Ecrire une équation utilisant les variables E et P pour représenter la phrase suivante :

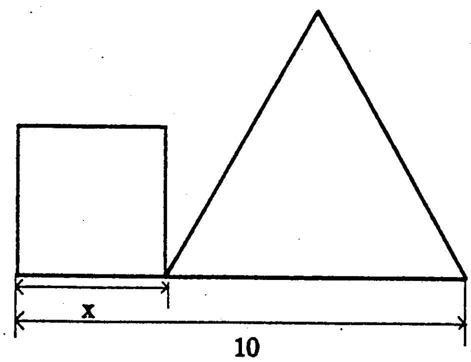
" Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée "

Utiliser E pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs.

$P \times 6 = E$

$6P = E$

Exercice 17 :

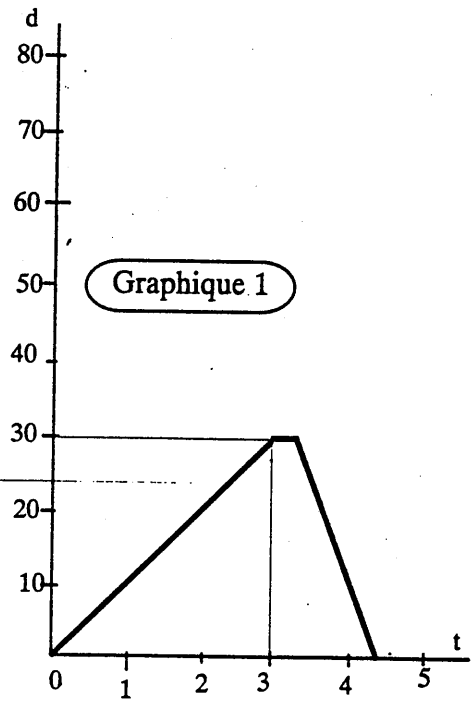


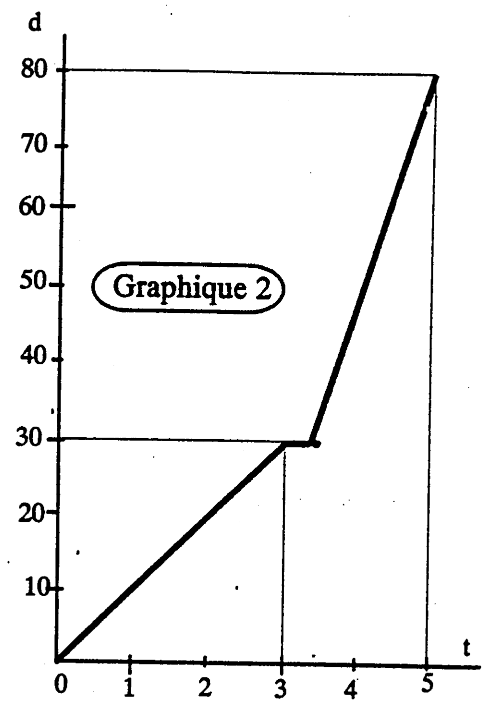
Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

Exercice 18

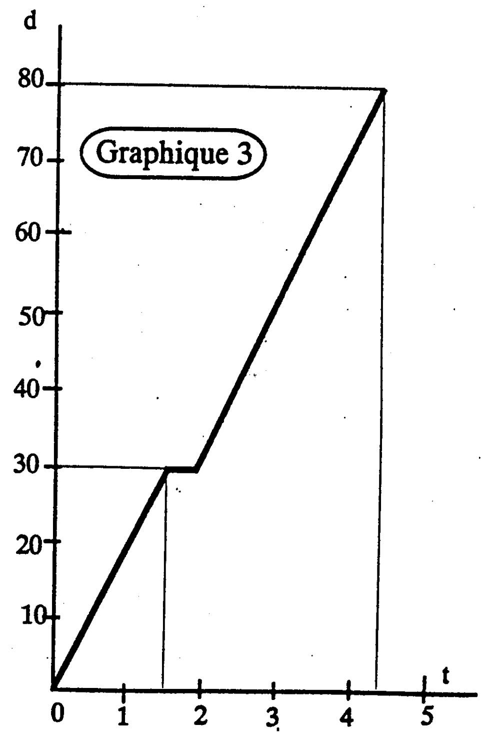
Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.





Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.



Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

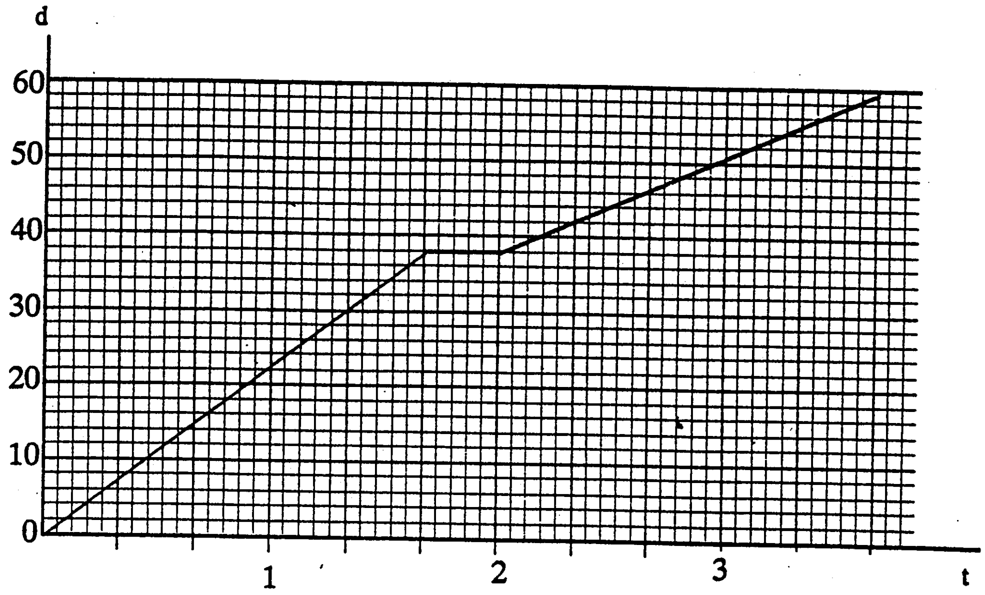
Réponse :

Graphique n° ☐

549.8

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie.



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy.

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

Exercice 19 :

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150F le voyage aller et retour.

Elle consent aux étudiants une réduction de20% du prix du billet.

D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400F par an, on paie le billet à moitié prix.

A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?

$\left.\begin{array}{l} V = 150 - 20\% \\ V = 120 \end{array}\right\}$ voyage étudiants

$\frac{1400}{120} = 11{,}66$ a partir d'un an le voyage coûte moins cher si on s'abone.

Evaluation à l'entrée en Première G

NOM : **Prénom :** MÈRIÈME

Exercice 1 :

Classer du plus petit au plus grand

$-5,67$; 13.10^2; $4,009$; $56,71.10^{-1}$; $4,09$; $0,67.10^3$; $4,1$; $7/2+7/3$

0,1

Indiquer vos calculs intermédiaires.

$13\times(10\times10) = 13\times100 = 1300$ | $0,67\ (10\times10\times10) = 0,67\times1000 = 670$

$56,71\ (\times 0,1 = 5,671$ | $(7\div2)+(7\div3) = 3,5 + 2,333 = 5,8333$

$-5,67$; $4,009$; $4,09$; $4,1$; $7/2+7/3$; $0,67\times10^3$; 13×10^2

$56,71\times10^{-1}$

Exercice 2 :

Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires :

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $a = -3$ $b = 4$

$C = \sqrt{-3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

écriture inadéquate

$P = u + \frac{n}{2}u$ avec $u = 150$ $n = 6$

$P = 150 + \left(\frac{6}{2}\times150\right) = 150 + \frac{900}{2} = \frac{300}{2} + \frac{900}{2} = \frac{1200}{2} = 600$

$V = (-t^2 + 7x)^3$ avec $t = 3$ $x = 2$

$V = [-3^2 + (7\times2)]^3 = (9 + 14)^3 = 23^3 = 23\times23\times23 = 12167$

Exercice 3 : -9

Est-il exact que :

	O/N	Commenter votre réponse
$-9^2 = -81$	N	Car un chiffre au carré ne peut pas être négatif.
$(-9)^2 = -81$		
$-9^2 = 81$	O	Car $-9\times-9 = 81$
$(-9)^2 = 81$		

Exercice 4 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout réel a ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$a^2 = a.a$	Vrai	
$a^2 = 2a$	Faux	Car le carré de a ne peux car être égal à a x 2.
$a^2 = a2$	Faux	//
$a^2 = a+a$	Faux	Puissance 2 ~~veut~~ dire multiplier le chiffre par lui même et pas additionner.
$a^2 = axa$	Vrai	

Exercice 5 :

Développer et réduire

(a - b)(b - 2) - (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)

$ab - \cancel{2a} - \cancel{b^2} + \cancel{2b} - \cancel{2b} + ab + 4 - \cancel{2a} + a^2 \cancel{+ ab} \cancel{- ab} - \cancel{b^2} =$

$2ab - 4a - 2b^2 + 4 + a^2$

Exercice 6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$x^2x^3 = x^5$	Vrai	
$x^2x^3 = x^6$	Faux	Car on additionne les puissances pour une multiplication
$x^2+x^3 = x^5$	Faux	Car on multiplie ~~les~~ puissances pour une addition.
$4x^2+3x^3 = 7x^5$		
$2x^2 = (2x)^2$		
$(x^2)^3 = x^6$		
$(x^2)^3 = x^5$		

Exercice 7 :

Parmi les réponses proposées, entourer dans chaque cas celle qui est correcte. Expliquer votre réponse

1° Le développement de $(9-x)^2$ est

$81-x^2$ $\quad$ $81-18x+x^2$ $\quad$ $81-18x-x^2$ $\quad$ $81-\cancel{18}x+x^2$ 9

$(9-x)^2 = (9-x)(9-x) = 81-9x-9x+x^2 = 81-18x+x^2$

2° L'expression $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ a pour forme factorisée

$\cancel{x^2-2x-8}$ $\quad$ $(x+2)+(x-4)$ $\quad$ $(x+2)(x-4)$ $\quad$ $(x+2)(-5x-5)$

$(x+1)(x+2)-5(x+2) = x^2+2x+x+2-5x-10 =$
x^2-2x-8

3° L'équation $4x = 3(10-x)$ a pour solution

23 $\quad$ 6 $\quad$ $\frac{30}{7}$ $\quad$ $-\frac{30}{7}$

$4x = 3(10-x)$
$4x = 30-3x$
$4x+3x = 30$
$7x = 30$

$x = \frac{30}{7}$

4° L'équation $(3-2x)(x-2) = 0$ a pour solution(s)

$\frac{2}{3}$ et 2 $\quad$ 2 $\quad$ $\frac{3}{2}$ et 2 $\quad$ $\frac{5}{3}$

$0 = (3-2x)(x-2)$
$0 = 3x-6-2x^2+4x$
$0 = 7x-6-2x^2$

$6 = 7x-2x^2$

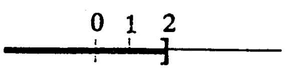
3° L'équation $(x+1)(x-3) = -3$ a pour solutions

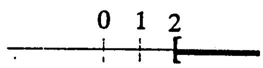
-1 et 3 $\quad$ -4 et 0 $\quad$ 0 et 2 $\quad$ 0 et 1

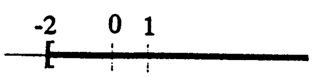
$(x+1)(x-3) = -3$
$x^2-3x+x-3 = -3$
$x^2+2x-3 = -3$

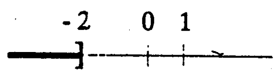
à terminer..

5° Les solutions de l'inéquation $3 - x \leq 1$ sont représentées en traits gras par

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

$3-x \leq 1$
$-x \leq \frac{1}{3}$

Exercice 8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

1 enfant 2d'employés = 4000
2em employé ayant 3 enfants = 12000

Le 1er employé ayant 2 enfants percevra
4000 x 2 = 8000

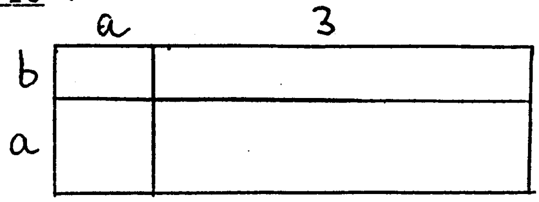
Le 3em employé ayant 4 enfants percevra
4000 x 4 = 16000

Exercice 9 :

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celle de droite (si c'est possible).

l'inverse de la somme des inverses de x et de et de y	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
la somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
la somme des carrés de x et de y	$2x - 3y$
le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	$x^2 + y^2$
la différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
l'inverse de la somme de x et de y	$\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
le carré de la somme de x et de y	$(x + y)^2$

Exercice 10 :



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle.** Justifier votre réponse.

$S = a + b(a + 3)$	$S = a^2b + 3ab$	$S = a + 3(a + b)$
$S = 3a^2b$	$S = (a + b)(3 + a)$	$S = 6ab + a^3b$
$S = a^2 + ba + 3b$	$S = ab + 3b + a^2 + 3a$	$S = 3ab + 3a^2$
$S = (a + 3)(b + a)$	$S = a^2 + ab$	$S = 3ab^2 + 3a^3$
$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$		

Exercice 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante :

$$(3 + 5n) \times 2 - 6$$

exercice 12 : MERIÈME

Soient trois nombres consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez le.

2 3 4

$3^2 - (2 \times 4) = 9 - 8 = 1$

Exercice 13:

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :

" Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 "

L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

Je prends le nombre 2

$2 + 8 = 10$

$10 \times 3 = 30$

$30 - 4 = 26$

$26 + 2 = 28$

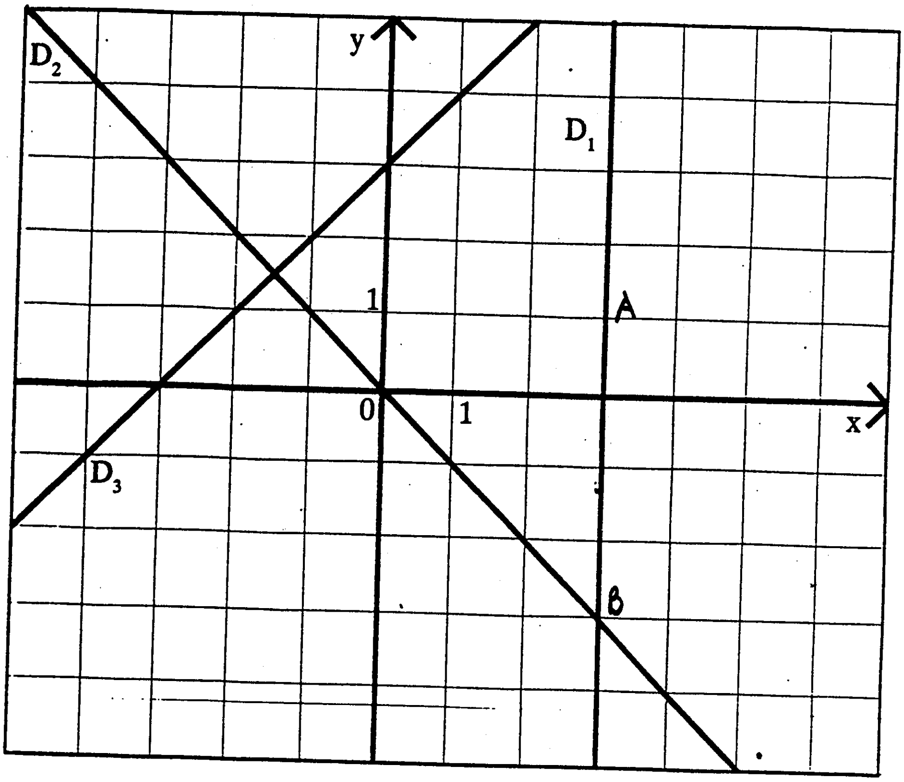
$28 \div 4 = 7$

$7 + 2 = 9$

$9 - 2 = 7$

L'affirmation est vrai

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

y = 3	x = 3
y = x	y = - x
y = 3 x	y = - 3 x
y = x - 3	y = x + 3
y = - x + 3	y = - x - 3

Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 : D_1 / A(3 ; 1) B(3 ; -3)

$y = ax + b$

$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-1}{3-3} \neq \frac{-4}{0} = 0$

j'utilise l'abscisse et l'ordonnée de A

$1 = (0 \times 3) + b$

$1 = b$

droite	équation de la droite
D_1	
D_2	
D_3	

Exercice 15 :

Indiquer si les égalités sont vraies ou fausses.

	Vrai/faux	Si faux, dire pourquoi
3 + m = 3m	Faux	Car 3 m = 3 x m et non 3 + m
ab = a + b	Faux	Car ab = a x b et non a + b
b - 2 x c = (b-2)c	Faux	Car on doit commencer par calculer la multiplicat
3 + 2m = 5m	Faux	Car on ne peut pas additionner avec 3 m

Exercice 16 :

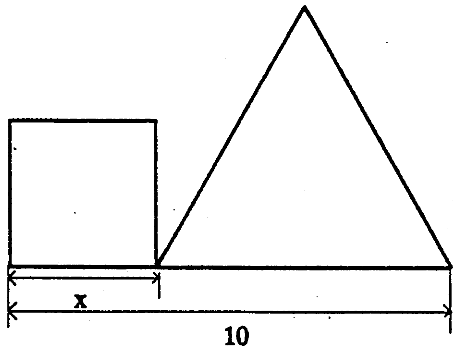
Ecrire une équation utilisant les variables E et P pour représenter la phrase suivante :

" Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée "

Utiliser E pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs.

E = P x 6

Exercice 17 :

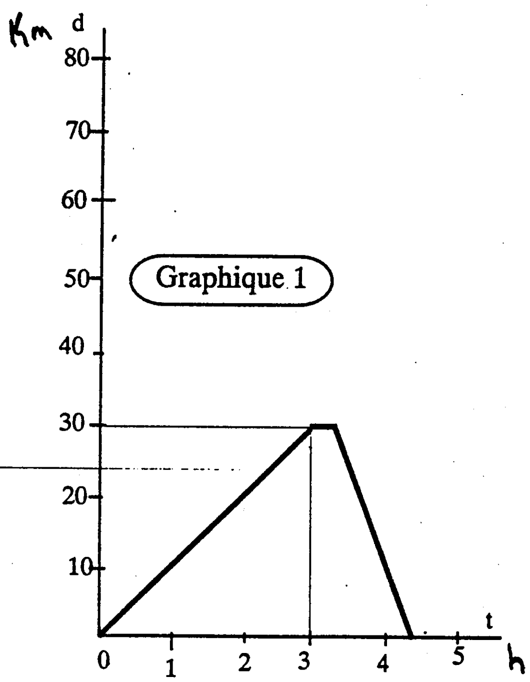


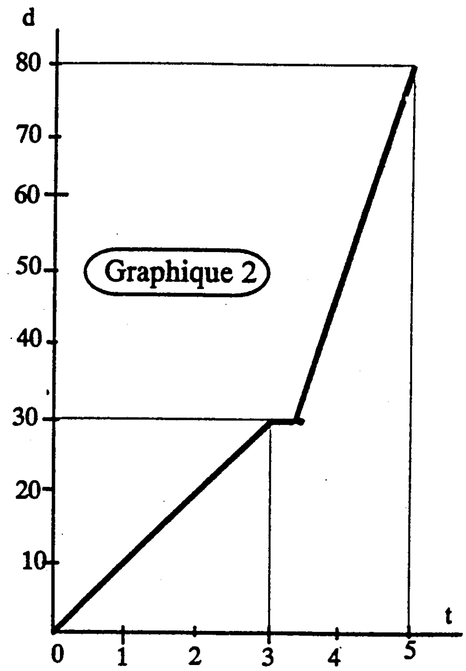
Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

Exercice 18

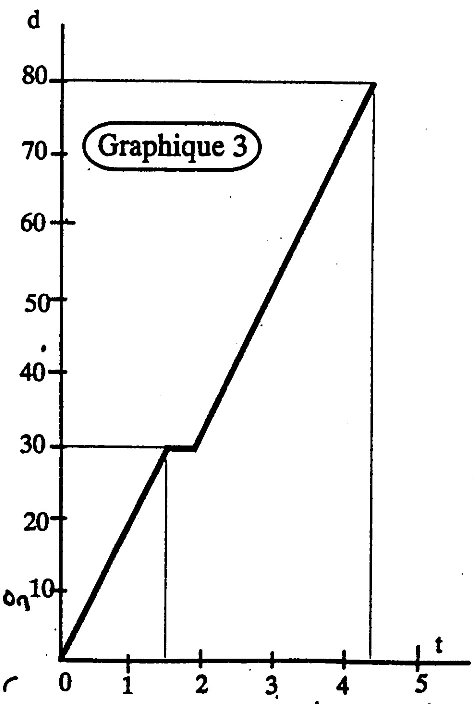
Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.





Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.



Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

Réponse :

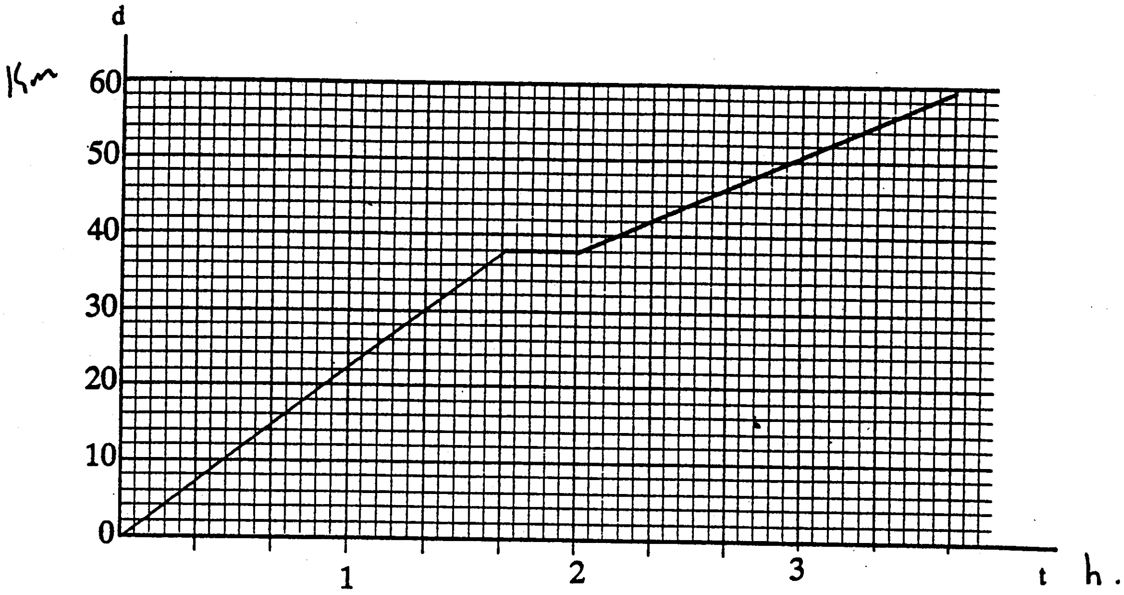
Graphique n° $\boxed{2}$

J'ai résolu ce problème par élimination

~~Car~~ ce n'est pas possible pour le 1er Car il ne peut pas effectuer moins de Km en continuant sa course et le 3em Car il n'a pas effectuer la vitesse de 10 Km/h.

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie.



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy.

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

Evaluation à l'entrée en Première G

NOM : **Prénom :** LUCIE

Exercice 1 :

Classer du plus petit au plus grand

-5,67; 13.10^2; 4,009; $56,71.10^{-1}$; 4,09; $0,67.10^3$; 4,1; 7/2+7/3

$-5,67$; 13000 ; $4,009$; $56,71 \times 1 = 56,71$; $4,09$; $0,67 \times 10000 = 6700$; $4,1$; $\frac{7}{2} + \frac{7}{3} = \frac{21}{6} + \frac{14}{6} = \frac{35}{6} = 5,83$.

Indiquer vos calculs intermédiaires.

$-5,67$; $4,009$; $4,09$; $4,1$; $5,83$; $56,71$; 6700 ; 13000

Exercice 2 :

Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires :

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec $a = -3$ $b = 4$

$C : \sqrt{-3^2 + 4^2} \Rightarrow -3^2 + 2 \cdot 3 \times 4 + 4^2 = -9 + 24 + 16 = 31 \Rightarrow C = \sqrt{31}$, $C = 5,567764$

$P = u + \frac{\pi}{2}u$ avec $u = 150$ $n = 6$

$P = 150 + \frac{6}{2} \times 150 \Rightarrow 150 + 3 \times 150 = 600$

$V = (-t^2 + 7x)^3$ avec $t = 3$ $x = 2$

$V = (-3^2 + 7 \times 2)^3$ $V = (5)^3$

$V = (-9 + 14)^3$ $V = 125$

Exercice 3 :

Est-il exact que :

	O/N	Commenter votre réponse
$-9^2 = -81$	N	$-9 \times -9 = 81$ $(- \times -) = +$
$(-9)^2 = -81$	N	les parenthèse ne change rien dans ce cas là.
$-9^2 = 81$	O	
$(-9)^2 = 81$	O	

Exercice 4 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout réel a ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$a^2 = a.a$	Vrai	
$a^2 = 2a$	faux	C'est "a" qui est à la puissance 2 et non le 2 qui multiplie "a"
$a^2 = a2$	faux	même chose
$a^2 = a+a$	faux	$a^2 = a \times a$ et $a+a$
$a^2 = axa$	Vrai	

Exercice 5 :

Développer et réduire

(a − b)(b − 2) − (b − 2)(2 − a) + (a − b)(a + b)

$(a\times b - a\times 2 - b^2 + b\times 2) - (b\times 2 - b\times a - 4 + 2\times a) + (a^2 + a\times b - b\times a - b^2)$

$a\times b - \cancel{2a} - b^2 + \cancel{2b} - \cancel{2b} - b\times a - 4 + \cancel{2a} + a^2 - 2ab - b^2$

$= 0 - 0 - 2b^2 - 0 - 4 + a^2 - 2ab$

$= -2b^2 - 4 + a^2 - 2ab$

Exercice 6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$x^2x^3 = x^5$	Vrai	
$x^2x^3 = x^6$	faux	car on additionne les puissances lorsque c'est une multiplication
$x^2+x^3 = x^5$	faux	Dans ce cas là on ne peut pas les additionner ni les multiplier
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	faux	même chose
$2x^2 = (2x)^2$	Vrai	
$(x^2)^3 = x^6$	Vrai	
$(x^2)^3 = x^5$	faux	on les multiplient

Exercice 7 :

Parmi les réponses proposées, entourer dans chaque cas celle qui est correcte. Expliquer votre réponse

1° Le développement de $(9-x)^2$ est

$81-x^2$ $\qquad$ $81-18x+x^2$ $\qquad$ $81-18x-x^2$ $\qquad$ $81+18x+x^2$

$(9-x)(9-x)$
$= 81 - 9x - x9 + x^2$
$= 81 - 18x + x^2$

$81 - 9x + x^2$

2° L'expression **(x+1)(x+2)-5(x+2)** a pour forme factorisée

x^2-2x-8 $\qquad$ $(x+2)+(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(-5x-5)$

$(x+1)(x+2)-5(x+2)$
$= (x+1)(x+2)-5.$
$= (x+2)(x+1-5)$
$= (x+2)(x-4)$

3° L'équation **4x = 3(10 - x)** a pour solution

23 $\qquad$ 6 $\qquad$ $\frac{30}{7}$ $\qquad$ $-\frac{30}{7}$

$4x = 30 - 3x$
$4x + 3x = 30$
$x = \frac{30}{7}$

4° L'équation **(3-2x)(x-2)=0** a pour solution(s)

$\frac{2}{3}$ et 2 $\qquad$ 2 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ et 2 $\qquad$ $\frac{5}{3}$

$(3-2x)(x-2)$
$= 3x - 6 - 2x^2 + 4x$
$= 3x - 2 - 2x^2$
$-3x+1x+1x = -2$

$-1x = -2$
$x = 2$

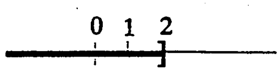
3° L'équation **(x+1)(x-3) = -3** a pour solutions

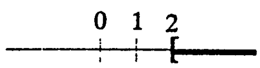
-1 et 3 $\qquad$ -4 et 0 $\qquad$ 0 et 2 $\qquad$ 0 et 1

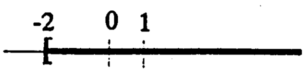
$x^2 - 3x + x - 3$
$3x - x - x^2 = -3$
$2x - x^2 = -3$

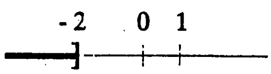
$9x$

5° Les solutions de l'inéquation **3 - x ≤ 1** sont représentées en traits gras par

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

Exercice 8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

$\frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{4} = 12000^F$

$A = \frac{2 \times 12000}{100} = 240^F$

$B = \frac{3 \times 12000}{100} = 360^F$

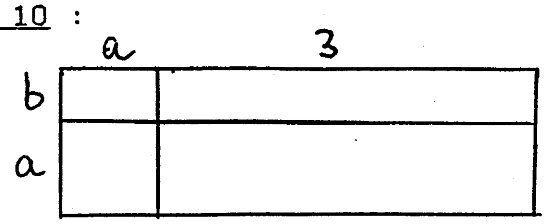
$C = \frac{4 \times 12000}{100} = 480^F$

Exercice 9 :

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celle de droite (si c'est possible).

l'inverse de la somme des inverses de x et de et de y	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
la somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
la somme des carrés de x et de y	$2x - 3y$
le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	$x^2 + y^2$
la différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
l'inverse de la somme de x et de y	$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$
le carré de la somme de x et de y	$(x + y)^2$

Exercice 10 :



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle. Justifier** votre réponse.

$S = a + b(a + 3)$ $S = a^2b + 3ab$ $S = a + 3(a + b)$

$S = 3a^2b$ $S = (a + b)(3 + a)$ $S = 6ab + a^3b$

$S = a^2 + ba + 3b$ $S = ab + 3b + a^2 + 3a$ $S = 3ab + 3a^2$

$S = (a + 3)(b + a)$ $S = a^2 + ab$ $S = 3ab^2 + 3a^3$

$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$

parce que pour trouver l'aire d'un rectangle on fait : Longueur x Largeur. C'est-à-dire

a + 2 x b + a

Exercice 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante :

$$(3 + 5n) \times 2 - 6$$

exercice 12 : LUCIE

Soient trois nombres consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez le.

1, 2, 3

$2^2 = 4$ $4 - 3 = 1$

$1 \times 3 = 3$

Avec n'importe quels nombres on trouvera toujours 1

Exercice 13:

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :

" **Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7** "

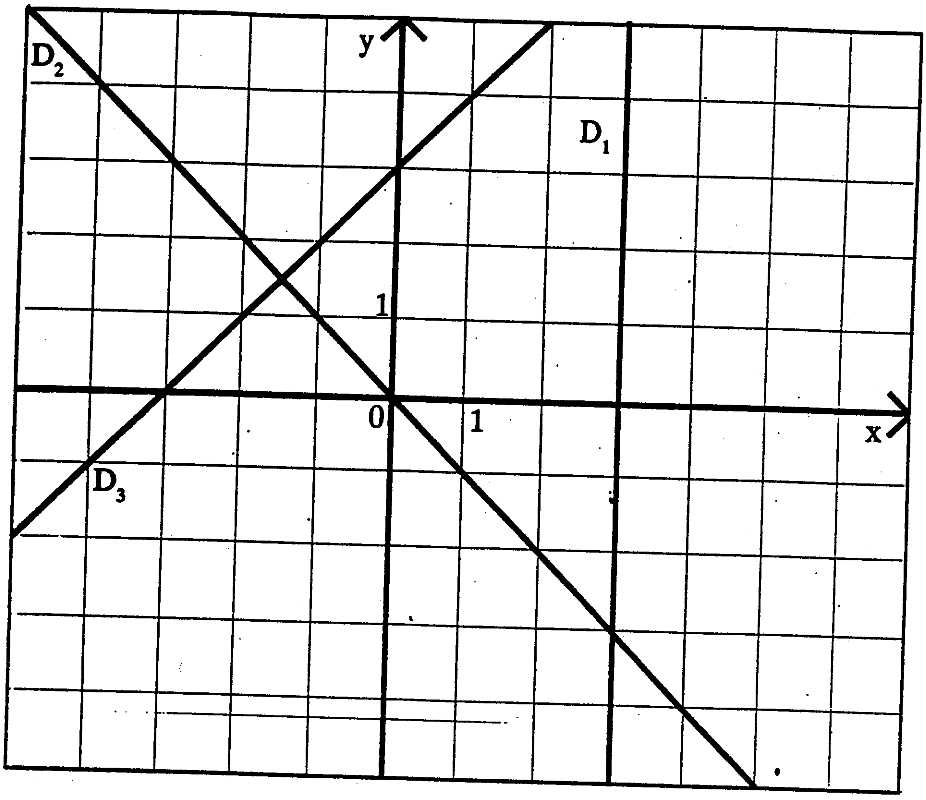
L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

Oui

Exemple prenons 2 :

$2 + 8 \times 3 - 4 + 2 \div 4 + 2 - 2 = 7$

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

y = 3	x = 3
y = x	y = - x
y = 3 x	y = - 3 x
y = x - 3	y = x + 3
y = - x + 3	y = - x - 3

Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 :

droite	équation de la droite
D_1	y = 3
D_2	
D_3	y = 3

Exercice 15 :

Indiquer si les égalités sont vraies ou fausses.

	Vrai/faux	Si faux, dire pourquoi
$3 + m = 3m$	F	pour qu'il y ait 3 m il aurait fallut multiplier 3 par m.
$ab = a + b$	F	$ab = a \times b$
$b - 2 \times c = (b-2)c$	V	
$3 + 2m = 5m$	F	non on peut pas additionner 3 + 2 m car ils n'ont pas la même puissance

Exercice 16 :

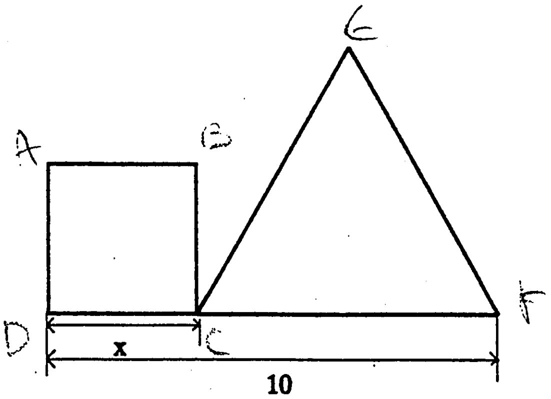
Ecrire une équation utilisant les variables E et P pour représenter la phrase suivante :

" Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée "

Utiliser E pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs.

6E + P

Exercice 17 :



Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

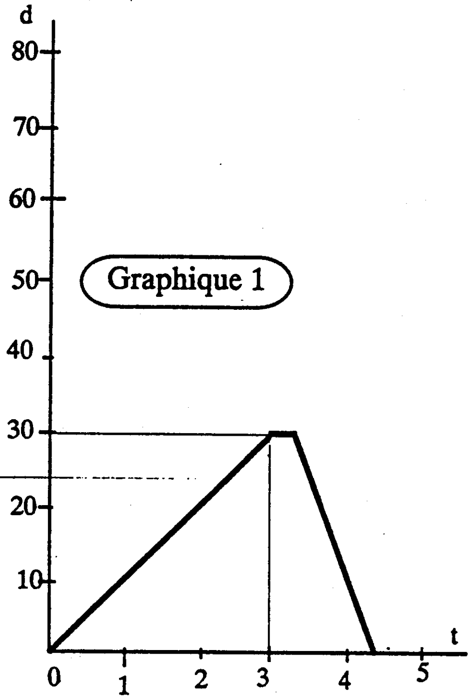
$10 - x = DC$ $\qquad$ $CF = 10 - x$

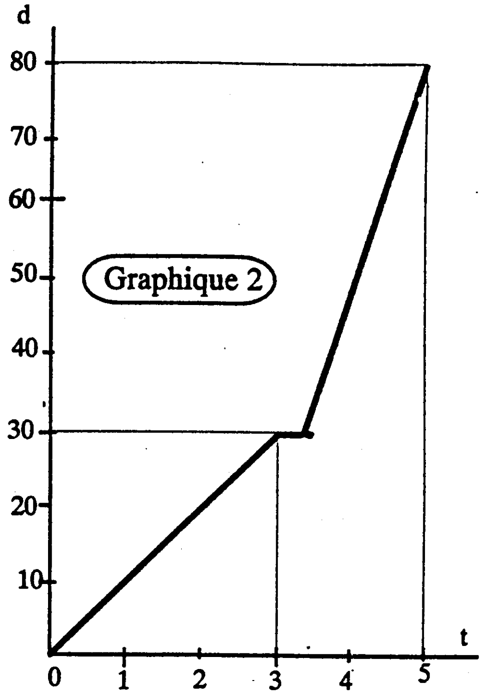
$ABCD = 4(10 - x)$ $\qquad$ $CEF = 3(10 - x)$

Exercice 18

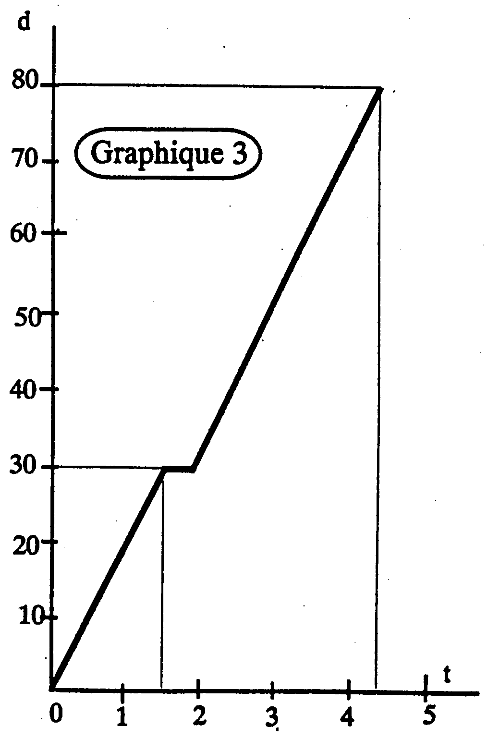
Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.





Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.



Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

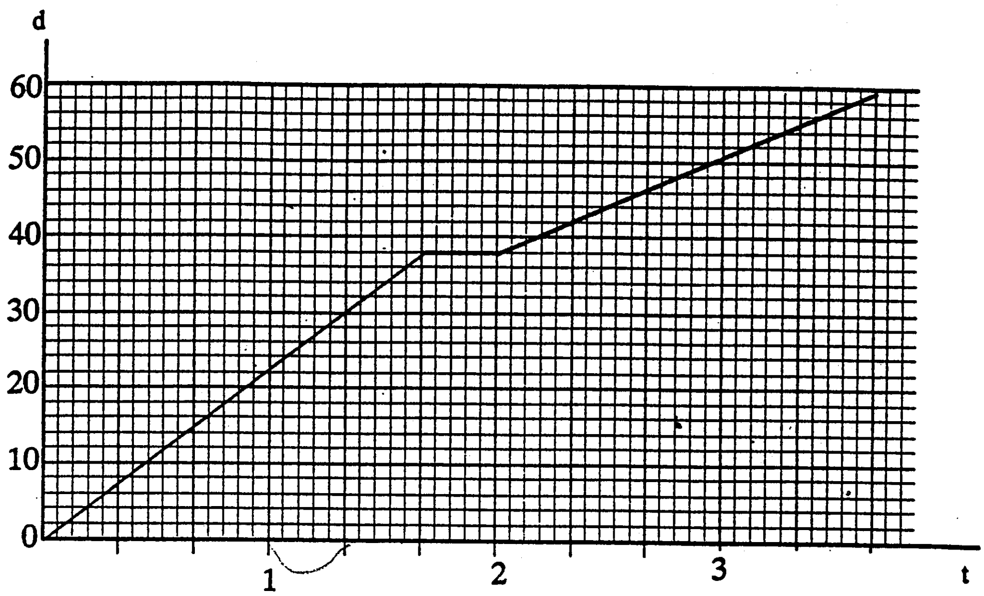
Réponse :

Graphique n° 3

je ne peux pas commenter

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy. 1 heure et demie

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

Exercice 19 :

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150^F le voyage aller et retour.

Elle consent aux étudiants une réduction de20% du prix du billet.

D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400^F par an, on paie le billet à moitié prix.

A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?

$A \xleftrightarrow{150^F} B$

$$\frac{150 \times 20}{100} = 120^F$$

* Tarif étudiants 120^F

* $120 \div 2 = 60$

$1400 \div 60 = 23,33$ voyages

Evaluation à l'entrée en Première G

NOM : **Prénom :** Philippe

Exercice 1 :

Classer du plus petit au plus grand

-5,67; 13.10^2; 4,009; $56,71.10^{-1}$; 4,09; $0,67.10^3$; 4,1; 7/2+7/3

Indiquer vos calculs intermédiaires.

-5,67 ; 0,017 ; 0,02 ; 4,009 ; 4,09 ; 4,10 ; 5,83 ; ~~177~~,01.

Exercice 2 :

Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires :

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec a = -3 b = 4

$C = \sqrt{-3^2+4^2} = \sqrt{-9+16} = \sqrt{7} = 2,65$

$C = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16}$

$\sqrt{25} = 5$

$P = u + \frac{n}{2}u$ avec u = 150 n = 6

$P = 150 + \frac{6}{2} + 150 = 3$

$P = 150 + \frac{6}{2} \times 150 = 600$

$V = (-t^2 + 7x)^3$ avec t = 3 x = 2

$V = (-3^2+7\times2)^3 = (-9+14)^3 = 125$

Exercice 3 :

Est-il exact que :

	O/N	Commenter votre réponse
$-9^2 = -81$	O	Parce que c'est à la puissance 2 dont $-9\times9 = -81$.
$(-9)^2 = -81$	N	Parce que au carré 2 dont (- et - = +) $-9\times-9 = 81$.
$-9^2 = 81$	N	parce que à la puissance 2 $-9\times9 = -81$
$(-9)^2 = 81$	O	parce que au carré 2 moins et moins deviennent plus $9\times9 = 81$.

Exercice 4 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout réel a ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$a^2 = a.a$	VRAi	
$a^2 = 2a$	FAUX	
$a^2 = a2$	FAUX	
$a^2 = a+a$	FAUX	parce-que a^2 c'est une multiplication
$a^2 = axa$	VRAi	

Exercice 5 :

Développer et réduire

(a - b)(b - 2) - (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)

$(ab - 2a)(b^2 - 2b) + (b2 - ba)(4 + 2a) - (a^2 - ab)(ba - b^2)$

Exercice 6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$x^2x^3 = x^5$	FAUX	parce-que c'est une puissance qui se multiplie
$x^2x^3 = x^6$	VRAI	
$x^2+x^3 = x^5$	VRAI	
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	VRAI	
$2x^2 = (2x)^2$	FAUX	parce-que $2x^2$ c'est pour une multiplication alors quand entre parenthèse le résultat sera une addition $(2x)^4$
$(x^2)^3 = x^6$	FAUX	
$(x^2)^3 = x^5$	VRAI	

Exercice 7 :

Parmi les réponses proposées, entourer dans chaque cas celle qui est correcte. Expliqiter votre réponse

1° Le développement de $(9-x)^2$ est

$81-x^2$ $\qquad$ $81-18x+x^2$ $\qquad$ $81-18x-x^2$ $\qquad$ $81-\overset{9}{\cancel{18}}x+x^2$

2° L'expression **(x+1)(x+2)-5(x+2)** a pour forme factorisée

x^2-2x-8 $\qquad$ $(x+2)+(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(-5x-5)$

3° L'équation **4x = 3(10 - x)** a pour solution

23 $\qquad$ 6 $\qquad$ $\frac{30}{7}$ $\qquad$ $-\frac{30}{7}$

4° L'équation **(3-2x)(x-2)** $=0$ a pour solution(s)

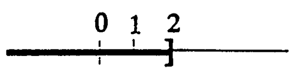
$\frac{2}{3}$ et 2 $\qquad$ 2 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ et 2 $\qquad$ $\frac{5}{3}$

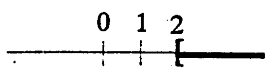
3° L'équation **(x+1)(x-3) = -3** a pour solutions

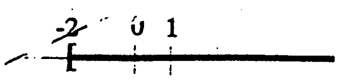
-1 et 3 $\qquad$ -4 et J $\qquad$ 0 et 2 $\qquad$ 0 et 1

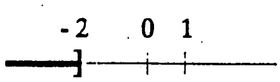
Franchement je ne sais plus.

5° Les solutions de l'inéquation **3 - x ≤ 1** sont représentées en traits gras par

☐ 

☐ 

☒ 

☐ 

Exercice 8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

$$A = 12\,000 \times \frac{2}{3} = 8\,000\text{ F}$$

$$B = 8\,000 \times \frac{3}{2} = 12\,000\text{ F}$$

$$C = 12\,000 \times \frac{4}{3} = 16\,000\text{ F}$$

$$(A+B+C) = 36\,000\text{ F}..$$

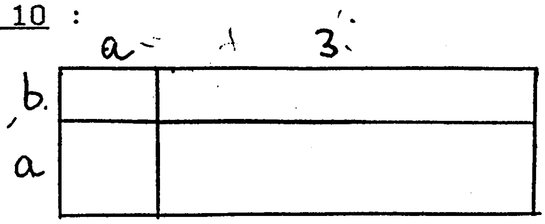
Exercice 9 :

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celle de droite (si c'est possible).

l'inverse de la somme des inverses de x et de et de y	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
la somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
la somme des carrés de x et de y	$2x - 3y$
le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	$x^2 + y^2$
la différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
l'inverse de la somme de x et de y	$\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$
le carré de la somme de x et de y	$(x + y)^2$

Je ne comprend pas.

Exercice 10 :



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle. Justifier** votre réponse.

$S = a + b(a + 3)$	$S = a^2b + 3ab$	$S = a + 3(a + b)$
$S = 3a^2b$	$S = (a + b)(3 + a)$	$S = 6ab + a^3b$
$S = a^2 + ba + 3b$	$S = ab + 3b + a^2 + 3a$	$S = 3ab + 3a^2$
$S = (a + 3)(b + a)$	$S = a^2 + ab$	$S = 3ab^2 + 3a^3$
$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$		

Exercice 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante :

$$(3 + 5n) \times 2 - 6$$

on multiplie n par 5 puis on additionne 3
on multiplie le tout par 2 et on soustrait le tout par 6.

exercice 12 :

Philippe

Soient trois nombres consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez le.

Je ne sais plus faire

Exercice 13:

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :

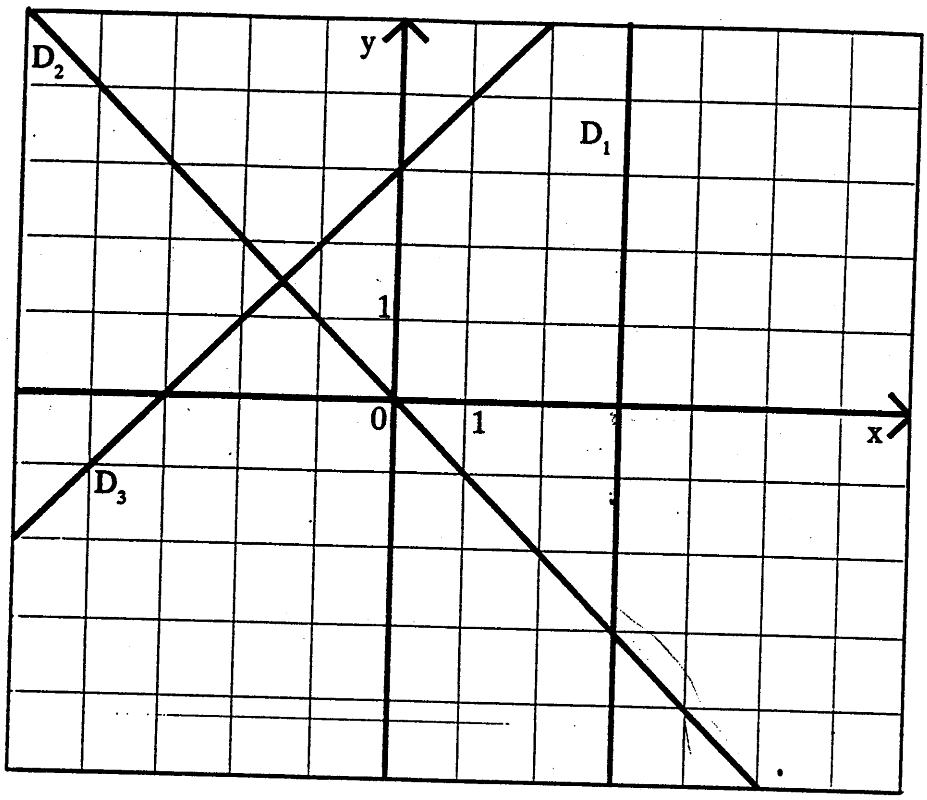
" Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 "

L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

l'affirmation suivante n'est pas vraie parce-que en prenant 2 le résultat est de 21,5.

$(2+8\times3-4+2\div4+2-2=21,50)$.

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

$y = 3$	$x = 3$
$y = x$	$y = -x$
$y = 3x$	$y = -3x$
$y = x - 3$	$y = x + 3$
$y = -x + 3$	$y = -x - 3$

Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 :

droite	équation de la droite
D_1	$y = x + 3$ $x = 3$
D_2	$y = -x + 3$
D_3	$y = -3x$

Δ b² = -4ac

Exercice 15 :

Indiquer si les égalités sont vraies ou fausses.

	Vrai/faux	Si faux, dire pourquoi
3 + m = 3m	VRAI	
ab = a + b	FAUX	Parce-que ça veut dire a x b
b - 2 x c = (b-2)c	FAUX	Je ne sais pas.
3 + 2m = 5m	VRAI	

Exercice 16 :

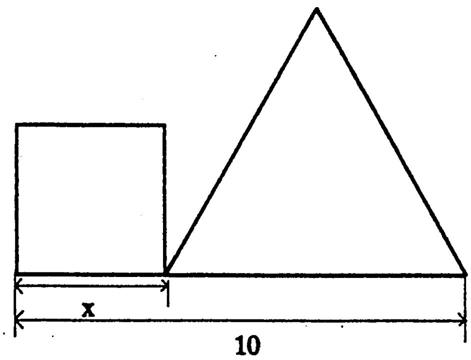
Ecrire une équation utilisant les variables E et P pour représenter la phrase suivante :

" Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée "

Utiliser E pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs.

$a = \frac{E}{P}$

Exercice 17 :



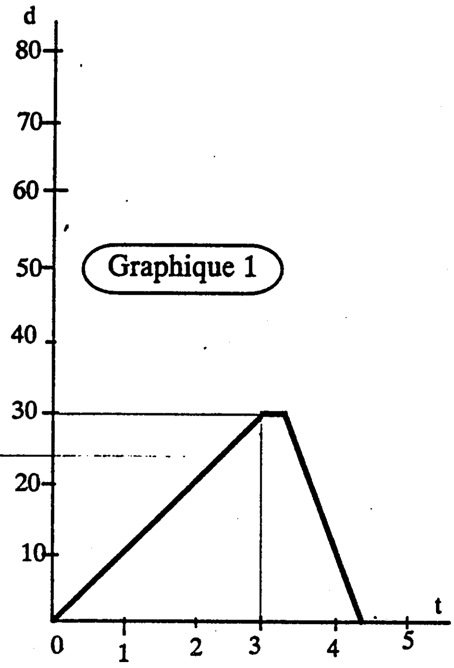
Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

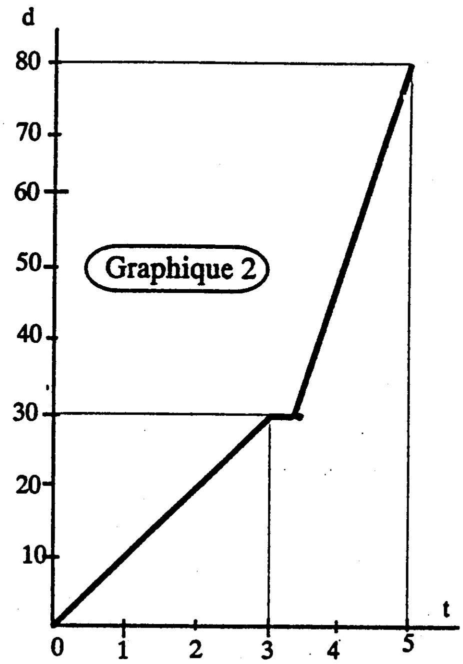
Je ne sais pas le faire ça fait trop longtemps. que je l'ai vu.

Exercice 18

Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.



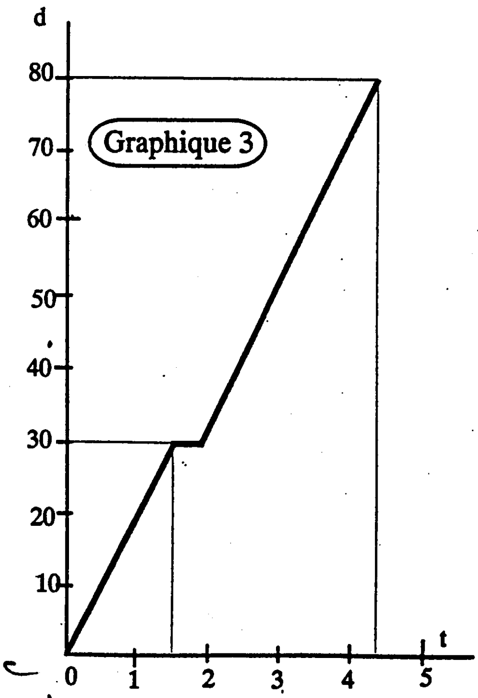


Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.

Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

Réponse :

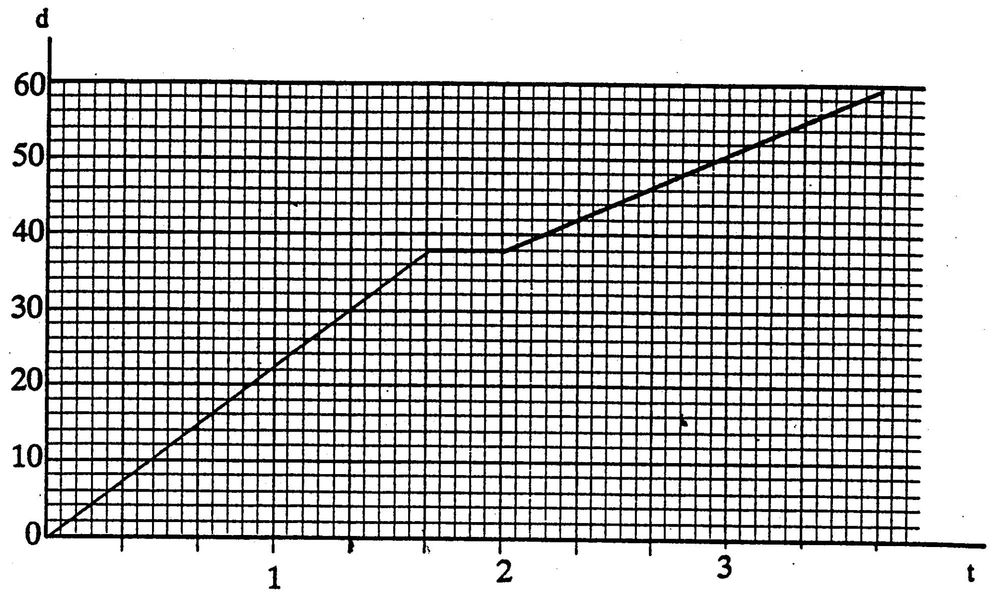
Graphique n° $\boxed{2}$



Si il effectue 30 km en 3 heures
c'est à dire qu'il a effectué 1 heure
en 10 km après une pause de 20 minutes
il a effectué 80 km en 5 heures car
après une vitesse chronométrée à 10 km/h
il a doublé sa vitesse dont 30 km/h
car après un col c'est une descente sur Oloron.

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie.



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy.

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

Exercice 19 :

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150F le voyage aller et retour.

Elle consent aux étudiants une réduction de20% du prix du billet.

D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400F par an, on paie le billet à moitié prix.

A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?

Evaluation à l'entrée en Première G

NOM : **Prénom :** FRÉDERIC

Exercice 1 :

Classer du plus petit au plus grand

-5,67; 13.10²; 4,009; 56,71.10⁻¹; 4,09; 0,67.10³; 4,1; 7/2+7/3

Indiquer vos calculs intermédiaires.

Ne comprend pas les écritures.

Exercice 2 :

Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires :

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec a = -3 b = 4

$c = \sqrt{3^2 + 4^2} =$
$c = \sqrt{9+16} \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$

$P = u + \frac{n}{2}u$ avec u = 150 n = 6

$P = 150 + \frac{6}{2} \times 150 \Rightarrow P = 150 + 3 \times 150 = 600$

$V = (-t^2 + 7x)^3$ avec t = 3 x = 2

$V = (-3^2 + 7x)^3 \Leftrightarrow V = (5)^3 =$
$V = 5 \times 5 \times 5 = 125$
$V = 125.$

Exercice 3 :

Est-il exact que :

	O/N	Commenter votre réponse
$-9^2 = -81$	O	car il y a un calcul à la puissance² et on ne considère que -9 est multiplier à +9.
$(-9)^2 = -81$	N	-9 entre parathèse à la puissance est égal -9×-9.
$-9^2 = 81$	N	car il y a un seule moins donc le résultat doit être négatif
$(-9)^2 = 81$	O	on considère que -9 entre parathèse à la puissance 2 le calcul -9×-3 donc - + - = +.

Exercice 4 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout réel a ?

	Vrai/Faux	**Si faux, dire pourquoi**
$a^2 = a.a$		
$a^2 = 2a$		
$a^2 = a2$		
$a^2 = a+a$		
$a^2 = a \times a$		

Cela ne dit plus rien.

Exercice 5 :

Développer et réduire

$(a - b)(b - 2) - (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$

$a - b \times b - 2 - b - 2 \times 2 - a + a - b \times a + b =$

$a - a + a - \cancel{b \times b}\ b \times b - b + b - 2 - 2 \times 2 =$

$a - ba - b^2 + 8.$

Exercice 6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	**Si faux, dire pourquoi**
$x^2x^3 = x^5$	FAUX	$x^2 \times x^3 = 6$, car les puissances se multiplie entre : $2 \times 6 = 6$.
$x^2x^3 = x^6$	VRAIE	
$x^2+x^3 = x^5$	VRAI	
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	VRAI	
$2x^2 = (2x)^2$	FAUX	Si on prend nombre le résultat est différent ex : $2 \times 2^2 = 8$; $(2 \times 2)^2 = 16$.
$(x^2)^3 = x^6$	~~FAUX~~ VRAIE	
$(x^2)^3 = x^5$	FAUX	

Exercice 7 :

Parmi les réponses proposées, entourer dans chaque cas celle qui est correcte. Expliquer votre réponse

1° Le développement de $(9-x)^2$ est

$81-x^2$ $\qquad$ $81-18x+x^2$ $\qquad$ $81-18x-x^2$ $\qquad$ $81-\cancel{18}^{9}x+x^2$

Cela me dit plus rien

2° L'expression $\mathbf{(x+1)(x+2)-5(x+2)}$ a pour forme factorisée

x^2-2x-8 $\qquad$ $(x+2)+(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(-5x-5)$

3° L'équation $\mathbf{4x = 3(10 - x)}$ a pour solution

23 $\qquad$ 6 $\qquad$ $\frac{30}{7}$ $\qquad$ $-\frac{30}{7}$

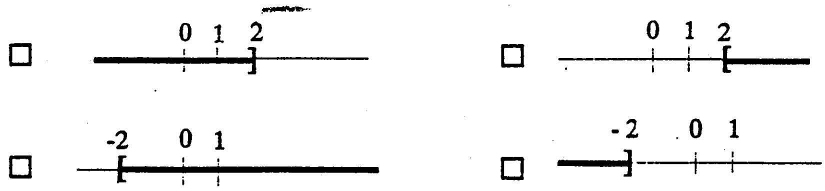
4° L'équation $\mathbf{(3-2x)(x-2)}$ $=0$ a pour solution(s)

$\frac{2}{3}$ et 2 $\qquad$ 2 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ et 2 $\qquad$ $\frac{5}{3}$

3° L'équation $\mathbf{(x+1)(x-3) = -3}$ a pour solutions

-1 et 3 $\qquad$ -4 et 0 $\qquad$ 0 et 2 $\qquad$ 0 et 1

5° Les solutions de l'inéquation $\mathbf{3 - x \leq 1}$ sont représentées en traits gras par



Exercice 8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

Somme	A	12000	C
Enfant	2	3	4

A = 12000 × 2 ÷ 3 = 8000
A = 8000
C = 12000 × 4 ÷ 3 = 16000
C = 16000

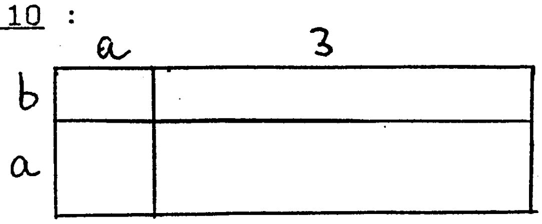
DIFFICULTÉ

Exercice 9 :

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celle de droite (si c'est possible).

l'inverse de la somme des inverses de x et de et de y	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
la somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
la somme des carrés de x et de y	$2x - 3y$
le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	$x^2 + y^2$
la différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
l'inverse de la somme de x et de y	$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$
le carré de la somme de x et de y	$(x + y)^2$

Exercice 10 :



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle. Justifier** votre réponse.

$S = a + b(a + 3)$ $\quad$ $S = a^2b + 3ab$ $\quad$ $S = a + 3(a + b)$

$S = 3a^2b$ $\quad$ $S = (a + b)(3 + a)$ $\quad$ $S = 6ab + a^3b$

$S = a^2 + ba + 3b$ $\quad$ $S = ab + 3b + a^2 + 3a$ $\quad$ $S = 3ab + 3a^2$

$S = (a + 3)(b + a)$ $\quad$ $S = a^2 + ab$ $\quad$ $S = 3ab^2 + 3a^3$

$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$

Exercice 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante :

$$(3 + 5n) \times 2 - 6$$

MODE EXP
P1
1 (x)
RUN
SHIFT Min
[
3
+
5
×
n
]
×
2
−
6

exercice 12 : FREDERIC

Je suis

Soient trois nombres consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez le.

pollué par la 4e et 3e technologique et le R.E.P. Acc. (compta)

Exercice 13:

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :

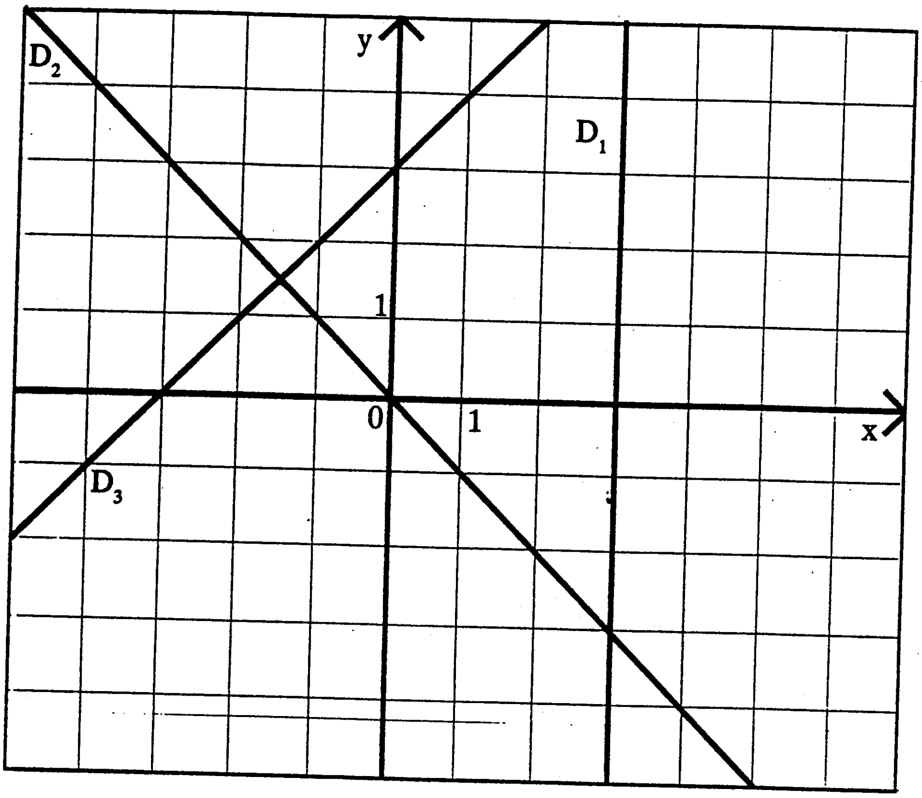
" Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 "

L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

elle n'est pas vraie car les résultat trouvé sont tous supérieur à 7

(2 +8) x3 (- - 2) ÷ 4 (+ 2 - 2) :

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

$y = 3$	$x = 3$
$y = x$	$y = -x$
$y = 3x$	$y = -3x$
$y = x - 3$	$y = x + 3$
$y = -x + 3$	$y = -x - 3$

Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 :

droite	équation de la droite
D_1	
D_2	
D_3	

Exercice 15 :

Indiquer si les égalités sont vraies ou fausses.

	Vrai/faux	Si faux, dire pourquoi
3 + m = 3m	VRAI	
ab = a + b	FAUX	ab = a×b.
b - 2 x c = (b-2)c	VRAI	
3 + 2m = 5m	FAUX	car 3 et 2m ne font de la même famille des entiers.

Exercice 16 :

Ecrire une équation utilisant les variables É et P pour représenter la phrase suivante :

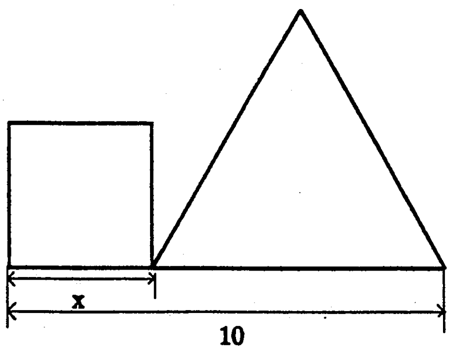
" Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée "

Utiliser É pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs.

$\frac{É}{P}$

Exercice 17 :

Je ne connais pas

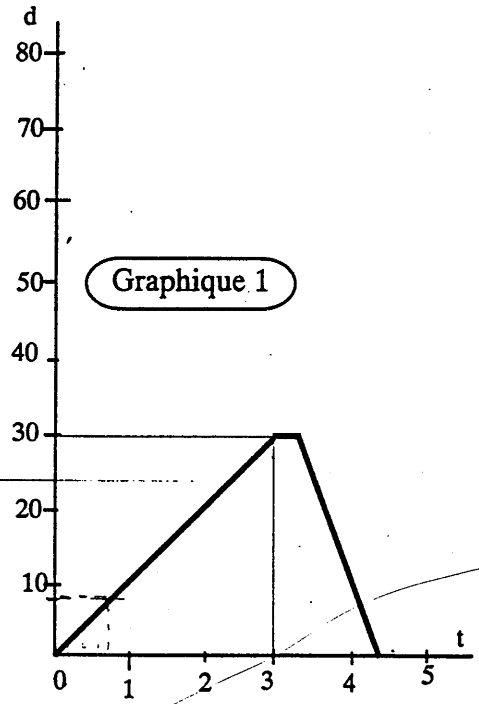


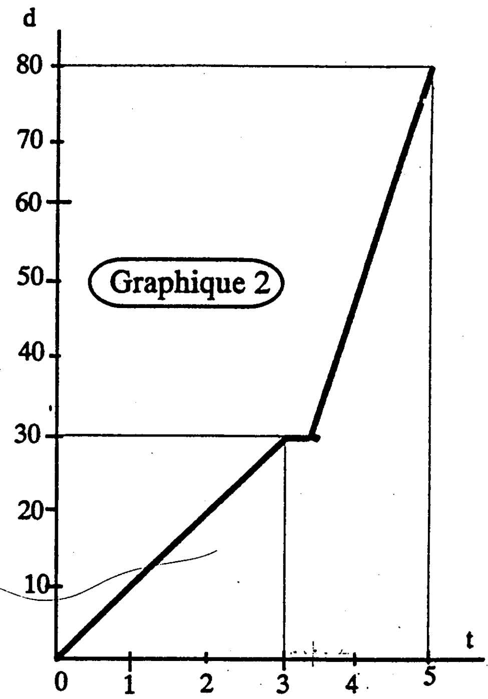
Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

Exercice 18

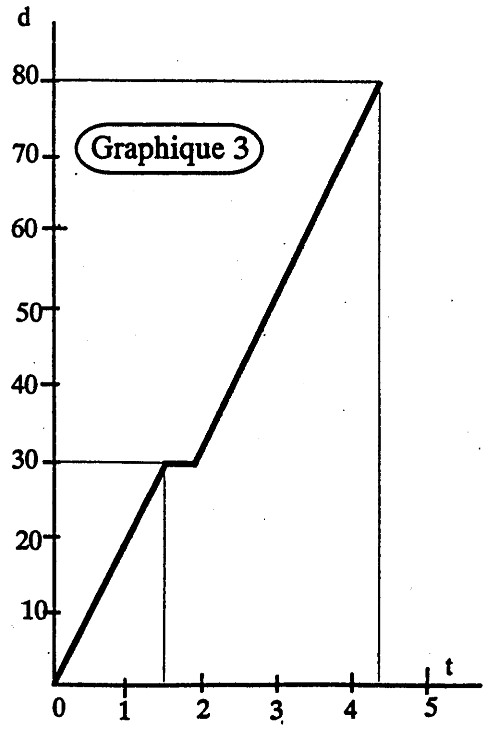
Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gazost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.





Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.



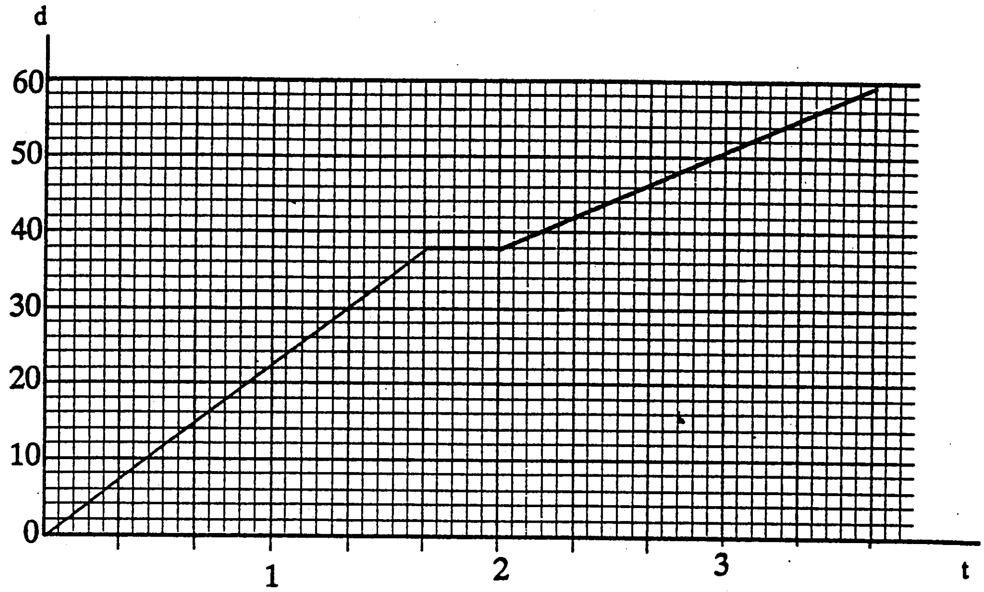
Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

Réponse :

Graphique n° ☐

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie.



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy.

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

Exercice 19 :

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150F le voyage aller et retour.

Elle consent aux étudiants une réduction de20% du prix du billet.

D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400F par an, on paie le billet à moitié prix.

A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?

Evaluation à l'entrée en Première G

NOM : **Prénom :** VIRGINIE

Exercice 1 :

Classer du plus ~~petit~~ au plus grand

~~-5~~,67;13.10²;4,009; 56,71.10⁻¹; $\boxed{4,09}$; 0,67.10³; 4,1; 7/2+7/3

1300 5,671 670 8,883333

Indiquer vos calculs intermédiaires.

13 . 10² = 1300 . - 56,71 . 10⁻¹ = 5,671 . 7/2 + 7/3

-5 ; 4 ; 4,09 ; 4,1 ; 5,671 , 8,833... = 3,5 + 2,33....

009 ; 67 , 1300. = 8,833....

Exercice 2 :

Calculer C, P, V en indiquant les calculs intermédiaires :

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ avec a = -3 b = 4

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$ $C = \sqrt{9+16}$

$C = \sqrt{(-3)^2 + b^2}$ $C = \sqrt{25}$

$C = 5$

$P = u + \frac{n}{2}u$ avec u = 150 n = 6

$P = 150 + \frac{6}{2}.150 = \frac{150}{} + \frac{900}{2} \quad \frac{150}{} + \frac{900}{2} \quad \frac{300}{2} + \frac{900}{2} = 600$

$V = (-t^2 + 7x)^3$ avec t = 3 x = 2

$V = (-3^2 + 7.2)^3$ $V = 125$

$V = (-9 + 14)^3$

$V = (5)^3$

Exercice 3 :

Est-il exact que :

	O/N	Commenter votre réponse
$-9^2 = -81$	O	
$(-9)^2 = -81$	N	car on ne ~~peut~~ mettre au carré un nombre négatif
$-9^2 = 81$	N	le résultat doit être négatif
$(-9)^2 = 81$	O	

Exercice 4 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout réel a ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$a^2 = a.a$	vrai	
$a^2 = 2a$	faux	a^2 : cela signifie que a est x par lui même
$a^2 = a2$	faux	
$a^2 = a+a$	faux	a^2 : signifie une multiplicatio.
$a^2 = axa$	vrai	

Exercice 5 :

Développer et réduire

$(a - b)(b - 2) - (b - 2)(2 - a) + (a - b)(a + b)$

$(a.b - 2a).(ab - 2a) - (2b - b.a)(2b$

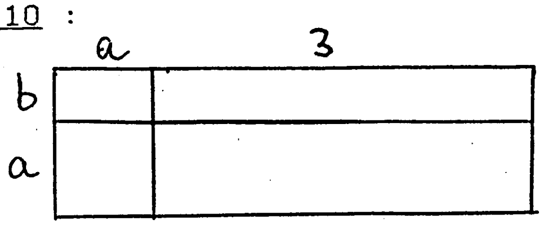
Je ne me rappelle plus

Exercice 6 :

Chacune des égalités est-elle vraie, pour tout x ?

	Vrai/Faux	Si faux, dire pourquoi
$x^2x^3 = x^5$	faux	
$x^2x^3 = x^6$	vrai	
$x^2+x^3 = x^5$	faux	
$4x^2+3x^3 = 7x^5$	faux	
$2x^2 = (2x)^2$	vrai	
$(x^2)^3 = x^6$	vrai	
$(x^2)^3 = x^5$	faux	

Exercice 10 :



Parmi les expressions suivantes, **entourer celle ou toutes celles qui donne(nt) l'aire S de ce rectangle. Justifier** votre réponse.

$S = a + b(a + 3)$ $\quad S = a^2b + 3ab$ $\quad S = a + 3(a + b)$

$S = 3a^2b$ $\quad S = (a + b)(3 + a)$ $\quad S = 6ab + a^3b$

$S = a^2 + ba + 3b$ $\quad S = ab + 3b + a^2 + 3a$ $\quad S = 3ab + 3a^2$

$S = (a + 3)(b + a)$ $\quad S = a^2 + ab$ $\quad S = 3ab^2 + 3a^3$

$S = 3a \times 3b \times a^2 \times ba$

l'aire du rectangle est égale à L x l

ce qui signifie dans le rectangle d'aire S

Exercice 11 :

Expliciter l'enchaînement des opérations (le programme de calcul) permettant d'obtenir à partir du nombre n l'expression suivante :

$$(3 + 5n) \times 2 - 6$$

Exercice 8 :

Un patron décide de partager une part de son bénéfice entre trois de ses employés, proportionnellement à leur nombre d'enfants soit 2, 3 et 4. Le second employé a reçu 12000^F. Calculer les sommes perçues par les deux autres. Expliciter votre démarche.

pas eut le temps.

Exercice 9 :

Relier par des flèches les écritures de la colonne de gauche et les formules de celle de droite (si c'est possible).

l'inverse de la somme des inverses de x et de et de y	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
la somme des opposés des carrés de x et de y	$(x-y)(-5)$
la somme des carrés de x et de y	$2x - 3y$
le produit de la différence de x et de y par l'opposé de 5	$x^2 + y^2$
la différence du double de x et du triple de y	$-(x^2+y^2)$
l'inverse de la somme de x et de y	$\dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$
le carré de la somme de x et de y	$(x + y)^2$

Exercice 7 :

Parmi les réponses proposées, entourer dans chaque cas celle qui est correcte. Expliquer votre réponse

1° Le développement de $(9-x)^2$ est

$81-x^2$ $\qquad$ $81-18x+x^2$ $\qquad$ $81-18x-x^2$ $\qquad$ $81-9x+x^2$

2° L'expression $(x+1)(x+2)-5(x+2)$ a pour forme factorisée

x^2-2x-8 $\qquad$ $(x+2)+(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(x-4)$ $\qquad$ $(x+2)(-5x-5)$

Je m'en rappelle plus

3° L'équation $4x = 3(10 - x)$ a pour solution

23 $\qquad$ 6 $\qquad$ $\frac{30}{7}$ $\qquad$ $-\frac{30}{7}$

4° L'équation $(3-2x)(x-2)=0$ a pour solution(s)

$\frac{2}{3}$ et 2 $\qquad$ 2 $\qquad$ $\frac{3}{2}$ et 2 $\qquad$ $\frac{5}{3}$

Je ne me rappelle plus.

3° L'équation $(x+1)(x-3) = -3$ a pour solutions

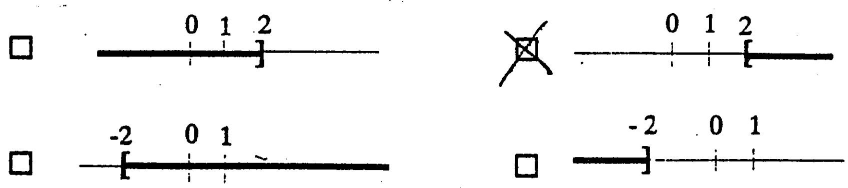
-1 et 3 $\qquad$ -4 et 0 $\qquad$ 0 et 2 $\qquad$ 0 et 1

$(x+1)(x-3) = -3.$

je ne me rappelle plus

$x \geqslant 2$

5° Les solutions de l'inéquation $3 - x \leq 1$ sont représentées en traits gras par



exercice 12 :

VIRGINIE

Soient trois nombres consécutifs. On calcule la différence entre le carré du deuxième nombre et le produit du premier et du troisième. Que constatez-vous ? Justifiez le.

3 ; 4 ; 5

$4^2-(3\times 5)$

$16-15$

1

$(x+1)^2-(x\times(x+2)$

x^2+1-x^2+2x

Exercice 13:

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :

" Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 "

L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

l'affirmation suivante est exacte.

justification

$258+8=266$

$266\times 3=798$

$798-4=794$

$794+258=1052$

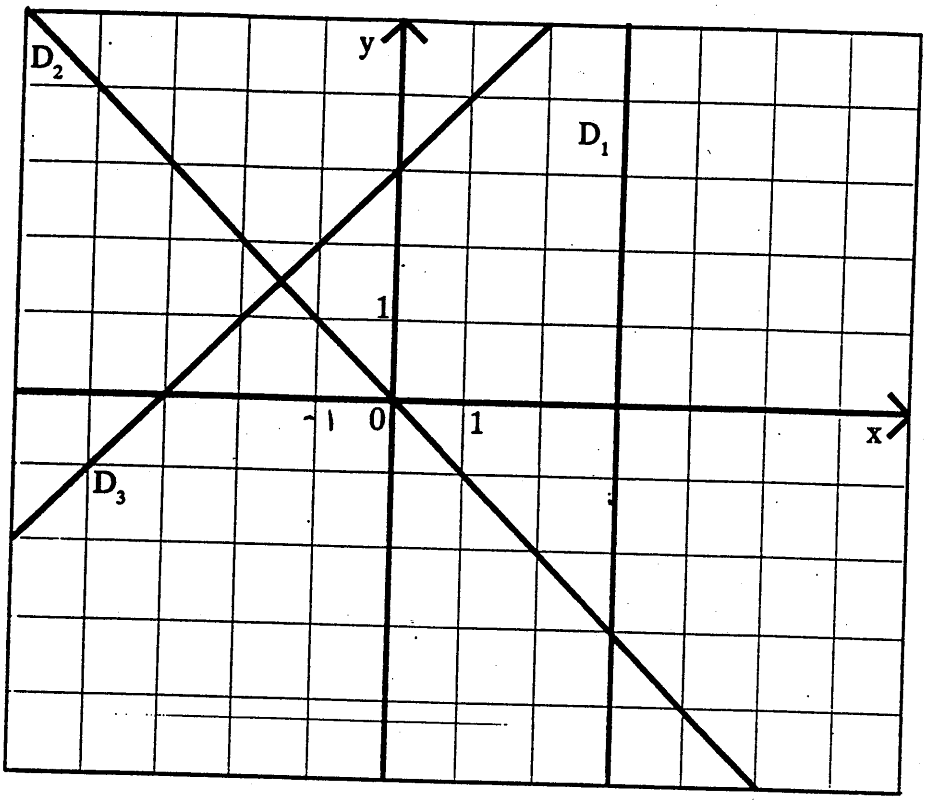
$1052\div 4=263$

$263+2=265$

$265-258=7$

$[(x+8)\times 3]-4+x/4+2-x$

Exercice 14



Voici une liste d'équations :

$y = 3$
$y = x$
$y = 3x$
$y = x - 3$
$y = -x + 3$

$x = 3$
$y = -x$
$y = -3x$
$y = x + 3$
$y = -x - 3$

Choisir dans cette liste une équation pour chacune des droites D_1, D_2 et D_3 :

droite	équation de la droite
D_1	x=3
D_2	
D_3	

Exercice 15 :

Indiquer si les égalités sont vraies ou fausses.

	Vrai/faux	Si faux, dire pourquoi
$3 + m = 3m$	faux	un chiffre ne peut être calculer avec un nombre
$ab = a + b$	faux	
$b - 2 \times c = (b-2)c$	vrai	
$3 + 2m = 5m$	vrai	

Exercice 16 :

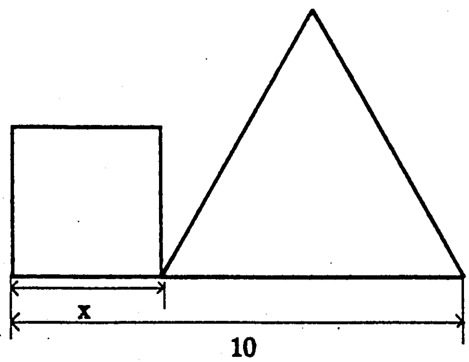
Ecrire une équation utilisant les variables E et P pour représenter la phrase suivante :

" Il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce lycée "

Utiliser E pour le nombre d'élèves et P pour le nombre de professeurs.

$P = E \times 6$

Exercice 17 :



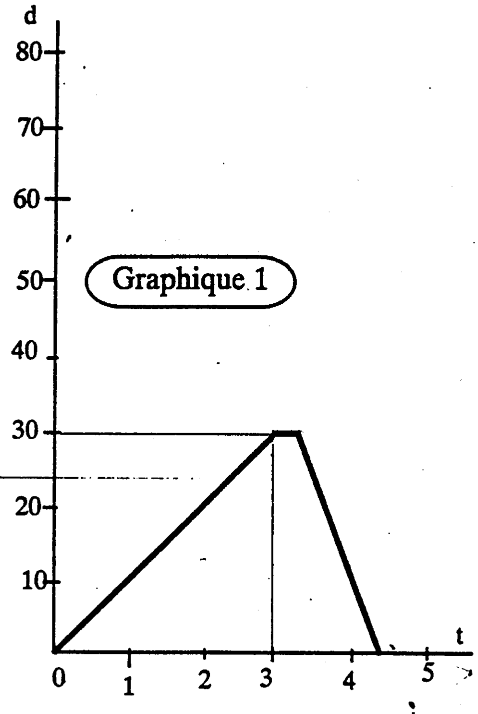
Je ne sais plus

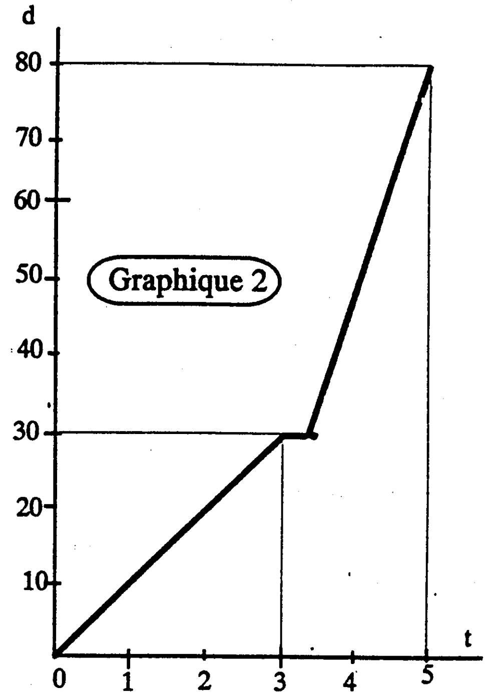
Déterminer x de sorte que le carré et le triangle équilatéral aient le même périmètre.

Exercice 18

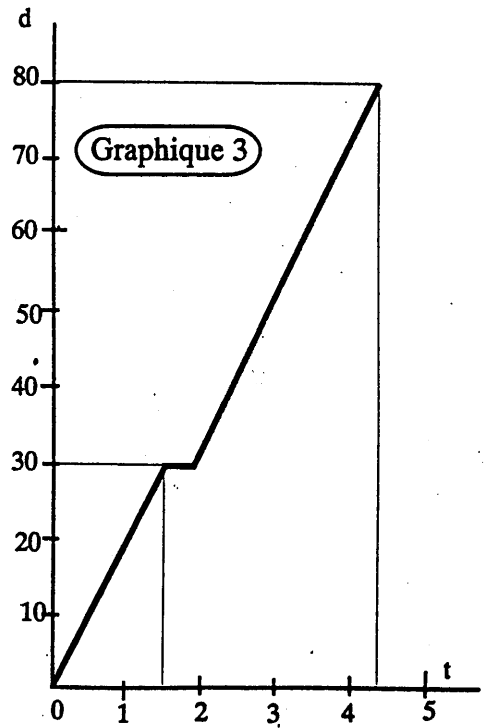
Dans cet exercice, les questions 2° a) et 2° b) peuvent être traitées même si l'on n'a pas répondu à la question 1.

1° Un cycliste part d'Argelès-Gázost pour aller à Oloron Sainte Marie, distants de 80 km, en passant par le col de l'Aubisque.
Il effectue la montée du col à la vitesse de10 km/h. Après une pause de 20 minutes en haut du col, il descend sur Oloron à la vitesse de 30 km/h.





Sur l'un des graphiques de cette page, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ.



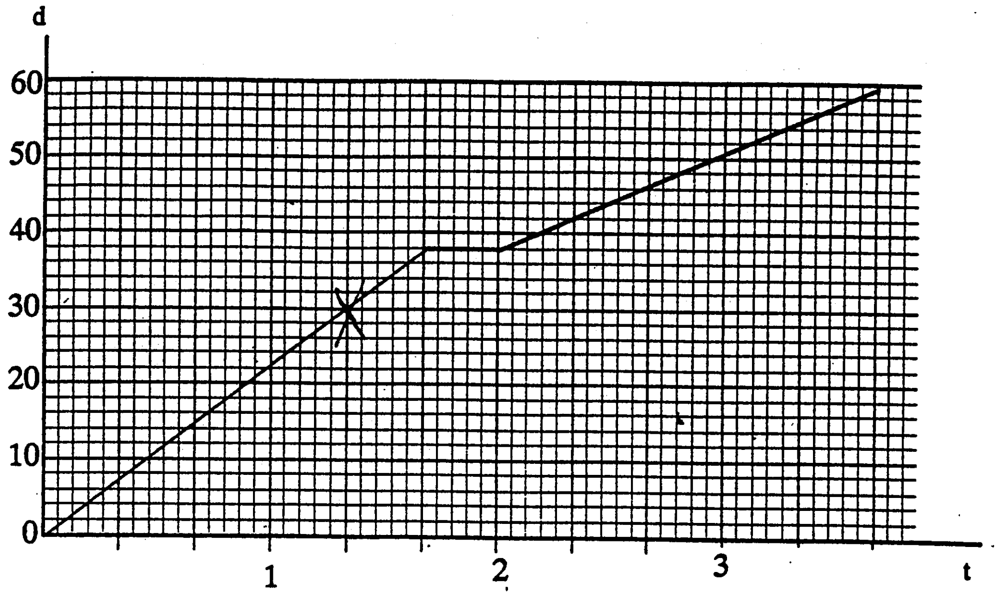
Quel est le graphique représentant la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps ?
Commenter votre réponse

Réponse :

Graphique n° 1

2° Arrivé à Oloron Sainte Marie, le cycliste poursuit sa route en direction de Pau en faisant un crochet par Arudy.

Sur le graphique suivant, on a porté la distance d (en km) parcourue par le cycliste en fonction du temps t (en heures) écoulé depuis son départ d'Oloron Sainte Marie.



a) Arudy se trouve à 30 km d'Oloron Sainte Marie.
Faire apparaître sur le graphique ci-dessus le temps t mis par le cycliste pour atteindre Arudy. il a mit 1h25

b) Entre quelles valeurs de t la distance d parcourue depuis Oloron Sainte Marie par le cycliste est-elle proportionnelle au temps t ?

je ne sais pas faire

Exercice 19 :

Une compagnie d'autocars relie deux villes A et B pour le prix de 150F le voyage aller et retour.

Elle consent aux étudiants une réduction de20% du prix du billet.

D'autre part, il existe une formule d'abonnement : pour 1400F par an, on paie le billet à moitié prix.

A partir de quel nombre annuel de voyages est-il rentable de prendre l'abonnement ?

$150 - 20\% = 30.$

$120 \times 19 = 1440$ fr

Au bout de 19 voyage c'est interessant de prendre la formule

Annexe IV

Les productions des élèves :séances-repères de l'année 1992-1993

Caroline 5/2/13

Questionnaire

1) Les deux expressions $\frac{((a+4)3+a)}{4}$ et a+3 sont-elles égales ?

Expliquez votre réponse.

$$\frac{((a+4)3+a)}{4} = \frac{3a}{4} + \frac{12}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{4a}{4} =$$

2) Un élève multiplie un nombre par 5 et ajoute 12 au résultat. Il soustrait alors au résultat le nombre initial et divise le résultat par 4. Il remarque qu'il obtient un nombre supérieur de 3 au nombre initial.
IL dit : "Je pense que cela arrivera, quelque soit le nombre initial".
Est ce vrai ? Justifiez votre réponse.

~~Soit x le nombre inconnu~~ Soit 2 le nombre inconnu

$2 \times 5 = 10$; $10 + 12 = 22$; $22 - 2 = 20$; $20 : 4 = 5$

Oui, cela arrivera, quelque soit le nombre initial car quand on prend un chiffre au hasard on est obligé de trouver un nombre superieur de 3 au nombre initial.

3) Vous avez à résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4x - 2y = -10 \end{cases}$

Un camarade vous propose la résolution suivante :

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ -4x - 2(-2x + 5) = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ -4x + 4x - 10 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 0x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4x - 2y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ -4x = -10 + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = +\frac{10}{4} \cancel{+} \frac{-2y}{4} \end{cases}$$

Que pensez vous de cette résolution (stratégie, méthode et résultat) ?

Sa strategie est le Pivot de Gauss, elle a soustrait la L2 - L1 donc la methode est bonne mais le resultat est faut car x n'est pas egale à 0 et y n'est pas egale à 5 car la resolution n'est pas finie.

CAROLINE

15/3

Questionnaire

I. 1) Les écritures suivantes désignent-elles le même polynôme du second degré ? Justifier votre réponse.

$-2(x-3)(x+1)$; $-2x^2+4x+6$; $-2(x-1)^2+8$

$-2(x^2+x-3x-3)$

$-2x^2-2x+6x+6$

$-2x^2+4x+6$

$-2(x-1)(x-1)+8$

$-2(x^2-x-x+1)+8$

$-2x^2+2x+2x-2+8$

$-2x^2+4x+6$

OUI

2) Lorsque x vaut 3, quelle expression choisissez-vous pour calculer la valeur du polynôme ? justifie-et faire le calcul.

$f(3) = -2\times(3)^2+4\times3+6$

$= -2\times9+12+6$

$= -18+12+6$

$f(3) = 0$

$-2(3-3)(3+1)$

$-2(9+\cancel{3}-\cancel{3}-3)$

-2

II. Un élève multiplie un nombre par 5 et soustrait 12 au résultat. Il soustrait alors au résultat le nombre initial et divise le résultat par 4. Il affirme que le nombre obtenu est inférieur de 3 au nombre initial, et ceci, quel que soit le nombre initial.
Est ce vrai ? Démontrer le.

Soit 2 le nombre inconnu

$2\times5=10$; $12-10=2$; $2-2=0$; $0:4=0$

CAROLINE

QUESTIONNAIRE

1.1.a) Indiquer un processus de calcul permettant d'obtenir $x^2 - (10-x)^2$ à partir d'un nombre x.

On prend le nombre x ; ce nombre est mis au carré ; ~~10~~ x est soustrait à ~~x~~ 10 ; le resultat est mit au carré ~~et ensuite on soustrait $x^2 - (10-x)^2$ et on trouve le resultat~~. et on enlève à ce nouveau nombre ~~ce~~ le carré du nombre x

1.b) Calculer le résultat obtenu pour 5.

$f(5) = (5)^2 - (10-5)^2$ $= 25 - (100-50-50+25)$ $f(5) = 0$

$= 25 - (10-5)(10-5)$ $= 25 - 25$

2.a) Proposer un autre processus de calcul permettant d'obtenir, à partir de tout nombre x, le même résultat qu'avec le processus de calcul initial.

$5^2 = 25$; $10-5 = 5$; $5^2 = 25$; $25 - 25 = 0$

3 a) La relation $y = x^2 - (10-x)^2$ est-elle vérifiée en remplaçant x et y respectivement par 4 et -10 ? Justifiez

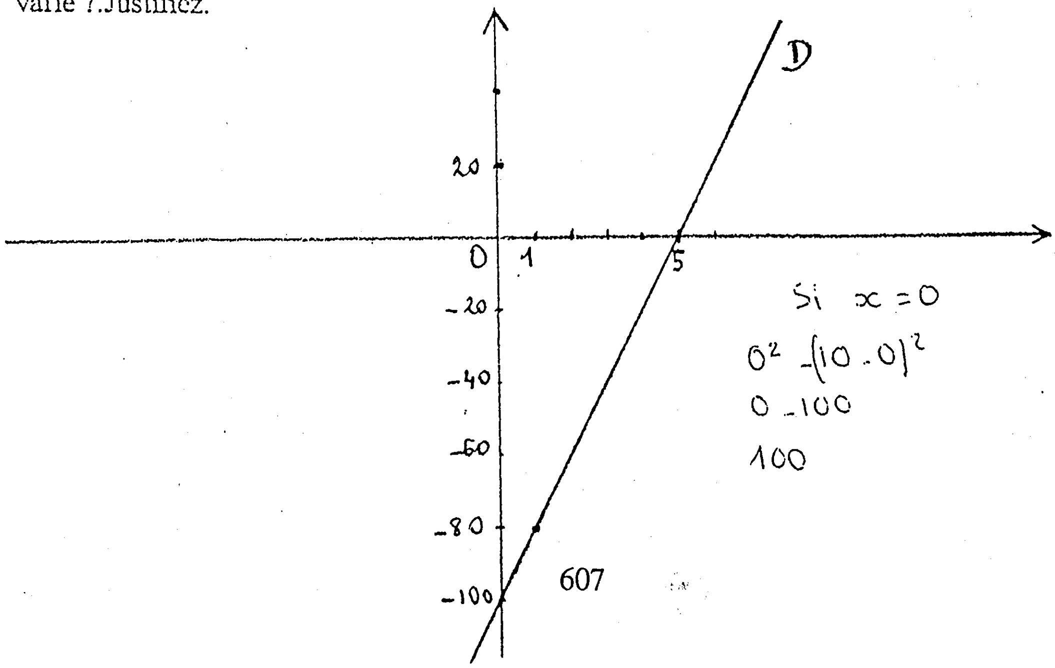
$-10 = (4)^2 - (10-4)^2$ $-10 = 8 - (100-40-40+16)$

$-10 = 8 - (10-4)(10-4)$ $-10 = 8 - 36$

$-10 = -28$ NON

3.b) Existe-t-il des nombres permettant d'obtenir -5 comme résultat ? Si oui, lesquels ? Justifiez.

4. Soit C la fonction numérique qui à tout nombre x associe $x^2 - (10-x)^2$
Est-il vrai que la droite D représentée ci dessous est l'ensemble des points M(x,C(x)) lorsque x varie ?.Justifiez.



Si $x = 0$

$0^2 - (10-0)^2$

$0 - 100$

100

CAROLINE

II. Soit A : x ----> $2x^2 - 20x + 100$.

1. Les trois écritures suivantes désignent-elles A(x) ?

$x^2 - (10-x)^2$	$(x-10)^2 - x^2$	$2(x-5)^2 + 50$
$x^2 - (10 - x)(10 - x)$	$(x-10)(x-10) + x^2$	$2(x-5)(x-5) + 50$
$x^2 - (100 - 10x - 10x + x^2)$	$x^2 - 10x - 10x + 100 + x^2$	$2(x^2 - 5x - 5x + 25) + 50$
$\cancel{x^2} - 100 + 10x + 10x - \cancel{x^2}$	$2x^2 - 20x + 100$	$2x^2 - 10x - 10x + 50 + 50$
$-100 + 20x$	VRAI	$2x^2 - 20x + 100$
FAUX		VRAI

2. Quelle expression choisissez-vous pour calculer A(5) ? Expliquez et calculez A(5).

Je prend l'expression developpée

$2x^2 - 20x + 100 = 2 \times (5)^2 - 20 \times 5 + 100$

$= 50 - \cancel{100} + \cancel{100}$

$A(5) = 50$

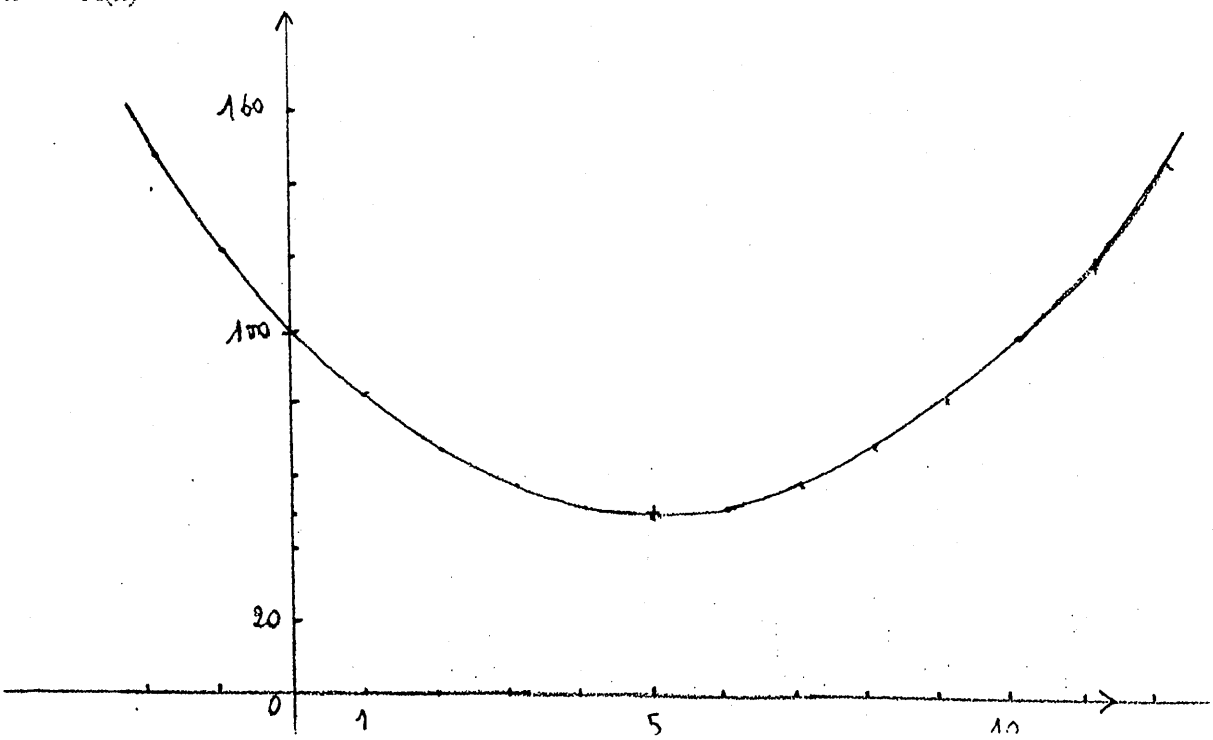
3. Existe-il des valeurs de x pour lesquelles A(x) s'annule ?

$2(-3)^2 - 20 \times (-3) + 100$	$2(-2)^2 - 20 \times (-2) + 100$	$2(1)^2 - 20 \times (1) + 100$	$2(2)^2 - 20 \times (2) + 100$	$2(3)^2 - 20 \times (3) + 10$
$(-3)^2 = 18 - (-60) + 100$	$8 + 40 + 100$	$2 - 20 + 100$	$8 - 40 + 100$	$18 - 60 + 100$
$18 + 60 + 100$	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX
FAUX				

4 Résolvez l'équation A(x) = 0.

par le temps [illegible] (verifier)

Expliquez comment vous vérifiez ces réponses en exploitant la représentation graphique de la fonction x ---> A(x)



CAROLINE

7/05/93 Travail en mathématiques

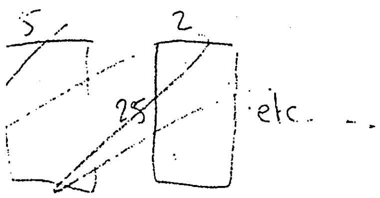
Contexte :

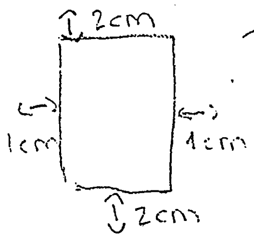
On veut fabriquer un cadre pour afficher des photos. On a déjà acheté 50 cm de baguette d'encadrement pour faire le cadre. On veut laisser en haut et en bas une marge de 2 cm et de chaque côté une marge de 1 cm.
On veut déterminer les dimensions du cadre pour que la surface disponible (affichable) soit la plus grande possible.

En fait, le problème se ramène au problème mathématique suivant:
Déterminer les dimensions d'un rectangle de 50 cm de périmètre pour que l'aire de la partie centrale de ce rectangle (c'est à dire l'aire du rectangle privé de marges comme définies plus haut) soit maximale.

I. Existe-t-il plusieurs rectangles ayant un périmètre de 50 cm? Donner des exemples. oui

$(L+\ell) \times 2$





P = 50cm

$2(L+\ell) = 50$

$2(20+5) = 50$

II. On désire résoudre le problème initial.
Proposez une résolution en essayant d'expliquer la stratégie utilisée, les différentes étapes, les calculs mis en jeu, le raisonnement.

III.1 Voici une étape de la résolution. Explicitez avec soin les étapes de calcul ou de raisonnement qui n'apparaissent pas.

Mise en équation du problème:
Soient x et y les dimensions en cm du cadre.

x et y vérifient l'égalité: $2(x+y)=50$

Soit A l'aire (en cm²) du cadre privé des marges:

$A=(x-2)(y-4)$

soit $A=(x-2)(21-x)$

$2(x-2)+(y-4)=50$

$2x-4+y-4=50$

$2x-8+y=50$

$2x-8+y=50$

$2x+y=50-8$

$2x+y=42$

$(x-2)$ = c'est la longueur en cm - les 2cm de marge

$(y-4)$: c'est la largeur en cm - les 4 cm de marge

$A=(x-2)(y-4)$

$=xy-4x-2y+8$

III.2 L'aire A dépend des dimensions du cadre. On considère la fonction a qui à tout nombre x de l'intervalle [2;21] associe l'aire A, soit a : x ----> (x-2)(21-x)
Indiquez comment vous étudiez cette fonction pour rechercher les dimensions du cadre pour que l'aire du cadre privé des marges soit maximale.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
19	18	17	16	15	14	13	12	11	10										

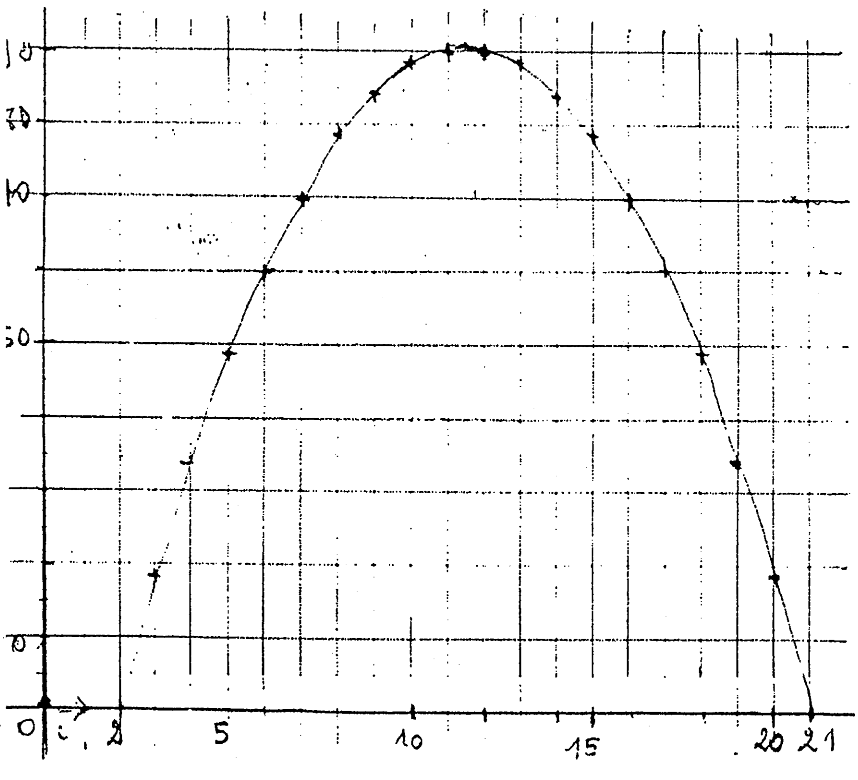
III.3 L'aire A dépend de x et on a défini $a(x) = (x-2)(21-x)$
Les expressions suivantes sont-t-elles égales? justifiez rapidement chaque réponse à l'aide d'un calcul ou d'indices pertinents.

$(x-2)(21-x)$	$x-2(21-x)$	$-x^2+23x+42$	$(x-11,5)^2-90,25$
$21x - x^2 - 42 + 2x$	$x - 42 + 2x$		$(x-11,5)(x-11,5) - 90,25$
$-x^2 + 23x - 42$			$x^2 - 11,5x - 11,5x + 132,25$
			$- 90,25$
			$x^2 - 23x + 42$

'lles ne sont pas egales !

La fonction x ---> -2x+23 est-t-elle la fonction dérivée de la fonction a : x ---> (x-2)(21-x) ? Justifiez.

III.4 On considère la fonction a : x ----> (x-2)(21-x)
a) Voici la courbe représentative C de la fonction a dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'équation $y = (x-2)(21-x)$
Interprétez la courbe C pour conjecturer le sens de variation de la fonction a sur l'intervalle [2;21].



b) Prouvez cette conjecture.

CAROLINE

4 Juin 1993

Questionnaire

I Une entreprise fabrique des chaises.
Les charges se répartissent en charges fixes : 7 500 F par mois et en charges variables : 12 F par mois et par chaise.
Calculer le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois.
Conjecturer comment varie le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois. Prouver votre conjecture.

Charges fixes : 7500 F /mois
variables : 12 F /mois /chaise

Soit x le nombre de chaises fabriqués par mois

$$\frac{7500 + 12x}{x} = \frac{7512}{x}$$

II Pour tout réel x non nul, on pose $C(x) = \frac{7500 + 12x}{x}$

Les expressions suivantes sont-elles égales à $C(x)$?

$\frac{7500}{x} + \frac{12}{1}$; $\frac{7500 + 12}{x}$; 7512 ; $12x + 7500 \times \frac{1}{x}$

$\frac{7512}{x}$ Non $\quad$ $\frac{7512}{x}$ Non $\quad$ Non $\quad$ $\frac{12x + 7500}{x}$ oui

III. On définit la fonction C par : $C(x) = \frac{7500 + 12x}{x}$

Etudier le sens de variation de C sur l'intervalle $[1 ; 1000]$

Comparer avec le résultat de la question I

On remarque que le coût d'un article diminu en fonction du nombre d'article par exemple quand l'entreprise fabrique 1000 articles et bien le coût d'un article ~~coute~~ est de 20 F tandis que pour 100 articles son cout est ~~d'environ~~ de 87 F.

x	1	500	1000
$C(x)$	↗		↘

$C(x)\ \frac{7500 + 12x}{x}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u' = 7512$

$v' = 1$

$C'(x)\ \frac{7512(x) - (7500 + 12x)1}{x^2}$

$C'(x) = \frac{7512x - (7500 + 12x)}{x^2} = \frac{7512x - 7500 - 12x}{x^2}$

$C'(x) : \frac{\cancel{7500} - \cancel{7500}}{x^2} = x^2$

ALICE

Questionnaire

1) Les deux expressions $\frac{(a+4)(3+a)}{4}$ et a+3 sont-elles égales ?

Explíquez votre réponse.

$3a+a^2+12+4a$

$\frac{a^2+7a+12}{12}$

2) Un élève multiplie un nombre par 5 et ajoute 12 au résultat. Il soustrait alors au résultat le nombre initial et divise le résultat par 4. Il remarque qu'il obtient un nombre supérieur de 3 au nombre initial.
IL dit : "Je pense que cela arrivera, quelque soit le nombre initial".
Est ce vrai ? Justifiez votre réponse.

le nombre est 2.

$2 \times 5 = 10$
$10 + 12 = 22$
$22 - 2 = 20$
$20 : 4 = 5$
$5 - 2 = 3$

si on donne une valeur et qu'on effectuent toutes les opération il semble que sont affirmation soit fondée mais on ne peut pas le prouver.

le nombre x $\frac{(5x+12)-x}{4} = x+3$

$\frac{(2x+12)-..}{4} = x+3.$

Il faut donner x comme nombre initial et calculer

3) Vous avez à résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4x - 2y = -10 \end{cases}$

Un camarade vous propose la résolution suivante :

$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ -4x - 2(-2x + 5) = -10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ -4x + 4x - 10 = -10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 0x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$ $\rightarrow$ $1x \neq 0$ puisque $0x = 0$

Que pensez vous de cette résolution (stratégie, méthode et résultat) ?

C'est 1 bonne résolution
Il a remarqué que l'on pouvait annuler le 2e système.

4) (O,i,j) est un repère du plan.
Soit (E) la représentation graphique de la fonction affine f définie par x ---> 2x+1
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Expliquez chaque réponse. Si vous ne savez pas, répondez par ?

(a) (E) est une droite — VRAI — FAUX — ?

c'est 1 fonction affine donc
sa représentation graphique
sera automatiquement 1 droite

(b) Après calculs on obtient f(-1)=-1, f(2)=5, f(0.5)=2.
Les points A(-1,-1), B(2,5) et C(0.5,2) sont alignés. — VRAI — FAUX — ?

Peut-être mais je ne connais pas
ces calculs.

(c) Une équation de (E) est y = 2x+1 — VRAI — FAUX — ?

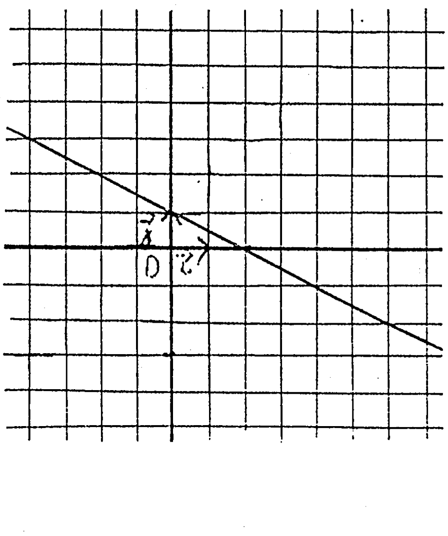
c'est dans l'énoncé

(d) Les coordonnées (x,y) de tout point M de (E) vérifient la relation 2x-y+1 = 0 — VRAI — FAUX — ?

tout les points de la droites vérifient
la m relation

(e) Le point D(1,-4) appartient à (E) — VRAI — FAUX — ?

(f) Voici la représentation graphique de f dans (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) — VRAI — FAUX — ?



ALICE

Questionnaire.

I 1) Les écritures suivantes désignent-ils le même polynôme du second degré ? Justifiez votre réponse.

$-2(x-3)(x+1)$; $-2x^2+4x+6$; $-2(x-1)^2+8$

$2x+6-2x-2$

2) Lorsque x vaut -1, quelle expression choisissez-vous pour calculer la valeur du polynôme ? justifier et faire le calcul.

II On considère un entier. On le multiplie par l'entier consécutif. Au résultat obtenu, on soustrait l'entier initial. Que constatez-vous ? Prouvez-le. soit x l'entier, $x+1$ l'entier consecutif

$x(x+1)-x$. $x^2+\cancel{x}-\cancel{x}$

soit 2 represente l'entier

$2\times3=6$
$6-2=4$

Je ne constate rien

~~Je constate que le resulta est un nombre pair~~

soit 3 represente l'entier

$3\times4=12$
$12-3=9$

III. Soit f la fonction définie par x -----> $-2x^2+4x+6$
Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe représentative P de la fonction f d'équation $y = -2x^2+4x+6$.

1) Décrivez rapidement comment vous procéder pour obtenir la courbe P dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ lorsque x prend des valeurs de -2 à 4.

Dans un tableau je remplace x par ses valeurs -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4. et cela me donne des points

2) Le couple (2,4) vérifie-t-il la relation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier.

3) Le point A(2,4) appartient-il à la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier

4) Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier.

l'ordonnée du point d'abscice 2 est 6 parce que c'est écrit sur la combe.

5) Déterminer graphiquement (s'ils existent), l'abscisse des points de la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$ dont l'ordonnée est nulle ?
Quelle relation vérifie l'abscisse des points de la courbe P dont l'ordonnée est nulle ? Justifier puis indiquer comment déterminer les valeurs recherchées.

ALICE

1.a) Indiquer un processus de calcul permettant d'obtenir $x^2 - (10-x)^2$ à partir d'un nombre x.

on prend un nombre x, on le met au carré, on lui soustrait le nombre x, moins 10, le tout au carré.

$5^2 - (10-5)^2$
$25 - 5^2$
$25 - 25$
0

je prend un nombre x, je l'enlève de 10, je met le resultat au carré puis j'enlève le nouveau resultat du nombre x au carré.

1.b) Calculer le résultat obtenu pour 5.

2.a) Proposer un autre processus de calcul permettant d'obtenir, à partir de tout nombre x, le même résultat qu'avec le processus de calcul initial.

3 a) La relation $y = x^2 - (10-x)^2$ est-elle vérifiée en remplaçant x et y respectivement par 4 et -10 ? Justifiez

soit $x = 4$ et $y = -10$. $4^2 - (10-4)^2$
$-10 = 16 - 36$
$-10 \neq -20$

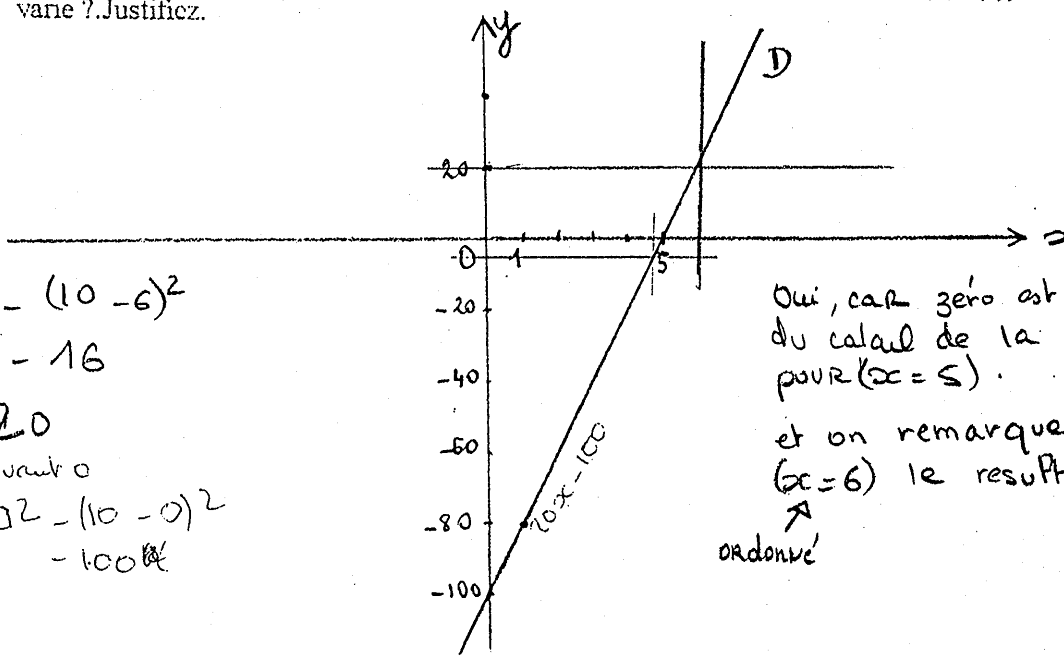
cette relation n'est pas vérifié avec $x=4$ et $y=-10$

3.b) Existe-t-il des nombres permettant d'obtenir -5 comme résultat ? Si oui, lesquels ? Justifiez.

$-5 = x^2 - (10-x)^2$
$-5 = 20x - 100$
$-20x = -100 + 5$
$-20x = -95$
$\frac{20x}{20} = \frac{95}{20}$ $x = 4,75$

fait après

4. Soit C la fonction numérique qui à tout nombre x associe $x^2 - (10-x)^2$
Est-il vrai que la droite D représentée ci dessous est l'ensemble des points M(x,C(x)) lorsque x varie ?.Justifiez.



$6^2 - (10-6)^2$
$36 - 16$
20

Si x vaut 0
$0^2 - (10-0)^2$
-100

Oui, car zero est le resultat du calcul de la fonction pour $(x = 5)$.

et on remarque que pour $(x=6)$ le resultat est 20

ordonné

absisse

II. Soit A : x ---> $2x^2 - 20x + 100$.

1. Les trois écritures suivantes désignent-elles A(x) ?

$x^2 - (10-x)^2$ $\qquad$ $(x - 10)^2 - x^2$ $\qquad$ $2(x - 5)^2 + 50$

$x^2 - 100 + x^2$

$2(x^2 - 25) + 50$

$2x^2 - 50 + 50$

$2x^2$

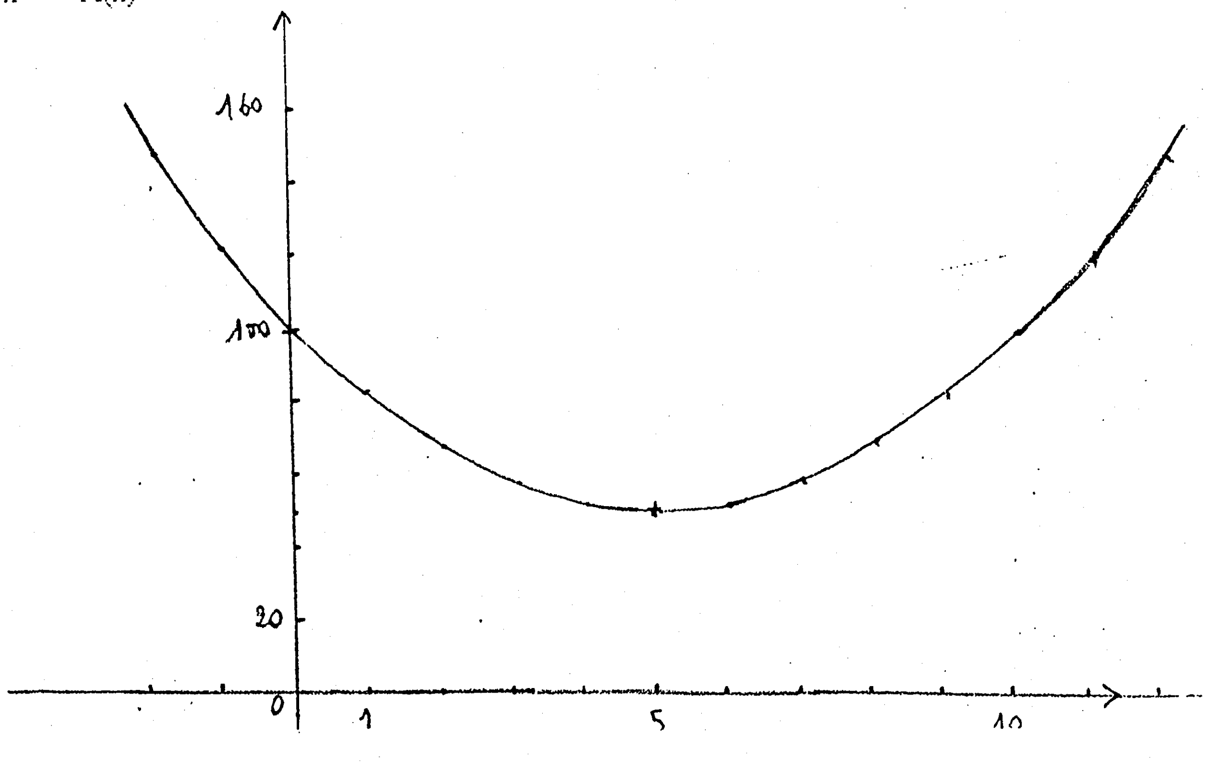
2. Quelle expression choisissez-vous pour calculer A(5) ? Expliquez et calculez A(5).

3. Existe-il des valeurs de x pour lesquelles A(x) s'annule ?

4 Résolvez l'équation A(x) = 0. [illegible]

[illegible]

Expliquez comment vous vérifiez ces réponses en exploitant la représentation graphique de la fonction x ---> A(x)



III. 1. On admet qu'un rubis est une pierre dont la valeur en *francs* est égale à 5000 fois le carré de sa masse en *grammes*.

Par exemple, un rubis de 2 *grammes* a pour valeur 5000×2^2 soit 20000 *francs*.

Un rubis de 10 *grammes* tombe et se casse en deux morceaux pas forcément de même taille. Soit x la masse en *grammes* de l'un des deux morceaux. Indiquez si les expressions suivantes expriment la valeur en francs obtenue lors de la vente des deux morceaux.

	Expressions	Oui/Non	Expliquez pourquoi
gh	$5000\,(x^2 + (10-x)^2)$	N	gf
h	$5000\,x^2 + (10-x)^2$	N	h le carré est sur l'ensemble de la masse
b	$5000\,(x + 10-x)^2$ 1er morceau 2e morceau	O	b x est le 1er morceau, le 2nd c'est 10-x l'addition des 2 donne la masse du rubis on le met au carré et on multiplie le total par 5000

2. Soit un nombre. On le soustrait à 10. On ajoute au carré du résultat précédent le carré du nombre initial. Comment varie le résultat obtenu en fonction du nombre initial ?
Est-il vrai qu'on obtient toujours un nombre supérieur à 50 ? Justifiez votre réponse.

$$(10-x)^2 + x^2$$

Oui, on obtient toujours un nombre supérieur à 50 car la parabole se situe au dessus d'un axe $y = 50$

le résultat de la fonction diminue si $x < 5$
il monte si $x > 5$.

ALICE

Alice

7/05/93 Travail en mathématiques

Contexte :

On veut fabriquer un cadre pour afficher des photos. On a déjà acheté 50 cm de baguette d'encadrement pour faire le cadre. On veut laisser en haut et en bas une marge de 2 cm et de chaque côté une marge de 1 cm.
On veut déterminer les dimensions du cadre pour que la surface disponible (affichable) soit la plus grande possible.

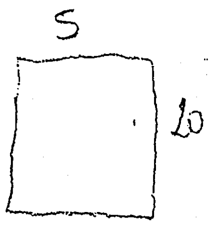
En fait, le problème se ramène au problème mathématique suivant:
Déterminer les dimensions d'un rectangle de 50 cm de périmètre pour que l'aire de la partie centrale de ce rectangle (c'est à dire l'aire du rectangle privé de marges comme définies plus haut) soit maximale.

I. Existe-t-il plusieurs rectangles ayant un périmètre de 50 cm? Donner des exemples.

$2(L+l)=50$ 50cm

$A = L \times l$

$L \times l =$

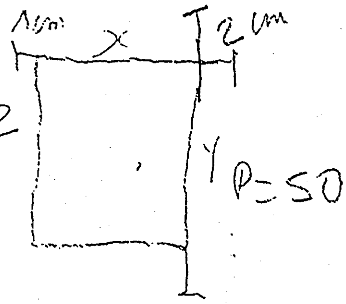


$50-((2\times2)+(2\times1))2$

$50-6\times2$

~~44~~ $50-12$

38



II. On désire résoudre le problème initial.
Proposez une résolution en essayant d'expliquer la stratégie utilisée, les différentes étapes, les calculs mis en jeu, le raisonnement.

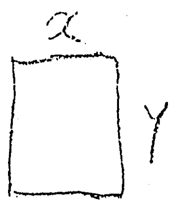
$2(5+20)=50$

$2(10+15)=50$

$2(9+17)=50$

III.1 Voici une étape de la résolution. Explicitez avec soin les étapes de calcul ou de raisonnement qui n'apparaissent pas.

<u>Mise en équation du problème:</u>
Soient x et y les dimensions en cm du cadre.



x et y vérifient l'égalité: $2(x+y)=50$

Soit A l'aire (en cm²) du cadre privé des marges:

$A=(x-2)(y-4)$

soit $A=(x-2)(21-x)$

$\frac{2x}{2}=\frac{50-2y}{2}$

$x=25-2y$

x est la largeur
y la longueur

2 cm de marge sur y on les multiplie par 2, il y a 2 côtés.

1 cm de marge sur x — on multiplie par 2

$2(11,5+y)=50$

$2y+23=50$

$\frac{2y}{2}=\frac{50-23}{2}$

$y=\frac{27}{2}$ $y=13,5$

On sait que la marge sur longueurs
donc $x-(2\times1)$
$y-(2\times2)$
donc $(x-2)(y-4) \rightarrow L\times l$

III.2 L'aire A dépend des dimensions du cadre. On considère la fonction a qui à tout nombre x de l'intervalle [2;21] associe l'aire A, soit a : x -----> (x-2)(21-x)
Indiquez comment vous étudiez cette fonction pour rechercher les dimensions du cadre pour que l'aire du cadre privé des marges soit maximale.

$f(x)=(x-2)(21-x)$

$f'(x)=1(21-x)+1(x-2)$

$=(21-x+(x-2)$

$=21-x+x-2$

19

x	2		11,5		21
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗		↘	

$f'(x)=1(21-x)+(-1)(x-2)$

$=(21-x)+(-x+2)$

$=21-x-x+2$

$=-2x+23$

$-2x+23=0$

$\frac{-2x}{-2}=\frac{-23}{-2}$

$x=\frac{23}{2}$

$f'(2)=-(2\times2)+23$
$=-4+23$
$=+19$

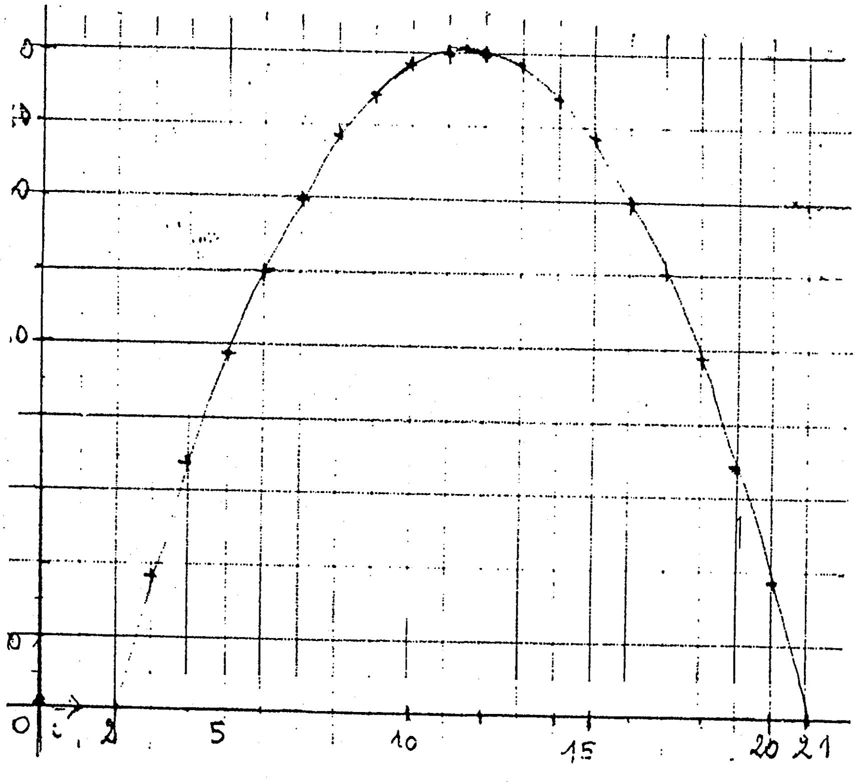
$f'(21)=-(2\times21)+23$
$=-42+23$
$=-1$

III.3 L'aire A dépend de x et on a défini $a(x) = (x-2)(21-x)$
Les expressions suivantes sont-t-elles égales? justifiez rapidement chaque réponse à l'aide d'un calcul ou d'indices pertinents.

$(x-2)(21-x)$	$x-2(21-x)$	$-x^2+23x+42$	$(x-11,5)^2-90,25$
$21x - x^2 - 42 + 2x$ $-x^2+23x-42$	elle n'est pas		

La fonction x ---> -2x+23 est-t-elle la fonction dérivée de la fonction a : x ---> (x-2)(21-x) ? Justifiez.

III.4 On considère la fonction a : x ----> (x-2)(21-x)
a) Voici la courbe représentative C de la fonction a dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'équation $y = (x-2)(21-x)$
Interprétez la courbe C pour conjecturer le sens de variation de la fonction a sur l'intervalle [2;21].



b) Prouvez cette conjecture.

ALICE

4 Juin 1993

Questionnaire

I Une entreprise fabrique des chaises.
Les charges se répartissent en charges fixes : 7 500 F par mois et en charges variables : 12 F par mois et par chaise.
Calculer le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois.
Conjecturer comment varie le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois. Prouver votre conjecture.

7500 / mois
12 F / mois } / chaises

x = nombre de chaises

chgs fixe

chgs variable par rapport au nombre de chaise

$$C = \frac{7500 + 12x}{x}$$

nombre de chaises pour trouver 1 moyenne

si $x = 50$

$$C = \frac{7500 + 600}{50}$$

$$C = \boxed{162}$$

coût d'1 chaise

ALICE

II Pour tout réel x non nul, on pose $C(x) = \frac{7500 + 12x}{x}$

Les expressions suivantes sont-elles égales à $C(x)$?

$\frac{7500}{x} + 12$;	$\frac{7500 + 12}{x}$;	7512 ;	$12x + 7500 \times \frac{1}{x}$
Oui	Non	Non	non

Si $x = 50$

$u = 7500 + 12x$

$u' = 0 + 12$

$v = x$

$v' = 1$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$\frac{12 \times x - (7500 + 12x)}{x^2}$

$\frac{12x - 7500 - 12x}{x^2}$

$\frac{-7500}{x^2}$

III On définit la fonction C par : $C(x) = \frac{7500 + 12x}{x}$

Étudier le sens de variation de C sur l'intervalle $[1 ; 1000]$

Comparer avec le résultat de la question I

$C'(x) = \frac{-7500}{x^2}$

	1	1000
$\frac{7500 + 12x}{x}$		

MÉRIÈME

Mercredi 5/12/93

Questionnaire

1) Les deux expressions $\frac{(a+4)3+a}{4}$ et a+3 sont-elles égales ?

Expliquez votre réponse. oui ces 2 expressions sont égales car en calculant la 1er nous obterons. $\frac{3a+12+a}{4} = \frac{4a+12}{4}$ si l'on divise 4a + 12 par 4 nous obtenons a + 3.

2) Un élève multiplie un nombre par 5 et ajoute 12 au résultat. Il soustrait alors au résultat le nombre initial et divise le résultat par 4. Il remarque qu'il obtient un nombre supérieur de 3 au nombre initial. je ne comprends pas.

Il dit : "Je pense que cela arrivera, quelque soit le nombre initial".

Est ce vrai ? Justifiez votre réponse.

2 = le nombre initial

$2 \times 5 + 12 = 22$

$22 - 2 = 20$

$20 \div 4 = 5$

3) Vous avez à résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4x - 2y = -10 \end{cases}$

Un camarade vous propose la résolution suivante :

$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ -4x - 2(-2x + 5) = -10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ -4x + 4x - 10 = -10 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ 0x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$

Que pensez vous de cette résolution (stratégie, méthode et résultat) ?

Ceci est juste mais il ~~ne~~ nous donne qu'une solution en effet, si l'on multiplie la 1er ligne par − 2 nous obtiendrons −4x − 2y = −10. Nous pouvons constater qu'il s'agit de la même fonction que la ligne 2 donc nous pouvons dire que les droites représentatives sont confondues donc il existe une infinité de solutions

Soit (E) la représentation graphique de la fonction affine f définie par x ---> 2x+1
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Expliquez chaque réponse. Si vous ne savez pas, répondez par ?

(a) (E) est une droite — VRAI — FAUX — ?

Car la représentation graphique d'une fonction affine est une droite. (ne passant pas par l'origine)

(b) Après calculs on obtient f(-1)=-1, f(2)=5, f(0.5)=2.
Les points A(-1,-1), B(2,5) et C(0.5,2) sont alignés. — VRAI — FAUX — ?

Car tous les points solution de cette fonction sont alignés étant donné qu'ils sont situés sur une même droite

(c) Une équation de (E) est y = 2x+1 — VRAI — FAUX — ?

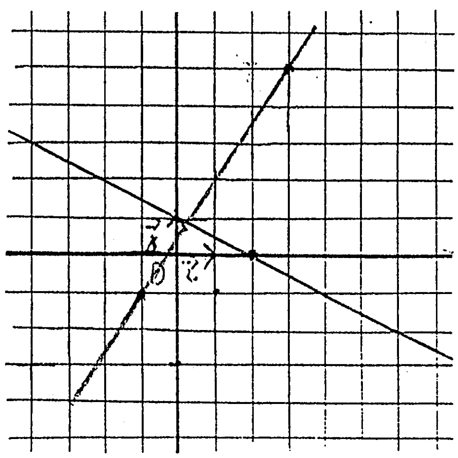
(d) Les coordonnées (x,y) de tout point M de (E) vérifient la relation 2x-y+1 = 0 — VRAI — FAUX — ?

Car la relation $2x-y+1=0$ est équivalente à $y=2x+1$.

(e) Le point D(1,-4) appartient à (E) — VRAI — FAUX — ?

Car en remplaçant la valeur de x et y dans l'équation $y=2x+1$ on obtient $-4=(2\times1)+1$ ce qui est faux donc le point D(1;-4) ne peut pas appartenir à (E)

(f) Voici la représentation graphique de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ — VRAI — FAUX — ?



le coefficient de x est positif donc la droite doit être croissante et là elle est décroissante.
la droite représentée ne peut pas être la droite E

MÉRIÈME

questionnaire.

I 1) Les écritures suivantes désignent-ils le même polynôme du second degré ? Justifiez votre réponse.

$-2(x-3)(x+1)$; $-2x^2+4x+6$; $-2(x-1)^2+8$

pour le savoir, il nous suffit de développer les différents écritures

$-2(x-3)(x+1)$		$-2(x-1)^2+8.$
$(-2x+6)(x+1)$		$-2(x^2-2x+1)+8.$
$-2x^2-2x+6x+6$		$-2x^2+4x-2+8.$
$-2x^2+4x+6$	$-2x^2+4x+6$	$-2x^2+4x+6.$

Etant donné que les 3 écritures sont identique, les écritures initiales désignent le même polynôme.

la première est sous la forme factorisée, la seconde développée et la troisième c'est la forme canonique

2) Lorsque x vaut -1, quelle expression choisissez-vous pour calculer la valeur du polynôme ? justifier et faire le calcul.

je choisis la 2e écriture car elle me semble plus facile, plus ~~rapide, avec le moins de calcul.~~

$-2\times(-1)^2+4\times(-1)+6$ | $-2+2=0.$ la 1er

$-2\times1 \quad -4+6.$

II On considère un entier (x) On le multiplie par l'entier consécutif. Au résultat obtenu, on soustrait l'entier initial. que constatez-vous ? Prouvez-le.

~~$x\times x=x^2$~~

~~x^2-x~~

~~$2\times2=4$~~ | $5\times5=25$

$4-2=2$ | $25-5=20$

$x\times(x+1)=x^2+x$

$x^2+x-x=x^2$

$5\times6=30$

$30-5=25$

je constate que si l'on suit ce programme on trouve le carré de l'entier initial.

III. Soit f la fonction définie par $x \longmapsto -2x^2+4x+6$
Dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe représentative P de la fonction f d'équation $y = -2x^2+4x+6$.

1) Décrivez rapidement comment vous procéder pour obtenir la courbe P dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ lorsque x prend des valeurs de -2 à 4.

Je calcul chaque valeur de y pour l'intervalle -2 à 4 en programmant ma calculatrice.

2) Le couple (2,4) vérifie-t-il la relation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier. Pour le savoir il faut calculer.

$-2\times 2^2+4\times 2+6 = 4$ | $6 \neq 4$ donc le couple (2;4) ne vérifie pas la relation.
$-2\times 4+8+6 = 4$
$-8+8+6 = 4$

3) Le point A(2,4) appartient-il à la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier

C'est le même procédé.

4) Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier.

$-2\times 2^2+4\times 2+6$ cf III 2)

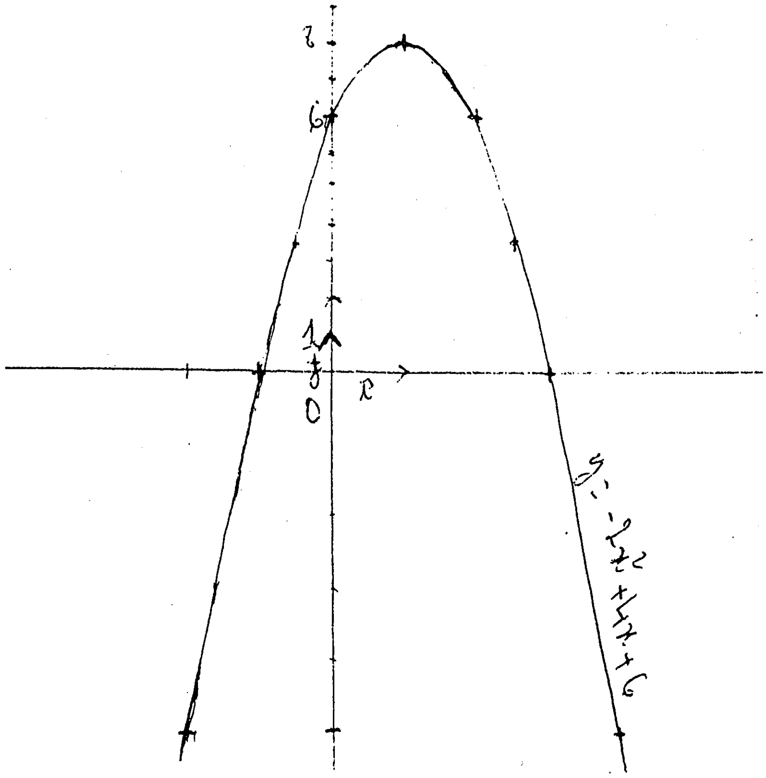
l'ordonnée est 6.

5) Déterminer graphiquement (s'ils existent), l'abscisse des points de la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$ dont l'ordonnée est nulle ?
Quelle relation vérifie l'abscisse des points de la courbe P dont l'ordonnée est nulle ? Justifier puis indiquer comment déterminer les valeurs recherchées.

$-2x^2+4x+6=0$ | car cette écriture est sous la forme $ax^2+bx+c = y$ nous remplaçons y par 0.

discriminant ?

-1 et 3



6). Soit la fonction g définie par x $\xrightarrow{g(x)}$ 2x+2
D est la droite représentative de g dans (O,i,j).
Quelle relation vérifie l'abscisse des points d'intersection des courbes P et D, s'ils existent.
Indiquer votre démarche pour déterminer l'abscisse des points d'intersection des deux courbes, s'ils existent.

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -2x^2 + 4x + 6. \end{cases}$$

donc $2x + 2 = -2x^2 + 4x + 6.$

$2x + 2 - (-2x^2 + 4x + 6)$

$2x + 2 + 2x^2 - 4x - 6 = 0$

IV. 1) Quel est le processus de calcul permettant d'obtenir à partir de x, $\underbrace{(10 - 0,5x)}_{\text{prix}}(80 + 10x)$? nb de billets vendus

- Je multiplie x par -0,5, j'additionne le résultat par 10
Nous appellerons ~~ce~~ ce résultat B
- Je multiplie x par 10, j'additionne le résultat par 80
Nous appellerons ce résultat C.

puis nous multiplions B par C

2) Le directeur d'un théatre remarque que, lorsque le prix de la place est de 10 F il y a eu 80 billets vendus. A chaque baisse de 0,50 F, il y a 10 spectateurs de plus.

a) Si x est le nombre de spectateurs, l'expression précédente (question IV 1) exprime-t-elle la recette d'une soirée de théatre ? Justifier.

b) Après une étude plus fine, le directeur affirme que la recette maximale est atteinte lorsqu'on réalise 6 baisses de 0,50F sur le prix initial du billet. Est ce vrai ?
Comment procéderiez-vous pour contrôler son affirmation ?

a) non car

MÉRIÈME

2 Avril 1993

QUESTIONNAIRE

1.1 a) Indiquer un processus de calcul permettant d'obtenir $x^2 - (10-x)^2$ à partir d'un nombre x.

On prend un nombre
On l'élève au carré
On soustrait le résultat par 10 soustrayé de x qu'on a élevé au carré

x
x^2
$x^2-(10-x)^2$

1.b) Calculer le résultat obtenu pour 5.

$5^2-(10-5)^2 = 25-(100-2\times10\times5+25)$

$25-(100-100+25) = 25-100+100-25 = 0$

plus simple $(10-5)^2 = 5^2 = 2$

2.a) Proposer un autre processus de calcul permettant d'obtenir, à partir de tout nombre x, le même résultat qu'avec le processus de calcul initial.

Nous développons l'identité remarquable $(10-x)^2 = 100-20x+x^2$
donc $x^2-(100-20x+x^2)$ alors $x^2-100+20x-x^2$
ce qui est égale à $-100+20x$
Donc on multiplie à x, 20 et au résultat ~~on~~ on additionne -100.

3 a) Le couple (4,-10) vérifie-t-il la relation $y = x^2 - (10-x)^2$? Justifiez

• pour le savoir il nous suffit de remplacer x et y, par leurs valeurs.

$4^2-(10-4)^2 \stackrel{?}{=} 10$
$16-(100-80+16) \stackrel{?}{=} 10$

$16-100+80-16 \stackrel{?}{=} 10$
$-20 \neq 10$ donc ce couple ne vérifie pas la relation.

3.b) Existe-t-il des nombres permettant d'obtenir -5 comme résultat ? Si oui, lesquels ? Justifiez. Nous recherchons pour quelles valeurs de x, y est égale à 5

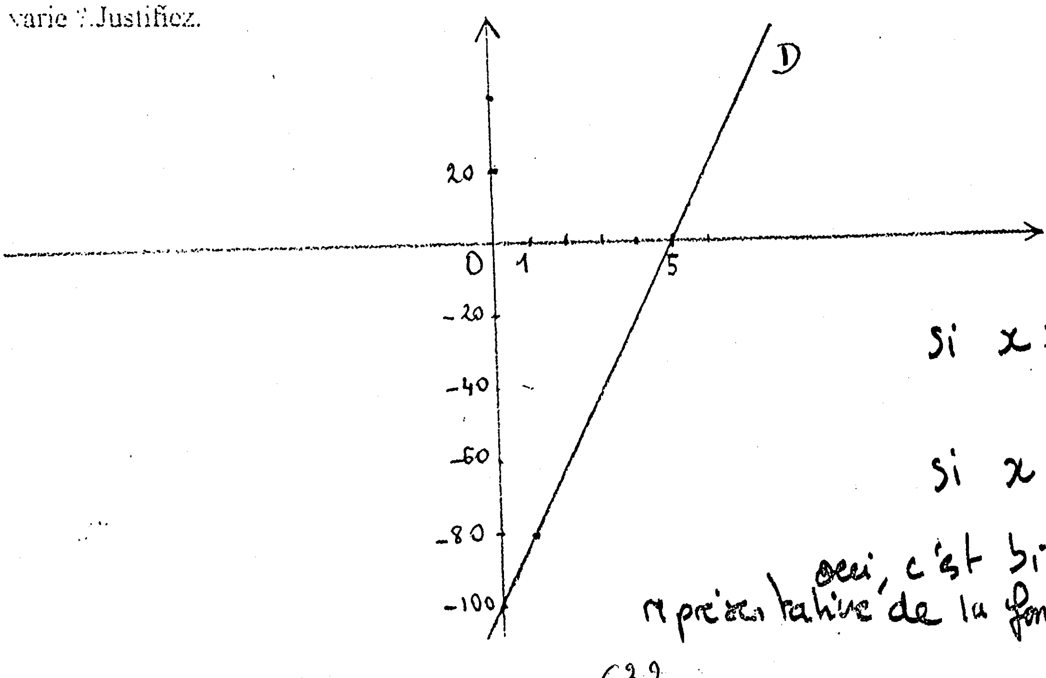
$x^2-(10-x)^2=5$ Nous nous ramenons à une équat° à une inconnue

$x^2-(10-x)^2+5=0$.
Nous simplifions l'écriture.
$x^2-(100-20x+x^2)+5=0$
$x^2-100+20x-x^2+5=0$
$20x-105=0$ (-95)

donc $20x = 105$
$x = \frac{105}{20} = 5{,}25$

$20x = 95$
$x = \frac{95}{20} = 4{,}75$

4. Soit C la fonction numérique qui à tout nombre x associe $x^2 - (10-x)^2 = -100+20x$
Est-il vrai que la droite D représentée ci dessous est l'ensemble des points M(x,C(x)) lorsque x varie ? Justifiez.



si $x=5$ $y=0$

si $x=0$ $y=-100$

oui, c'est bien la droite représentative de la fonct° $x \mapsto -100+20x$

MÉRIÈME

II. Soit A : x ----> $2x^2 - 20x + 100$.

1. Les trois écritures suivantes désignent-elles A(x) ?

$x^2 - (10-x)^2$ | $(x - 10)^2 + x^2$ | $2(x - 5)^2 + 50$

$= x^2 - (100 - 20x + x^2)$ | $x^2 - 20x + 100 + x^2$ | $2\times(x^2 - 10x + 25) + 50$

$= 2x^2 - 20x + 100$ | $= 2x^2 - 20x + 100$ | $2x^2 - 20x + 50 + 50$

$= x^2 - 100 + 20x - x^2$ | | $= 2x^2 - 20x + 100.$

$= 20x - 100$

Oui ces écritures designent A(x) car en les developpant on retrouve $A(x) = 2x^2 - 20x + 100$.

2. Quelle expression choisissez-vous pour calculer A(5) ? Expliquez et calculez A(5).

la 1er car elle est plus simple et plus courte à réaliser

$A(5) = 5^2 - (10-5)^2$ | $A(5) = 25 - 25$ / $2(5-5)^2 + 50$

$A(5) = 25 - 5^2$ | $A(5) = 0$ | $0 + 50 = 50$.

3. Existe-il des valeurs de x pour lesquelles A(x) s'annule ?

$2x^2 - 20x + 100 = 0$ Nous allons utiliser la méthode du Discriminant

$\Delta = (-20)^2 - 4\times 2\times 100$ | $\Delta < 0$ donc il n'existe pas de

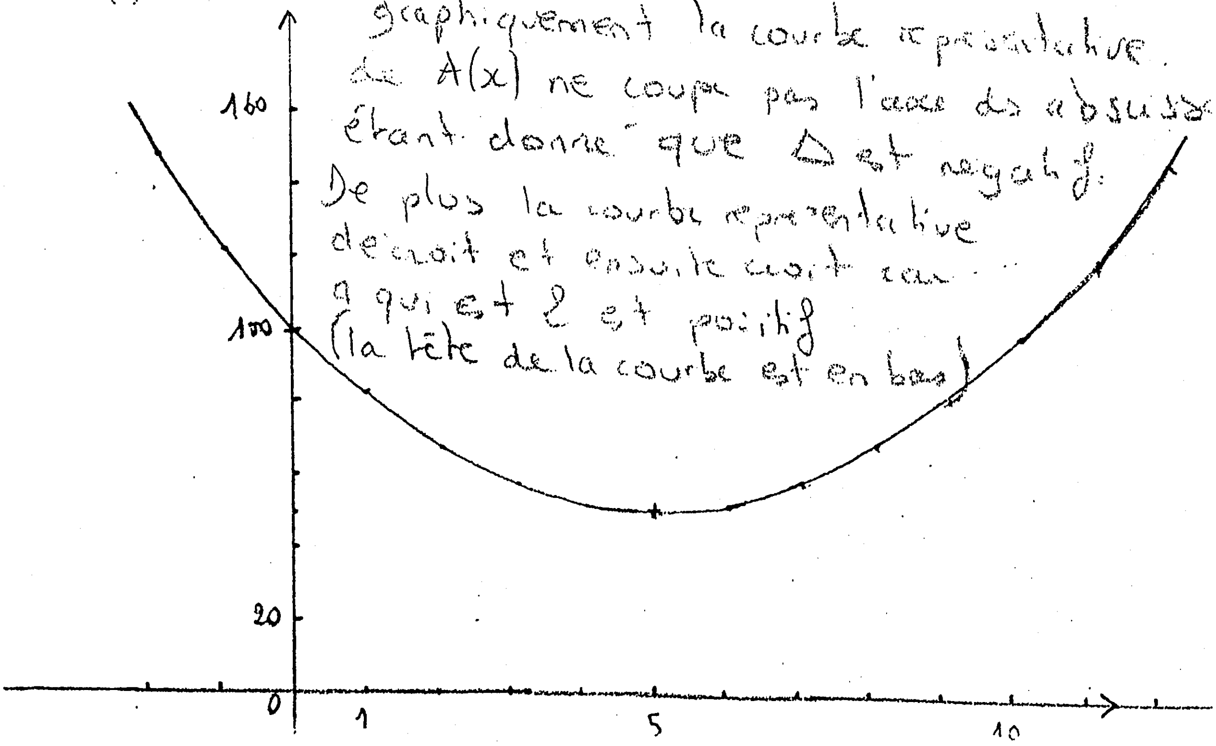
$\Delta = 400 - 800 = -400$ | valeurs de x pour lesquelles A(x) s'annule

4 Résolvez l'équation A(x) = 0.

cf précédente.

Expliquez comment vous vérifiez ces réponses en exploitant la représentation graphique de la fonction x ---> A(x)

graphiquement la courbe représentative de A(x) ne coupe pas l'axe des abscisses étant donné que Δ est negatif.
De plus la courbe representative décroit et ensuite croit car a qui est 2 et positif
(la tête de la courbe est en bas)



MÉRIÈME

III. 1. On admet qu'un rubis est une pierre dont la valeur en *francs* est égale à 5000 fois le carré de sa masse en *grammes*.

Par exemple, un rubis de 2 *grammes* a pour valeur 5000×2^2 soit 20000 *francs*.

Un rubis de 10 *grammes* tombe et se casse en deux morceaux pas forcément de même taille. Soit x la masse en *grammes* de l'un des deux morceaux. Indiquez si les expressions suivantes expriment la valeur en francs obtenue lors de la vente des deux morceaux.

valeur du rubis de 10 g. $5000 \times 10^2 = 5000 \times 100 = 50000$

$5000 \times (\underbrace{x^2}_{1^{er}\text{ morceau}} + \underbrace{(10-x)^2}_{2^{e}\text{ morceaux}})$

Expressions	Oui/Non	Expliquez pourquoi
gh $5000\,(x^2 + (10-x)^2)$	oui	car la masse en grammes du 2e gf morceau est 10-x
h $5000\,x^2 + (10-x)^2$	non	car le 2em morceau n'est pas multiplié h par 5000
b $5000\,(x + 10-x)^2$		b

≠

1. Soit un nombre. On le soustrait à 10. On ajoute au carré du résultat précédent le carré du nombre initial. Comment varie le résultat obtenu en fonction du nombre initial ?
Est-il vrai qu'on obtient toujours un nombre supérieur à 50 ? Justifiez votre réponse.

x

$10 - x$

$(10-x)^2 + x^2$

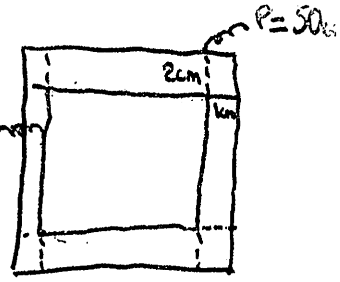
$= 100 - 20x + x^2 + x^2$

$= 2x^2 - 20x + 100.$

$x = 2 \quad (2^2 + (10-2)^2) =$

MÉRIÈME

$P = 50 - (4\times2) - (4\times1)$
$P = 50 - 8 - 4 = 38$



7/05/93 Travail en mathématiques

Contexte :

On veut fabriquer un cadre pour afficher des photos. On a déjà acheté 50 cm de baguette d'encadrement pour faire le cadre. On veut laisser en haut et en bas une marge de 2 cm et de chaque côté une marge de 1 cm.
On veut déterminer les dimensions du cadre pour que la surface disponible (affichable) soit la plus grande possible.

En fait, le problème se ramène au problème mathématique suivant:
Déterminer les dimensions d'un rectangle de 50 cm de périmètre pour que l'aire de la partie centrale de ce rectangle (c'est à dire l'aire du rectangle privé de marges comme définies plus haut) soit maximale.

I. Existe-t-il plusieurs rectangles ayant un périmètre de 50 cm? Donner des exemples. oui,

par exemble Un rentangle de longeur 10 et largeur 15
// 20 // 5
// 12 // 13

la somme de la longeur et de la largeur doit être égale à 25 car $2(L+l)=50$
don $L+l$ doit et égal à 25.

II. On désire résoudre le problème initial.
Proposez une résolution en essayant d'expliquer la stratégie utilisée, les différentes étapes, les calculs mis en jeu, le raisonnement.

Si $2(L+l) = \cancel{50}\ 38$ $L+l = \cancel{25}\ 19$ donc $\cancel{L = 25 - l}$
ainsi $L = 19 - l$

donc l'aire du sous rectangle est égale à $(19-l)l$

$\Rightarrow 19l - l^2$ donc la fonct° est $f(x) = -x^2 + 19x$

Nous pouvons voir que cela admet un maximum car le coef de x st négatif.

Il y a plusieurs moyens de définir ce maximum en traçant la courbe représentative de la fonct° ou simplement avec le tableau de valeur.

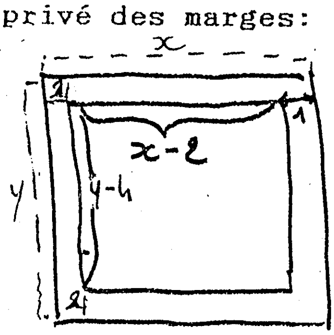
MÉRIÈME

III.1 Voici une étape de la résolution. Explicitez avec soin les étapes de calcul ou de raisonnement qui n'apparaissent pas.

<u>Mise en équation du problème:</u>
Soient x et y les dimensions en cm du cadre.

x et y vérifient l'égalité: $2(x+y)=50$

Soit A l'aire (en cm²) du cadre privé des marges:



$A=(x-2)(y-4)$

soit $A=(x-2)(21-x)$

$(25-4)-x$

donc $21-x=y-4$

corrigé

$x+y=25$.

donc $y=25-x$

$A=(x-2)(25-x-4)$

$A=(x-2)(21-x)$.

III.2 L'aire A dépend des dimensions du cadre. On considère la fonction a qui à tout nombre x de l'intervalle [2;21] associe l'aire A, soit a : x ----> (x-2)(21-x)
Indiquez comment vous étudiez cette fonction pour rechercher les dimensions du cadre pour que l'aire du cadre privé des marges soit maximale.

MÉRIEME

III.3 L'aire A dépend de x et on a défini $a(x) = (x-2)(21-x)$
Les expressions suivantes sont-t-elles égales? justifiez rapidement chaque réponse à l'aide d'un calcul ou d'indices pertinents.

$(x-2)(21-x)$	$x-2(21-x)$	forme dével. $-x^2+23x-42$	$(x-11,5)^2-90,25$
	Non car c'est seulement -2 que l'on multiplie par 21 -x et le résultat, on le soustrait	$21x-x^2-42+2x$ $=-x^2+2x-42$ non ce n'est pas la même	$[x^2-(2\times 11,5\times x)+132,25]-90,25$ $x^2-23x+132,25-90,25$ $=x^2-23x+42.$ Oui ~~c'est~~ la même. faux

La fonction x ---> -2x+23 est-t-elle la fonction dérivée de la fonction a : x ---> (x-2)(21-x) ? Justifiez.

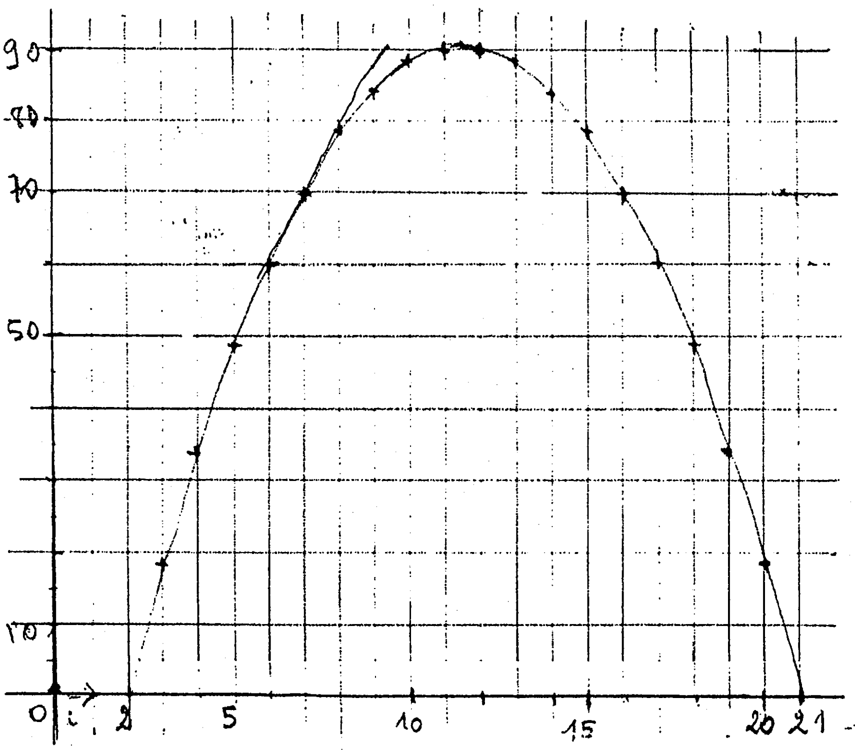
On reconnais uv dont $(uv)'=u'v+uv'$

donc $f'(x)=1(21-x)+(x-2)\times(-1)$
$= 21-x+(-x)+2$
$= 23-2x > 0$?

III.4 On considère la fonction a : x ----> (x-2)(21-x)

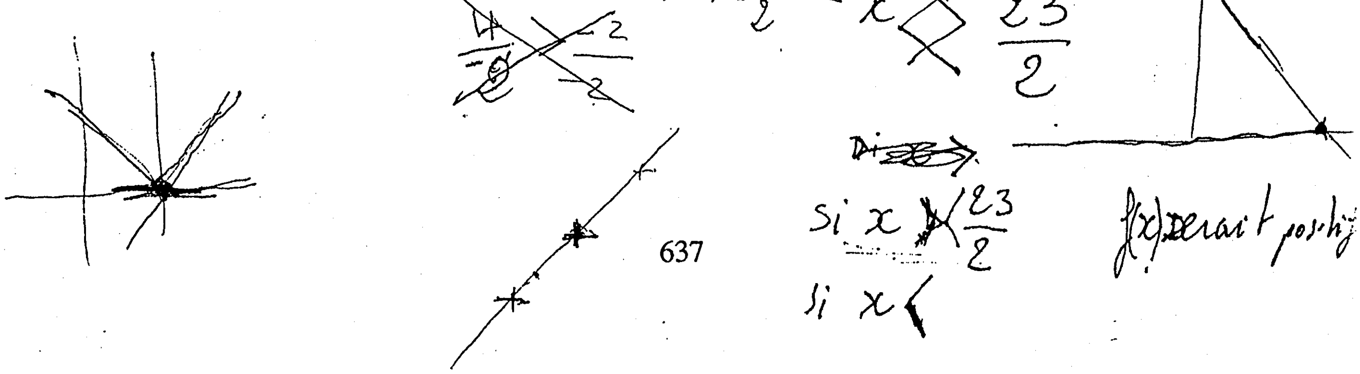
a) Voici la courbe représentative C de la fonction a dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'équation $y=(x-2)(21-x)$

Interprétez la courbe C pour conjecturer le sens de variation de la fonction a sur l'intervalle [2;21].



x	2	~~12~~ 11,5	21
$f(x)$	0 ↗	$\simeq 90,3$	↘ 0

b) Prouvez cette conjecture.



$-2x > -23$

$x < \dfrac{23}{2}$

Si $x > \dfrac{23}{2}$

si $x <$

$f(x)$ serait positif

MÉRIÈME

4 Juin 1993

Questionnaire

I Une entreprise fabrique des chaises.
Les charges se répartissent en charges fixes : 7 500 F par mois et en charges variables : 12 F par mois et par chaise.
— Calculer le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois.
— Conjecturer comment varie le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois. Prouver votre conjecture.

x = nombre de ~~mois~~ chaises.

$$f(x) = 7500 + 12x$$

Coût moyen unitaire $= \dfrac{7500+12x}{x} = \dfrac{u}{v}$

Etude de la fonction : $D_f = \mathbb{R} / \{0\}$ On reconnait $\frac{u}{v}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{12x - (7500+12)}{x^2} = \frac{12x-7512}{x^2} = \left(\frac{u}{v}\right)$$

$$f'(x) = \frac{12x - (7500+12x)\times 1}{x^2} = \frac{12x-7500-12x}{x^2} = \frac{-7500}{x^2}$$

II · Pour tout réel x non nul, on pose $C(x) = \frac{7500+12x}{x}$

Les expressions suivantes sont-elles égales à $C(x)$?

$\frac{7500}{x}+12$	$\frac{7500+12}{x}$;	7512 ;	$(12x+7500)\times\frac{1}{x}$
Oui car cela revient à $\frac{7500}{x}+\frac{12\cancel{x}}{\cancel{x}}$ qui est égale à $\frac{7500+12x}{x}$. Ainsi, on peut "annuler" les x	Non car 12 n'est pas multiplié par x	Non car si $C(x)=7512$ $C(x)=\frac{(7500+12)x}{x}$ donc ici x n'est pas multiplié par 7500.	Non, car $12x$ n'est pas divisé par x.

III · On définit la fonction C par : $C(x) = \frac{7500+12x}{x}$

Étudier le sens de variation de C sur l'intervalle $[1;1000]$

Comparer avec le résultat de la question I

si $12x - 7512 = 0$ alors $x = \frac{7512}{12} = 626$

tableau des signes

	1	~~626~~		1000.
-7500 ~~$12x-7512$~~	$-$	0	~~$+$~~ $-$	
x^2	$+$		$+$	
$f'(x)$	$-$	0	~~$+$~~ $-$	
$f(x)$	~~7512~~	~~0,038~~ 23,98		~~0,019~~ 19,5

-1512

IV Voici la courbe représentative de la fonction C dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. C associe au nombre de chaises fabriquées par mois le coût moyen d'une chaise.

1- Résoudre graphiquement l'équation $C(x) = 87$.
Interpréter le résultat. Vérifier.

Cela signifie pour quelle valeur de x, $C(x)$ est égale à 87.
c'est 100.

- $\frac{7500 + 1200}{\cancel{100}} = 87$

$\frac{7500 + 12x}{x} = \frac{87x}{x}$

donc $7500 + 12x = 87x$
$7500 = 75x$
$x = \frac{7500}{75} = 100$

2- Déterminer graphiquement une valeur approchée de $C(87)$. Vérifier

$\simeq 99$ ~~$\simeq 100$~~ $C(87) = \frac{7500 + 12 \times 87}{87} = 98,2$

V On rappelle que le coût marginal (augmentation du coût pour la fabrication d'une chaise supplémentaire) est $C(x+1) - C(x)$, x désignant le nombre de chaises fabriquées.

1. Calculer $C(x+1) - C(x)$

$C(x+1) = \frac{7500 + 12(x+1)}{x+1} = \frac{7500 + 12x + 12}{x+1} = \frac{12x + \cancel{7}512}{x+1}$

donc $C(x+1) - C(x) = \frac{12x + \cancel{7}512}{x+1} - \frac{7500 + 12x}{x}$

$= 1$ Même dénominateur

$= \frac{12x^2 + \cancel{7}512x}{x^2 + x} - \left(\frac{7500x + 7500 + 12x^2 + 12x}{x^2 + x}\right)$

FRÉDÉRIC

Questionnaire

I. 1) Les écritures suivantes désignent-elles le même polynôme du second degré ? Justifier votre réponse.

$-2(x-3)(x+1)$; $-2x^2+4x+6$; $-2(x-1)^2+8$

$(-2x+6).(x+1)$

$-2x^2-2x+6x+6$

$-2x^2+4x+6$

$-2x^2+4x+6$

$-2(x^2-2x+1)+8$

$-2x^2+4x-2+8$

$-2x^2+4x+6$

oui

2) Lorsque x vaut 3, quelle expression choisissez-vous pour calculer la valeur du polynôme ? justifier et faire le calcul.

je choisis la 2ème

$-(2\times 3^2)+(4\times 3)+6$

$-2\times 9+12+6$

$-18+18$

0

II. Un élève multiplie un nombre par 5 et soustrait 12 au résultat. Il soutrait alors au résultat le nombre initial et divise le résultat par 4. Il affirme que le nombre obtenu est inférieur de 3 au nombre initial, et ceci, quel que soit le nombre initial.
Est ce vrai ? Démontrer le.

$\frac{(5x-12)-x}{4} = x-3$

le resultat de Copernic

il faut donné plusieurs valeur au x

$x - 5x - 12$

$\frac{5x - x - 12}{4} =$

$= \frac{4x-12}{4} = x = 3$

$-(2-3) = -2+3$

$(2-3)$

$2-3$

III. Soit f la fonction définie par x -----> $-2x^2+4x+6$
Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe représentative P de la fonction f d'équation $y = -2x^2+4x+6$.

1) Décrivez rapidement comment vous procéder pour obtenir la courbe P dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ lorsque x prend des valeurs de -2 à 4.

on fait un tableau de valeur en remplaçant x par beaucoup de chiffe compris en -2 et 4

2) Le couple (2,4) vérifie-t-il la relation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier.

$-2 \times 2^2 + 4 \times 2 + 6$
$-2 \times 4 + 8 + 6$
$-8 + 8 + 6$
6

non (2,4) ne verifie pas la relation.

3) Le point A(2,4) appartient-il à la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier

non voir ci-dessus.

4) Quelle est l'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$? Justifier.

le point d ordonnée est 6 voir 2)

5) Déterminer graphiquement (s'ils existent), l'abscisse des points de la courbe P d'équation $y = -2x^2+4x+6$ dont l'ordonnée est nulle ?
Quelle relation vérifie l'abscisse des points de la courbe P dont l'ordonnée est nulle ? Justifier puis indiquer comment déterminer les valeurs recherchées.

-2 et 3

FREDERIC

2/4/93

1.a) Indiquer un processus de calcul permettant d'obtenir $x^2 - (10-x)^2$ à partir d'un nombre x.

on prend un chiffre qu'on élève au carré
on soustrait à 10 le nb pris au hasard, le résultat est élevé au carré
on soustrait le 1er chiffre au 2ème.

1.b) Calculer le résultat obtenu pour 5.

$5^2 - (10-5)^2 = 25 - (5)^2$

$25 - 25 = 0$

2.a) Proposer un autre processus de calcul permettant d'obtenir, à partir de tout nombre x, le même résultat qu'avec le processus de calcul initial.

3 a) La relation $y = x^2 - (10-x)^2$ est-elle vérifiée en remplaçant x et y respectivement par 4 et -10 ? Justifiez

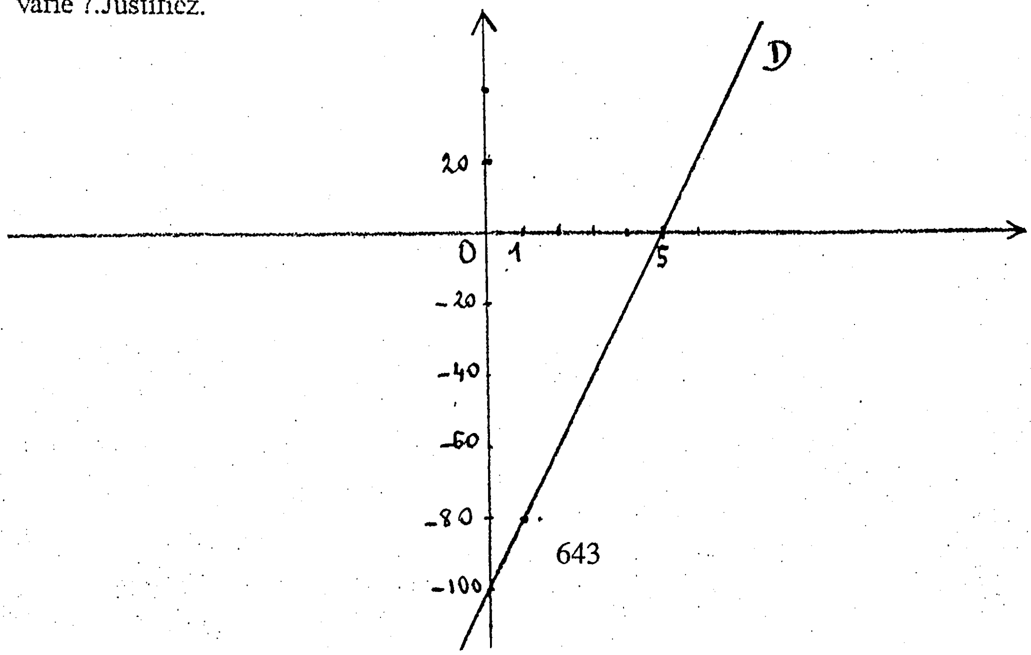
$4^2 - (10-4)^2 = 16 - (6)^2$

$16 - 36$

-20

3.b) Existe-t-il des nombres permettant d'obtenir -5 comme résultat ? Si oui, lesquels ? Justifiez.

4. Soit C la fonction numérique qui à tout nombre x associe $x^2 - (10-x)^2$
Est-il vrai que la droite D représentée ci dessous est l'ensemble des points M(x,C(x)) lorsque x varie ?.Justifiez.



FRÉDÉRIC

II. Soit A : x ----> $2x^2 - 20x + 100$.

1. Les trois écritures suivantes désignent-elles A(x) ?

$x^2 - (10-x)^2$ $\quad$ $(x - 10)^2 + x^2$ $\quad$ $2(x - 5)^2 + 50$

$x^2 - (10-x)^2 = x^2 - (100 - 20x + x^2)$

$= x^2 - 100 + 20x - x^2$

$(x-10)^2 + x^2 = x^2 - 20x + 100 + x^2$

$= 2x^2 - 20x + 100$

$2(x-5)^2 + 5 = 2\times(x^2 - 10x + 25) + 5$

$= 2x^2 - 20x + 50 + 50$

$= 2x^2 + 100 - 20x$

2. Quelle expression choisissez-vous pour calculer A(5) ? Expliquez et calculez A(5).

la 3ème.

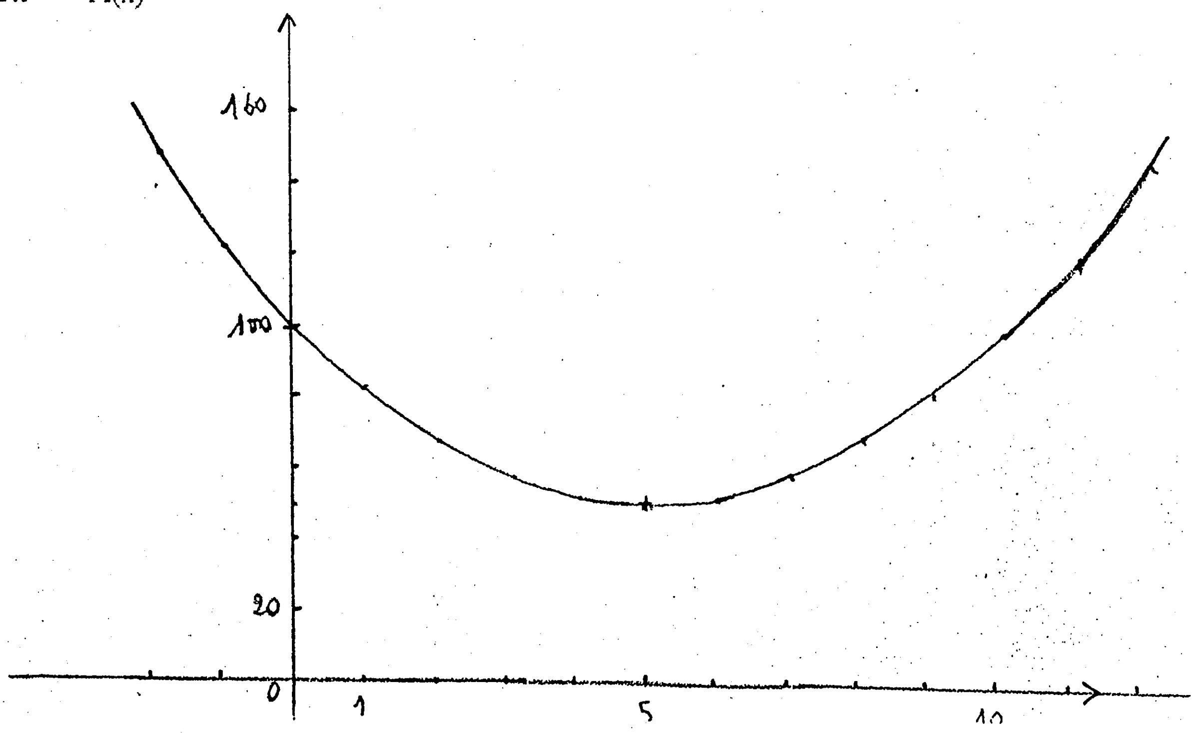
$2(5-5)^2 + 50 = 2\times 0^2 + 50$

$= 50$

3. Existe-il des valeurs de x pour lesquelles A(x) s'annule ?

4 Résolvez l'équation A(x) = 0.

Expliquez comment vous vérifiez ces réponses en exploitant la représentation graphique de la fonction x ---> A(x)



FRÉDERIC

III. 1.On admet qu'un rubis est une pierre dont la valeur en *francs* est égale à 5000 fois le carré de sa masse en *grammes*.

Par exemple, un rubis de 2 *grammes* a pour valeur 5000×2^2 soit 20000 *francs*.

Un rubis de 10 *grammes* tombe et se casse en deux morceaux pas forcément de même taille. Soit x la masse en *grammes* de l'un des deux morceaux. Indiquez si les expressions suivantes expriment la valeur en francs obtenue lors de la vente des deux morceaux.

Expressions	Oui/Non	Expliquez pourquoi
$5000\,(x^2 + (10-x)^2)$		
$5000\,x^2 + (10-x)^2$		
$5000\,(x + 10 - x)^2$		

1. Soit un nombre. On le soustrait à 10. On ajoute au carré du résultat précédent le carré du nombre initial. Comment varie le résultat obtenu en fonction du nombre initial ?
Est-il vrai qu'on obtient toujours un nombre supérieur à 50 ? Justifiez votre réponse.

$(x-10)^2 + x^2$

$(10-x)^2 + x^2$

$x^2 - 20x + 100 + x^2$

$2x^2 - 20x + 100$

FRÉDÉRIC

4 Juin 1993

Questionnaire

I Une entreprise fabrique des chaises.
Les charges se répartissent en charges fixes : 7 500 F par mois et en charges variables : 12 F par mois et par chaise.
Calculer le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois.
Conjecturer comment varie le coût moyen unitaire d'une chaise en fonction du nombre de chaises fabriquées par mois. Prouver votre conjecture.

$$f(x) = \frac{7500 + 12x}{x}$$

RESUME

Cette thèse étudie les problèmes de transition dans le système éducatif dans le cas particulier de la transition entre les filières de BEP tertiaire et les filières tertiaires de l'enseignement général des lycées. Cette étude est menée à travers celle des rapports institutionnels et personnels à l'algèbre élémentaire qui se développe dans les deux institutions concernées. La recherche conjugue deux types d'approche : une approche anthropologique se référant aux recherches menées autour de Yves Chevallard et une approche de nature épistémologique et cognitive et s'appuie sur l'élaboration d'un structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique. Cette structure est exploitée pour analyser : - Les rapports institutionnels via les programmes et les cahiers d'élèves. - Les rapports personnels via l'élaboration d'un ensemble de tâches diagnostic et la définition en termes de "profils" des cohérences locales de fonctionnement des élèves.- La mise en relation des deux catégories de rapports. L'évolution des profils d'élèves dans le cadre d'un enseignement donné

MOTS CLES

didactique,
mathématiques,
algèbre élémentaire,
enseignement secondaire,
transitions institutionnelles,
rapport au savoir,
fonctionnement cognitif,
profils d'élèves.

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Décembre 1995
ISBN : 2-86612-167-8